VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

IEL – protokol k projektu

Sofiia Popovych
xpopov13

17. prosince 2022

Obsah

1 Příklad 1 2

2 Příklad 2 6

3 Příklad 3 9

4 Příklad 4 12

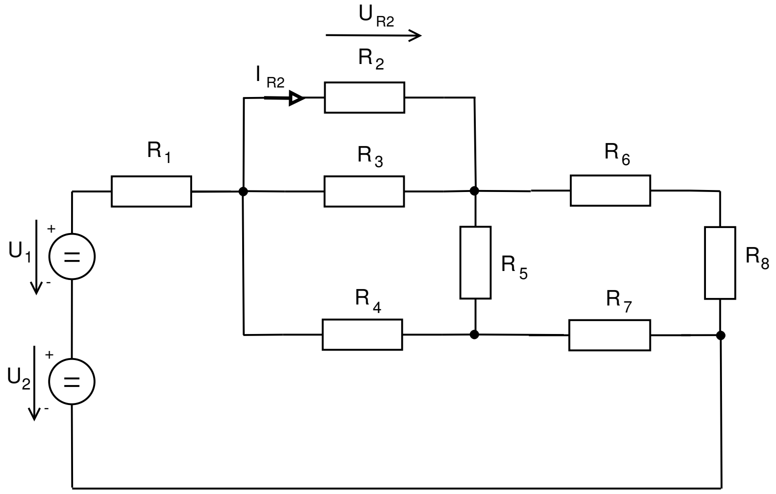
5 Příklad 5 14

6 Shrnutí výsledků 16

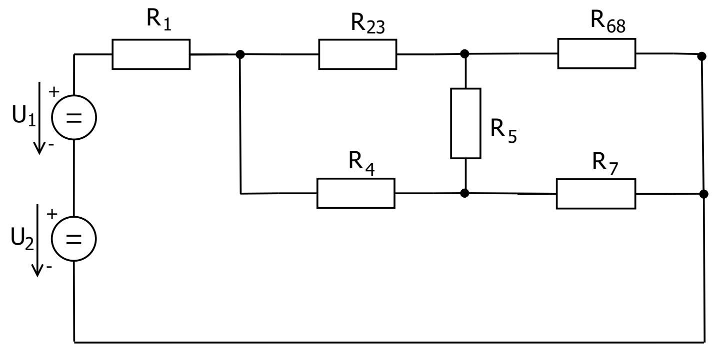
Příklad 1

Stanovte napětí U_{R2} a proud I_{R2}. Použijte metodu postupného zjednodušování obvodu.

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]	R_7 [Ω]	R_8 [Ω]
A	80	120	350	650	410	130	360	750	310	190

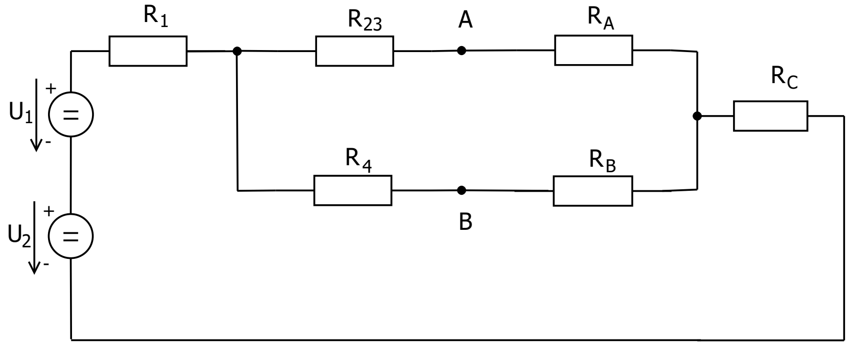


Řešení (metoda postupného zjednodušování):



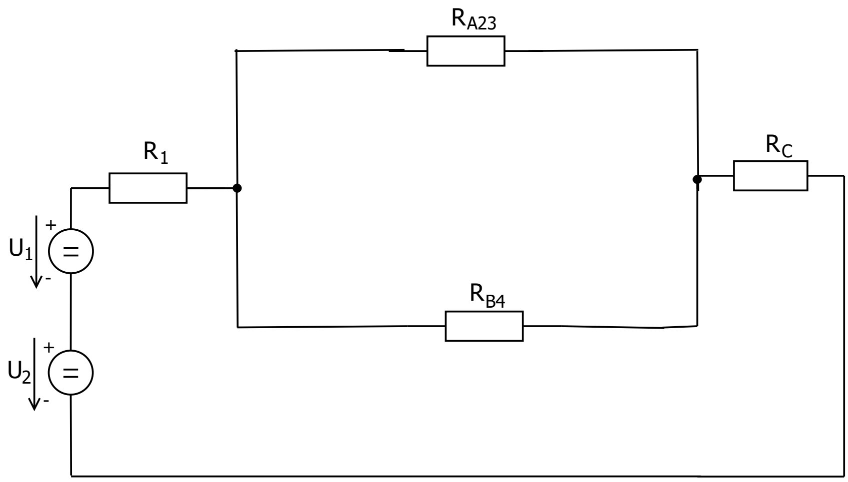
Obrázek 1: R_B a R_4 jsou zapojeny paralelně a R_6 a R_8 jsou zapojeny sériově

