

Bell-Ungleichung, CHSH und andere nicht-lokale Spiele

Fabian Rheinwald, Sofie Sharaf und Michael Baßler

www.cas.dhbw.de



Agenda

- Bell-Ungleichung
 - Historische Entwicklung
 - Gedankenexperimente
 - Bell-Ungleichungen im Quantencomputing
- CHSH Game
 - Regeln
 - Klassische vs Quantenstrategie
- GHZ Game
 - Regeln
 - Klassische vs Quantenstrategie
- Quellen

Historische Entwicklung der Bell-Ungleichung (1)

- Problemstellung kommt aus dem Einstein-Podolsky-Rosen-Paradoxon (EPR) (1935).¹
- Quantenmechanik ist nicht mit der klassischen Physik vereinbar.
- Annahme bei Gültigkeit der klassischen Physik:
 - Jede physikalische Größe ist mit Sicherheit vorhersagbar.
 - Das physikalische System muss zu jedem Zeitpunkt bekannt sein.
 - Eine Information kann nicht schneller als mit Lichtgeschwindigkeit übertragen werden.
- Wie lassen sich diese Annahmen mit der Quantenmechanik vereinen?

[1] A. Einstein, B. Podolsky und N. Rosen, „Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?“, *Physical Review*, Bd. 47, pp. 777-780, 25 März 1935.

Historische Entwicklung der Bell-Ungleichung (2)

- Idee des EPR-Paradoxons:
 - Es existiert eine versteckte Variable, die bereits vor der Messung den Systemzustand festlegt.
 - Diese Variable muss vorhersagbar sein, ohne das System dabei zu stören.
- Herr Bell stellte hierzu (1964) ein Experiment auf, dass die Existenz solcher Variablen nachweisen oder widerlegen soll.²
- Dieser Versuchsaufbau und die physikalische Beschreibung ist als Bell-Ungleichung oder Aspect-Experiment bekannt.³

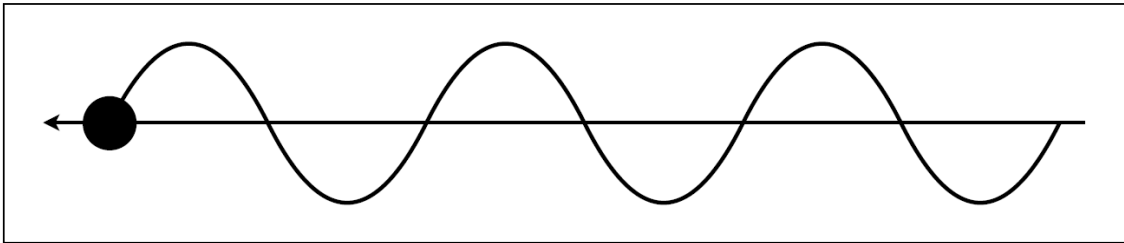
[2] J. S. Bell, „On the Einstein Podolsky Rosen paradox“, *Physics*, Bd. 1, Nr. 3, pp. 195-200, 1964.

[3] A. Aspect, P. Grangier und G. Roger, „Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem“, *Physical Review Letters*, pp. 460-463, 30 März 1981.

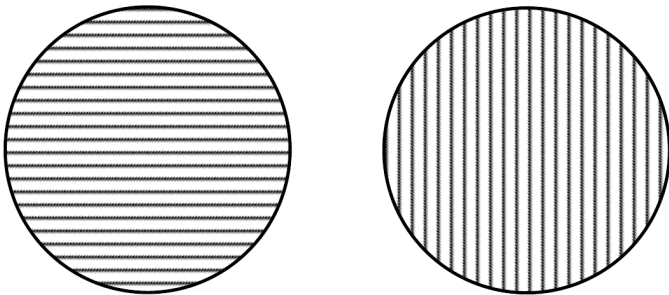
Gedanken Experiment (1)

Grundlagen:

- Polarisiertes Licht / Photon



- Polarisationsfilter

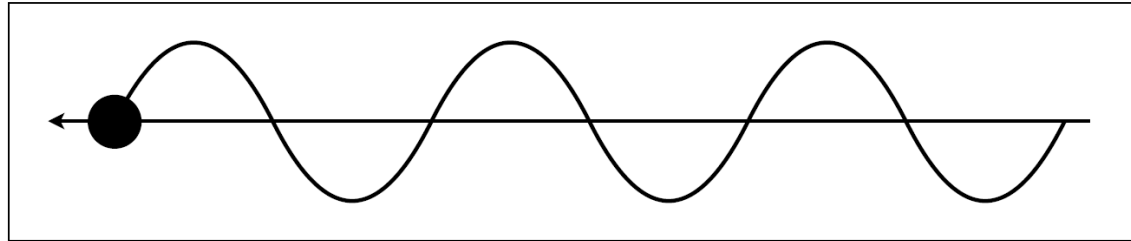
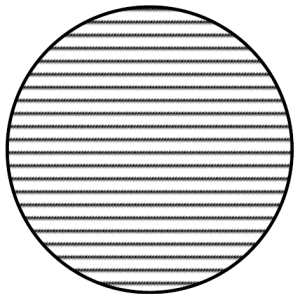


[4] B. Just, Quantencomputing kompakt: Spukhafte Fernwirkung und Teleportation endlich verständlich, Heidelberg: Springer Vieweg, 2021.

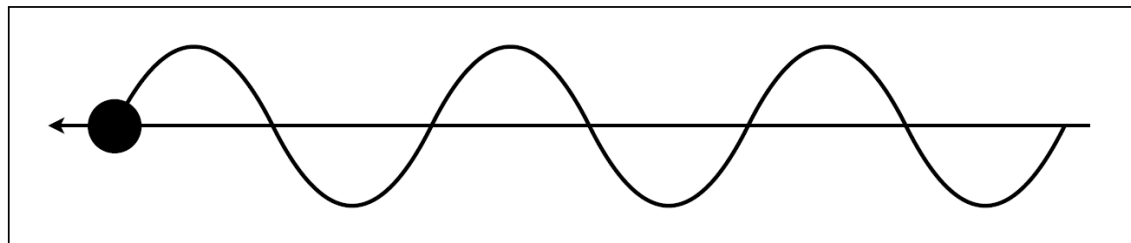
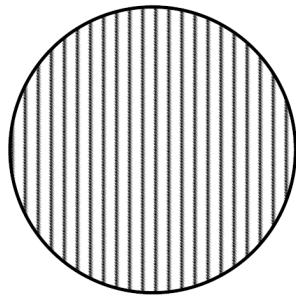
Gedanken Experiment (2)

Grundlagen:

- Absorption des Photons



- Durchlass des Photons

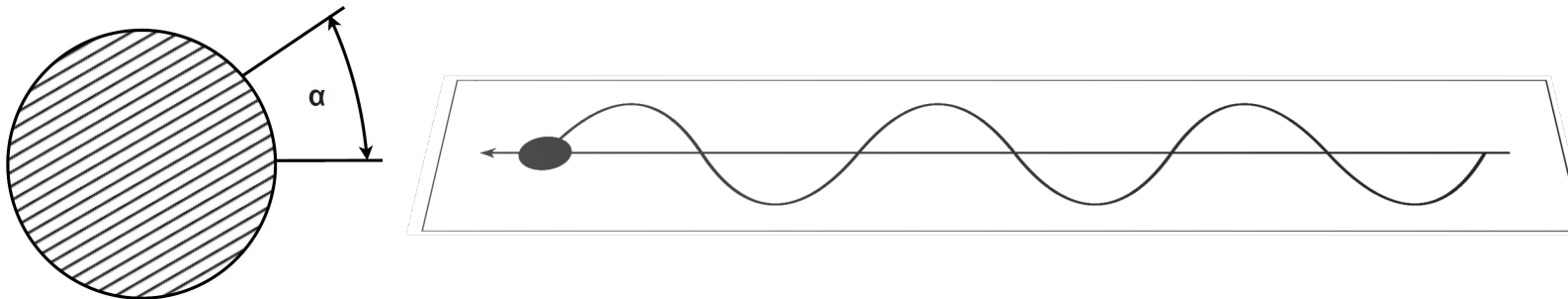


[4] B. Just, Quantencomputing kompakt: Spukhafte Fernwirkung und Teleportation endlich verständlich, Heidelberg: Springer Vieweg, 2021.

Gedanken Experiment (3)

Grundlagen:

- Durchlasswahrscheinlichkeit bei polarisiertem Photon



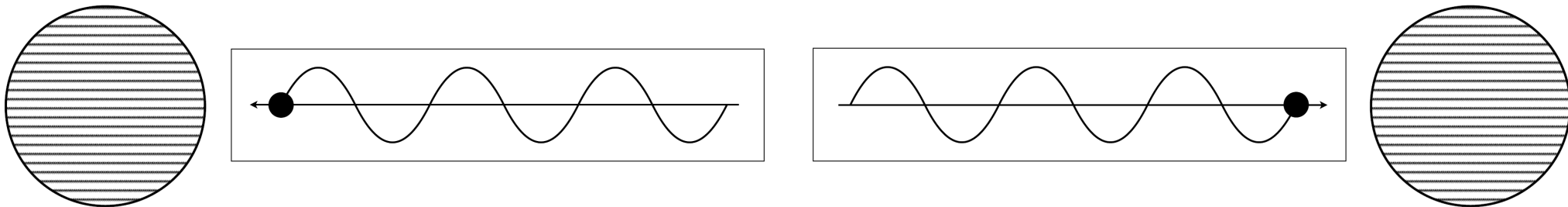
- Wahrscheinlichkeit entspricht $(\cos(\alpha))^2$
- Bei einem nicht-polarisierten Photon liegt die Wahrscheinlichkeit für die Absorption und den Durchlass jeweils bei 50%.

[4] B. Just, Quantencomputing kompakt: Spukhafte Fernwirkung und Teleportation endlich verständlich, Heidelberg: Springer Vieweg, 2021.

Gedanken Experiment (4)

Erstes Experiment:

- Zwei nicht-verschränkte und nicht-polarisierte Photonen werden auf zwei Filter geschickt.



■ Ergebnisse:

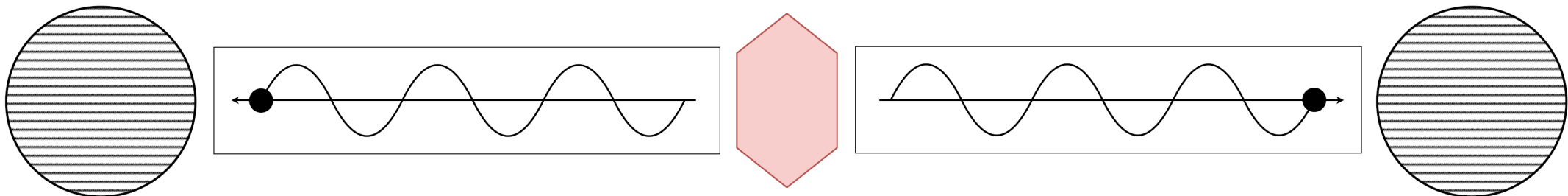
- 25% Beide Photonen werden absorbiert.
- 25% Beide Photonen werden durchgelassen.
- 25% Das linke Photon wird absorbiert und das rechte Photon wird durchgelassen.
- 25% Das rechte Photon wird absorbiert und das linke Photon wird durchgelassen.

[4] B. Just, Quantencomputing kompakt: Spukhafte Fernwirkung und Teleportation endlich verständlich, Heidelberg: Springer Vieweg, 2021.

Gedanken Experiment (5)

Zweites Experiment:

- Zwei verschränkte und nicht-polarisierte Photonen werden zeitgleich auf zwei identische Filter geschickt.



- **Ergebnisse:**
 - Wenn das linke Photon absorbiert wird, dann wird auch das rechte Photon absorbiert.
 - Wenn das linke Photon durchgelassen wird, dann wird auch das rechte Photon durchgelassen.

[4] B. Just, Quantencomputing kompakt: Spukhafte Fernwirkung und Teleportation endlich verständlich, Heidelberg: Springer Vieweg, 2021.

Gedanken Experiment (6)

Schlussfolgerung des zweiten Experiments:

- Beide Photonen haben zu Beginn eine Wahrscheinlichkeit von 50% absorbiert zu werden.
- Warum sind dann die Messergebnisse der beiden Photonen äquivalent?
- Findet eine Kommunikation zwischen den beiden Teilchen statt?
- Wenn eine Kommunikation stattfindet, dann muss diese schneller als das Licht sein.

Idee des EPR-Paradoxons:

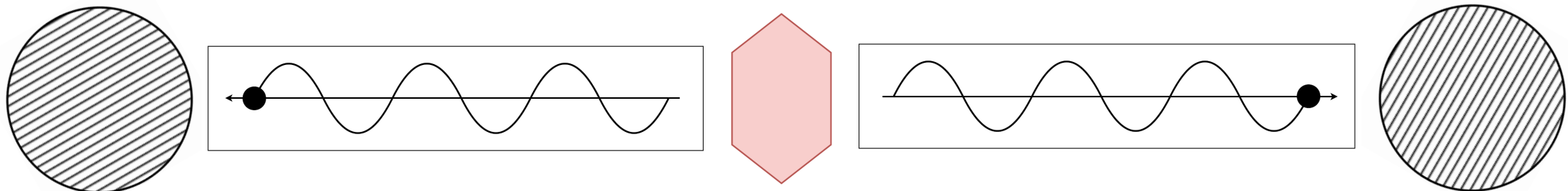
- Es gibt eine versteckte Variable, die bereits bei der Verschränkung das Messergebnis festlegt.
- Das System wäre somit zu jedem Zeitpunkt bekannt.

[4] B. Just, Quantencomputing kompakt: Spukhafte Fernwirkung und Teleportation endlich verständlich, Heidelberg: Springer Vieweg, 2021.

Gedanken Experiment (7)

Drittes Experiment:

- Die Idee des Experiments geht auf Herrn Bell zurück. (Ohne mathematische Herleitung)
- Zwei verschränkte und nicht polarisierte Photonen werden auf zwei unterschiedliche Filter geschickt, wobei das linke Photon zuerst gemessen wird.
- Die Rotation der beiden Filter wird dabei **zufällig** nach der Emission der Photonen festgelegt.



[2] J. S. Bell, „On the Einstein Podolsky Rosen paradox“, *Physics*, Bd. 1, Nr. 3, pp. 195-200, 1964.

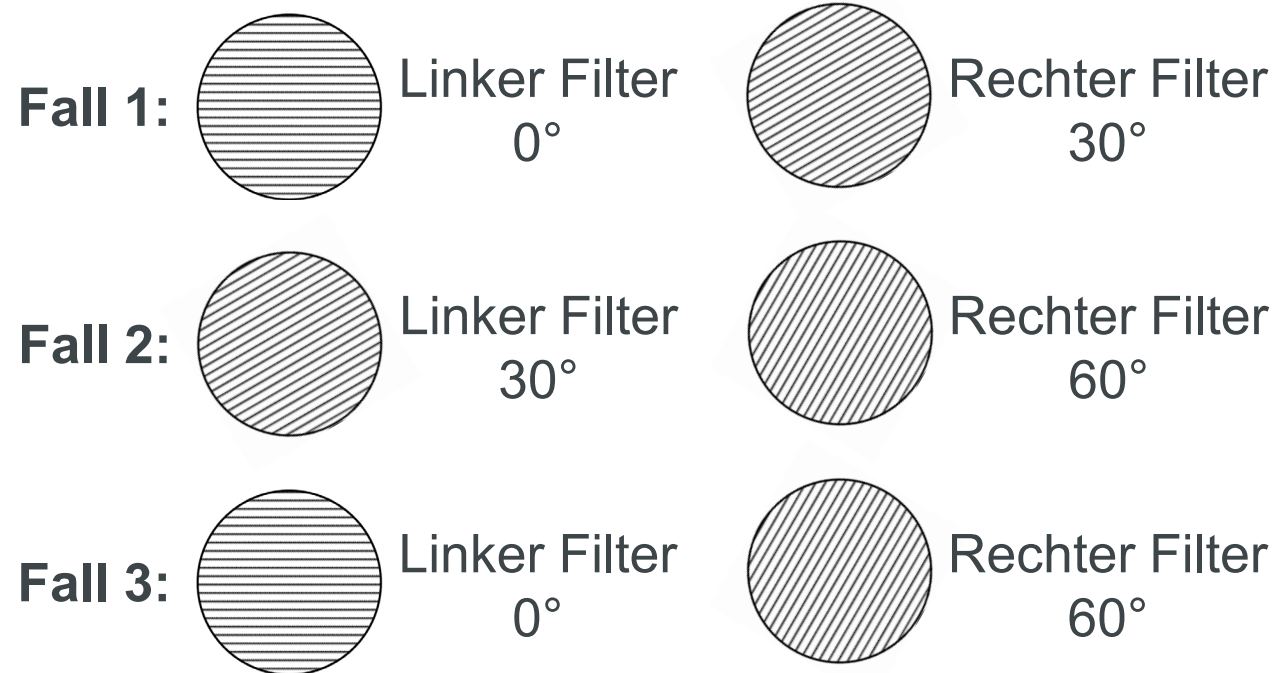
[4] B. Just, *Quantencomputing kompakt: Spukhafte Fernwirkung und Teleportation endlich verständlich*, Heidelberg: Springer Vieweg, 2021.



Gedanken Experiment (8)

Drittes Experiment:

- Betrachtung der drei Fälle aus der Bell-Ungleichung:

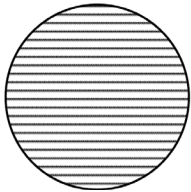
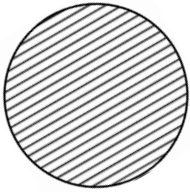
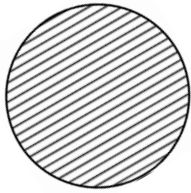
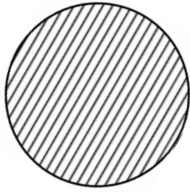
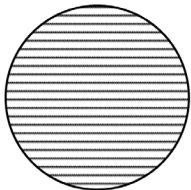
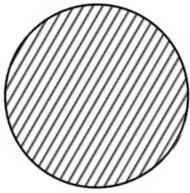


[4] B. Just, Quantencomputing kompakt: Spukhafte Fernwirkung und Teleportation endlich verständlich, Heidelberg: Springer Vieweg, 2021.

Gedanken Experiment (9)

Ergebnisse aus dem dritten Experiment:

- Anzahl der Messungen, die gleich oder verschieden sind:

Fall 1:		Linker Filter 0°		Rechter Filter 30°	75% der Messungen sind gleich
Fall 2:		Linker Filter 30°		Rechter Filter 60°	75% der Messungen sind gleich
Fall 3:		Linker Filter 0°		Rechter Filter 60°	75% der Messungen sind ungleich und 25% sind gleich

[4] B. Just, Quantencomputing kompakt: Spukhafte Fernwirkung und Teleportation endlich verständlich, Heidelberg: Springer Vieweg, 2021.

Gedanken Experiment (10)

Ergebnisse aus dem dritten Experiment:

- Wenn 75% der Ergebnisse übereinstimmen, dann widerspricht dies den versteckten Variablen. Diese erlauben nur eine maximale Übereinstimmung von 66%.⁴
- Erinnerung: „Mathematisch: $(\cos(30^\circ))^2 = 0,75$ “
- Das Experiment zeigt, dass das Messergebnis während der Verschränkung noch nicht festgelegt ist.
- Schlussfolgerung: Es gibt einen Informationsaustausch zwischen den Photonen, welcher schneller als die Lichtgeschwindigkeit ist.
(Beweis von Herrn Aspect)³



[3] A. Aspect, P. Grangier und G. Roger, „Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem“, Physical Review Letters, pp. 460-463, 30 März 1981.

[4] B. Just, Quantencomputing kompakt: Spukhafte Fernwirkung und Teleportation endlich verständlich, Heidelberg: Springer Vieweg, 2021.

Bell-Ungleichung im Quantencomputing (1)

Klassischer Computer:

- **Realismus:**
 - Der Wert eines Bits ist zu jedem Zeitpunkt der Berechnung bekannt.
 - Das Auslesen des Bits verändert nicht seinen Wert.
- **Lokalität:**
 - Die Änderung eines Bits führt nicht direkt zu einer Veränderung eines anderen Bits.
- Anwendung der klassischen Physik.

[4] B. Just, Quantencomputing kompakt: Spukhafte Fernwirkung und Teleportation endlich verständlich, Heidelberg: Springer Vieweg, 2021.



Bell-Ungleichung im Quantencomputing (2)

Quantencomputer:

- **Eingeschränkter Realismus:**
 - Der Wert eines Qubits ist zu keinem Zeitpunkt vor der Messung bekannt.
 - Das Auslesen des Qubits verändert seinen Wert.
- **Eingeschränkte Lokalität:**
 - Die Änderung eines Qubits führt bei einer Verschränkung zeitgleich zu einer Veränderung eines oder mehrerer anderer Qubits.
- Anwendung der Quantenmechanik.

[4] B. Just, Quantencomputing kompakt: Spukhafte Fernwirkung und Teleportation endlich verständlich, Heidelberg: Springer Vieweg, 2021.



Bell-Ungleichung im Quantencomputing (3)

Schlussfolgerung:

- Das zuvor gezeigte Experiment liefert die Grundlage für die Funktionsweise des Quantencomputers.
- Ein nicht polarisiertes Photon kann hierbei den Superpositionszustand des Qubits beschreiben $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$.
- Der Polarisationsfilter ist die Messung des Quantenzustandes.
 - Absorption bedeutet $|1\rangle$
 - Durchlass bedeutet $|0\rangle$
- Außerdem beschreibt das Experiment die Grundlage der Quantenteleportation und des Quanteninternets.

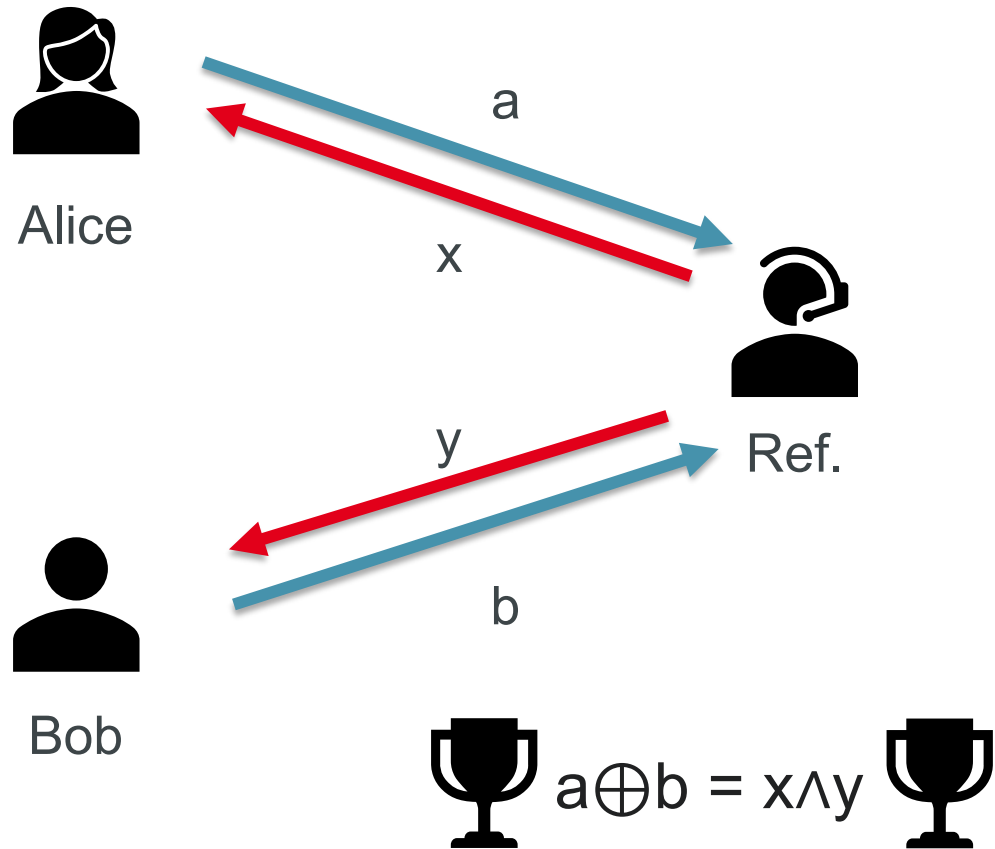
[4] B. Just, Quantencomputing kompakt: Spukhafte Fernwirkung und Teleportation endlich verständlich, Heidelberg: Springer Vieweg, 2021.

Das CHSH Spiel

- Ein "anschaulicher" Beweis des Bell-Theorems
- Zeigt, dass Qubits keine lokalen Variablen haben
- 1969 entworfen von **Clauser**, **Horne**, **Shimony** und **Holt** [4]

[5] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt, 'Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories', Phys. Rev. Lett., vol. 23, pp. 880–884, Oct. 1969.

Spielregeln



x	y	x&y	a	b	a XOR b	result
0	0	0	0	0	0	win
0	0	0	0	1	1	loss
0	0	0	1	0	1	loss
0	0	0	1	1	0	win
0	1	0	0	0	0	win
0	1	0	0	1	1	loss
0	1	0	1	0	1	loss
0	1	0	1	1	0	win
1	0	0	0	0	0	win
1	0	0	0	1	1	loss
1	0	0	1	0	1	loss
1	0	0	1	1	0	win
1	1	1	0	0	0	loss
1	1	1	0	1	1	win
1	1	1	1	0	1	win
1	1	1	1	1	0	loss

Klassische Strategie

- Es gibt keine Funktion $A(x)$ und $B(y)$ bei der immer gewonnen wird
- Bester Weg: Alice und Bob wählen für a und b den gleichen Wert
- Beispiel: $A(x) = 0$ und $B(y) = 0$
- Gewinnwahrscheinlichkeit: 75%
- Lässt sich das durch Quanteneffekte übertreffen?

Quanten Strategie

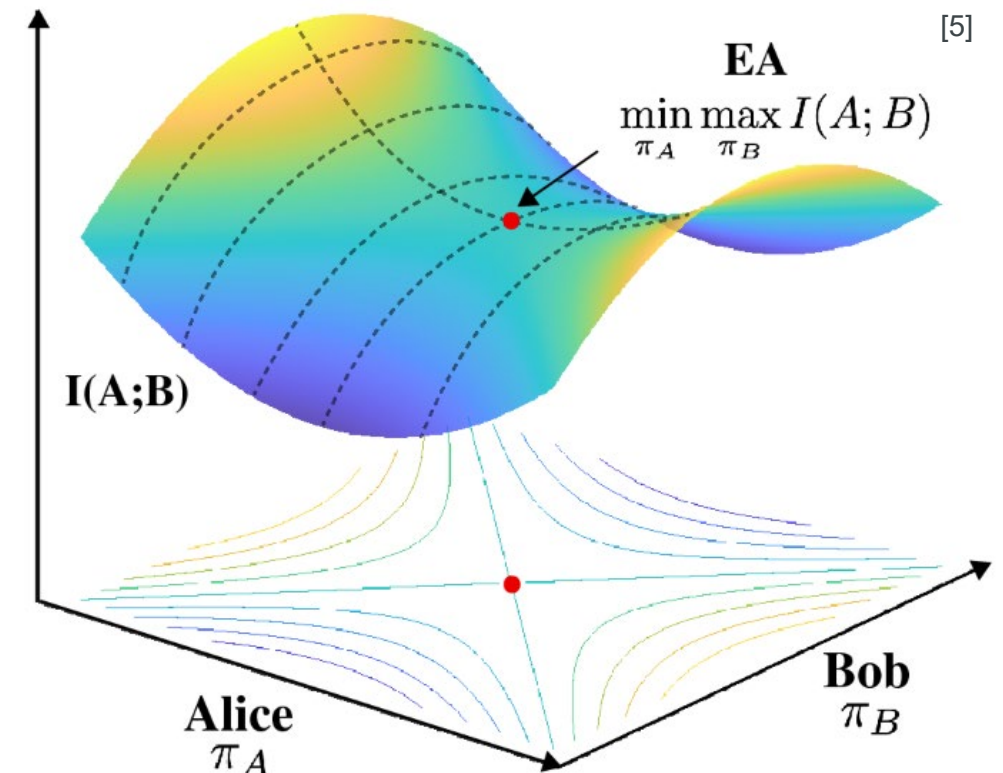
- Alice und Bob erhalten verschränkte Qubits
- Alice rotiert ihr Qubit entsprechend von x und Bob rotiert sein Qubit abhängig von y
- Durch Rotationen θ_A und θ_B auf verschränkten Zustand $|00\rangle - |11\rangle$ ergibt sich:
$$\cos(\theta_A + \theta_B)(|00\rangle - |11\rangle) + \sin(\theta_A + \theta_B)(|01\rangle + |10\rangle)$$
- Zwischen den Messwerten von Alice und Bob besteht eine Korrelation, beschrieben durch:
$$E(a, b), E(a, b'), E(a', b) \text{ und } E(a', b')$$
- Bei $E(a, b) = 1$ würden Alice und Bob immer den selben Wert erhalten
- Ziel: Korrelation der Werte so optimieren, dass maximaler Score im Spiel erreicht wird

Quanten Strategie

- Wahl der Winkel und entsprechende Korrelation quasi eine Optimierungsfunktion
- Ohne Quanteneffekte gilt die CHSH – Ungleichung:

$$S = E(a, b) - E(a, b') + E(a', b) + E(a', b')$$

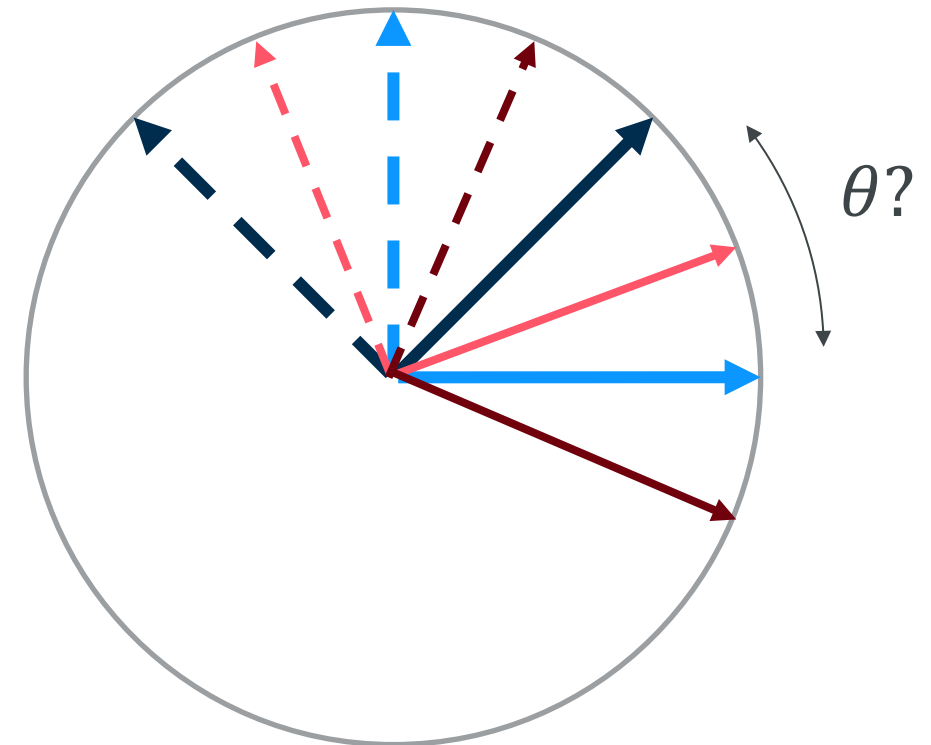
$$|S| \leq 2$$
- Wie können Alice und Bob ihre Winkel schlau wählen, um S zu maximieren?



[6] Shajilal, B., Huntington, E., Lam, P.K. et al. A new entropic quantum correlation measure for adversarial systems. Sci Rep 13, 1436 (2023).

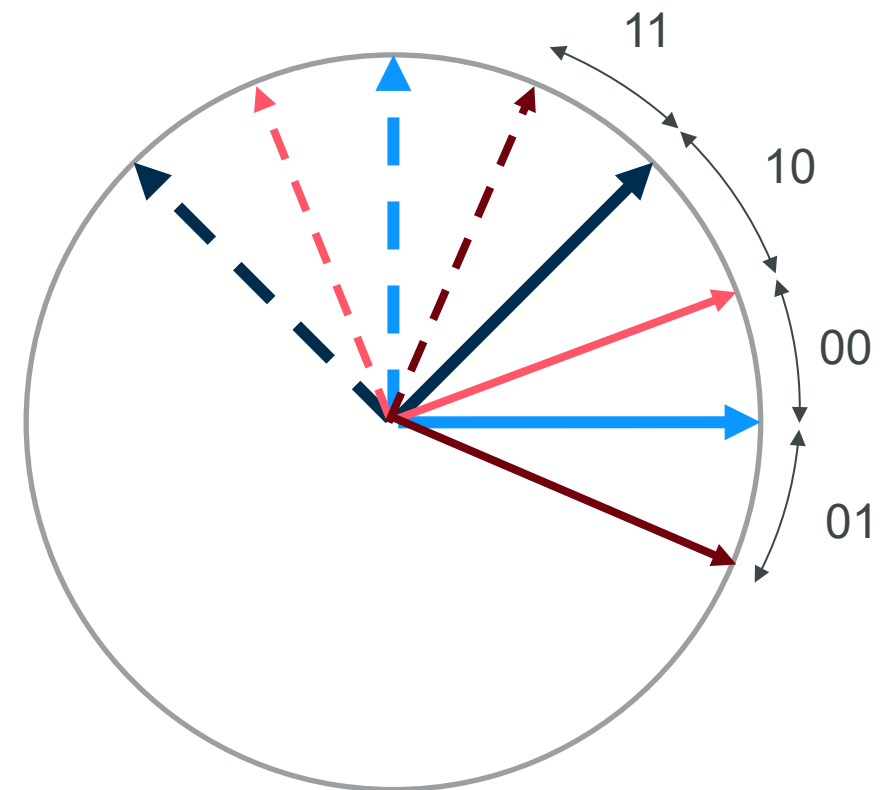
Quanten Strategie

- Zur Erinnerung: Falls $x=y=1$ sollen Alice und Bob etwas unterschiedliches antworten, sonst das Gleiche
- Variablen für Alice:
 - $x = 0$ (a = 1 für gestrichelt)
 - $x = 1$
- Variablen für Bob:
 - $y = 0$
 - $y = 1$



Quanten Strategie

- Alice dreht um: $\theta_A = 0^\circ$ bei $x = 0$
 $\theta_{A'} = 45^\circ (\pi/4)$ bei $x = 1$
- Bob dreht um: $\theta_B = 22,5^\circ (\pi/8)$ bei $y = 0$
 $\theta_{B'} = -22,5^\circ (-\pi/8)$ bei $y = 1$
- Somit ist Bob $\pi/8$ vom gewünschten Zustand entfernt
- Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 0,85$
- Für den CHSH Parameter ergibt sich: $|S| = 2\sqrt{2}$
- Bedeutung: Experimenteller Beweis, dass Quantenmechanik keine lokal-realistische Theorie ist da Ergebnisse der Qubits nicht vorbestimmt



[7] O'Donnell, Carnegie Mellon Course 15-859BB, Fall 2018

Das GHZ Spiel

- basiert auf **GHZ-Zustand** (Greenberger-Horne-Zeilinger)
- zeigt das Phänomen der Quantenverschränkung und der non-locality (Nicht-Lokalität)
- dient als Beispiel für die Verwendung von Quantencomputern in der Kommunikation
- zeigt Verletzung der Bell Ungleichung

[8] Schulze, L. & Lahmann, J. The Quantum GHZ game: a playful introduction to entanglement and error mitigation on real Quantum computer, Digitale Welt Magazin (2021)

Spielregeln I

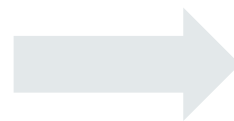
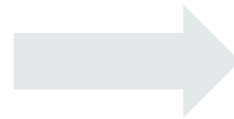
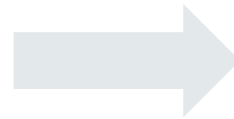
- Ein böser Zauberer hat 3 Spielerinnen gefangen genommen
- Jede Spielerin sitzt in einem eigenen Raum
- Jede Spielerin wird entweder nach einer Farbe oder einer Form gefragt
 - Rot vs Blau
 - Stern vs Rechteck

Spielregeln II

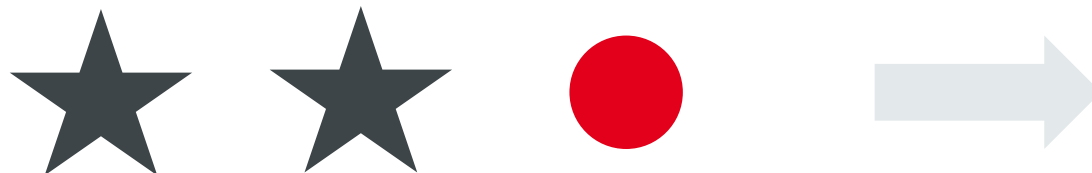
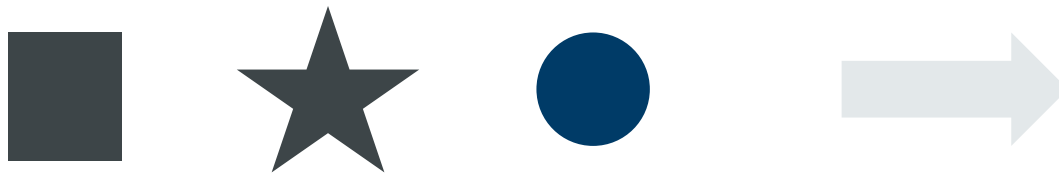
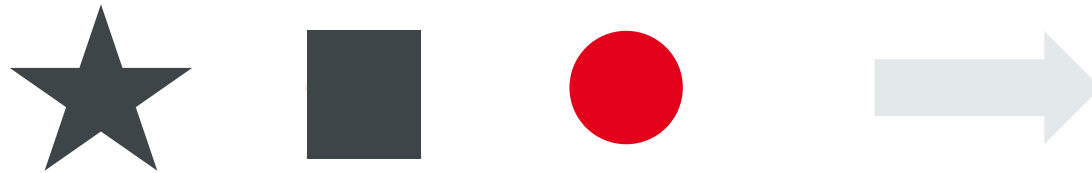
- Der Zauberer fragt entweder
 - a. Alle Spielerinnen nach einer Farbe
oder
 - b. Zwei Spielerinnen nach einer Form und eine nach einer Farbe

- Gewonnen haben die Spielerinnen wenn
 - a. Rot eine gerade Anzahl oft genannt wurde
 - b. Rot und Stern kombiniert eine ungerade Anzahl oft genannt wurde

Beispiele für Fall A (3x Farbe)



Beispiele für Fall B (2x Form + 1x Farbe)



Klassische Strategie

- Auch hier keine Strategie die immer gewinnt
- max 75% Gewinnquote erreichbar
 - Immer Stern bzw Rot antworten, was in 3 von 4 Fällen funktioniert
- Randomisierte Simulation (s. Notebook) < 50%

→ Durch Fallunterscheidung schwierig eine generelle Strategie zu entwickeln

Grundlagen des GHZ Games in Quantenmechanik

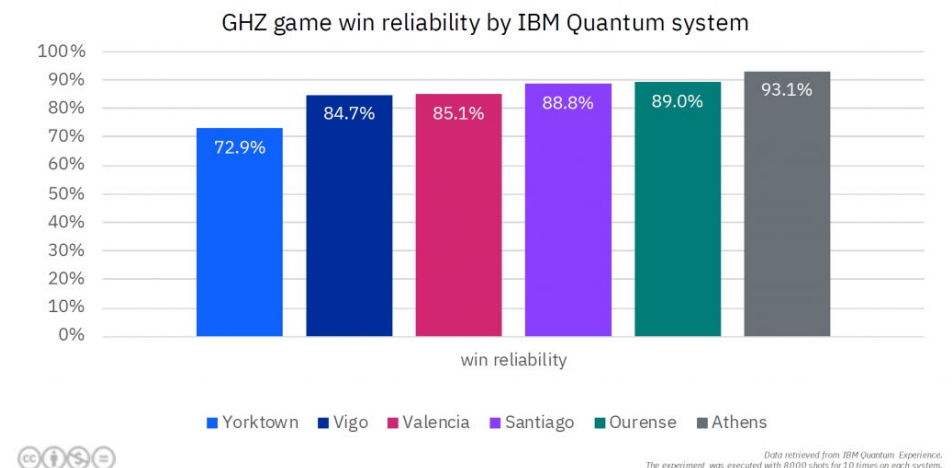
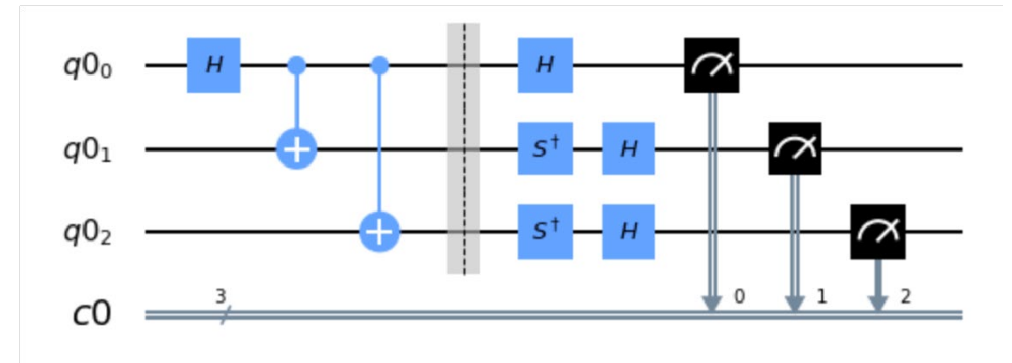
GHZ Zustand [9]:

- Erweitert Bell Theorem auf 3+ Qubits
- Spezielle Form der Superposition
- Gesamtergebnis vorhersagbar, ohne dass einzelne Zustände bekannt sind

[9] Greenberger, D. M.; Horne, M. A.; Zeilinger, A. Theoretical foundations of the GHZ state: Going Beyond Bell's Theorem. Fundamental Theories of Physics, Vol.37, pp.69-72. (1989)

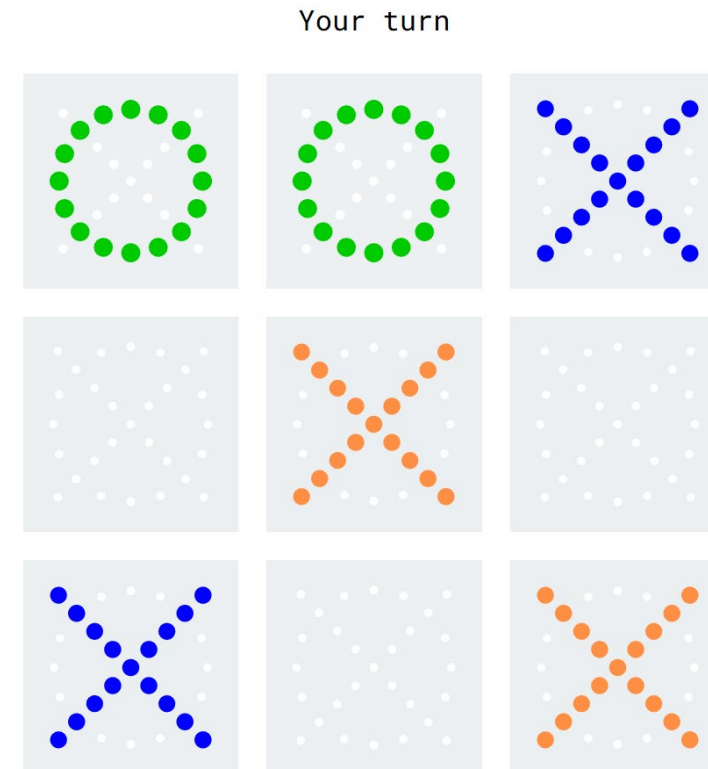
Quantenstrategie

- Theoretisch 100% Gewinnchance erreichbar
- Faktisch 97% durch Ungenauigkeit bei Quantencomputern [7]
- Verschränkung der Qubits & Nutzen eines SDG-Gitters*
 - * Rotation um die „Z-Achse“ der Matrix um $\alpha - \pi/2$
- $sdg = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$



Faszination Quantenspiele

- Unter Qiskit Community Tutorials viele Quantenversionen von populären Spielen:
<https://github.com/qiskit-community/qiskit-community-tutorials/tree/master/games>
- Zbsp TicTacToe mit Superpositionen und Verschränkung:
<https://tiqtaqtoe.com/> von Quantum Delta NL



Quellen

- [1] A. Einstein, B. Podolsky und N. Rosen, „Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?“, *Physical Review*, Bd. 47, pp. 777-780, 25 März 1935.
- [2] J. S. Bell, „On the Einstein Podolsky Rosen paradox“, *Physics*, Bd. 1, Nr. 3, pp. 195-200, 1964.
- [3] A. Aspect, P. Grangier und G. Roger, „Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem“, *Physical Review Letters*, pp. 460-463, 30 März 1981.
- [4] B. Just, *Quantencomputing kompakt: Spukhafte Fernwirkung und Teleportation endlich verständlich*, Heidelberg: Springer Vieweg, 2021.
- [5] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt, ‘Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories’, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 23, pp. 880–884, Oct. 1969.
- [6] Shajilal, B., Huntington, E., Lam, P.K. et al. A new entropic quantum correlation measure for adversarial systems. *Sci Rep* 13, 1436 (2023).

Quellen

[7] O'Donnell, Carnegie Mellon Course 15-859BB, Fall 2018

[8] Schulze, L. & Lahmann, J. The Quantum GHZ game: a playful introduction to entanglement and error mitigation on real Quantum computer, Digitale Welt Magazin (2021)

[9] Greenberger, D. M.; Horne, M. A.; Zeilinger, A. Theoretical foundations of the GHZ state: Going Beyond Bell's Theorem. Fundamental Theories of Physics, Vol.37, pp.69-72. (1989)