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{650 \cdot 410}{650 + 410} \doteq 251.415\Omega$$
$$R_{68} = R_6 + R_8 = 750 + 190 = 940\Omega$$



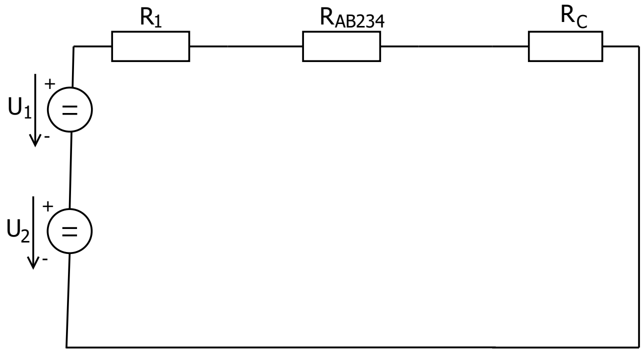
Obrázek 2: Transfigurace - trojúhelník $\rightarrow$ hvězda

$$R_A = \frac{R_5 R_{68}}{R_5 + R_{68} + R_7} = \frac{360 \cdot 940}{360 + 940 + 310} \doteq 210.186\Omega$$
$$R_B = \frac{R_5 R_7}{R_5 + R_{68} + R_7} = \frac{360 \cdot 310}{360 + 940 + 310} \doteq 69.317\Omega$$
$$R_C = \frac{R_{68} R_7}{R_5 + R_{68} + R_7} = \frac{940 \cdot 310}{360 + 940 + 310} \doteq 180.994\Omega$$



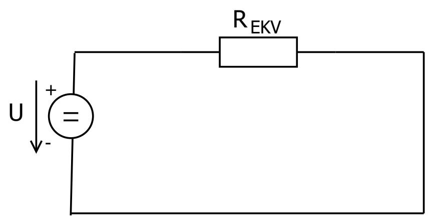
Obrázek 3: R_A a R_{23} jsou zapojeny sériově stejně jako R_B a R_4

$$R_{A23} = R_A + R_{23} = 210.186 + 251.415 \doteq 461.601\Omega$$
$$R_{B4} = R_B + R_4 = 69.317 + 130 \doteq 199.317\Omega$$



Obrázek 4: $R_{A_{23}}$ a R_{B_4} jsou zapojeny paralelně

$$R_{A_{23}B_4} = \frac{R_{A_{23}}R_{B_4}}{R_{A_{23}} + R_{B_4}} = \frac{461.601 \cdot 199.317}{461.601 + 199.317} \doteq 139.208\Omega$$



Obrázek 5: U_1 a U_2 jsou zapojeny sériově a R_1 a $R_{AB_{234}}$ a R_C jsou zapojeny sériově – získáváme R_{EKV}

$$U = U_1 + U_2 = 80 + 120 = 200\text{V}$$
$$R_{EKV} = R_1 + R_{AB_{234}+R_C} = 350 + 139.208 + 180.994 = 670.202\Omega$$

Dopočítame celkový proud I, $U_{R_{BC234}}$ a I_{C23} :

$$I = \frac{U}{R_{EKV}} = \frac{200}{670.202} \doteq 298.417\text{mA}$$
$$U_{R_{BC234}} = IR_{BC234} = 0.298417 \cdot 139.23 = 41.548\text{V}$$
$$I_{C23} = \frac{U_{23}}{R_{C23}} = \frac{41.548}{461.61} = 90\text{mA}$$

Teď můžeme zpětně dopočítat $\boldsymbol{U_{R_2}}$ a $\boldsymbol{I_{R_2}}$:

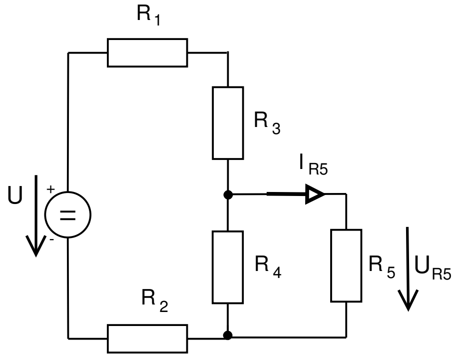
$$I_{23} = I_{C_{23}}$$
$$U_{23} = U_2 = U_3$$

$$\boldsymbol{U_2} = I_{23}R_{23} = 0.09 \cdot 251,42 = \mathbf{22.628V}$$
$$\boldsymbol{I_2} = \frac{U_2}{R_2} = \frac{22.628}{650} \doteq \mathbf{34.812mA}$$

Příklad 2

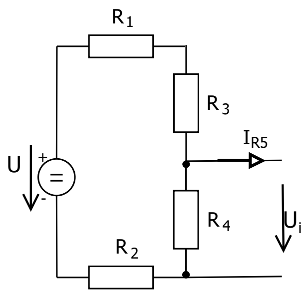
Stanovte napětí U_{R5} a proud I_{R5}. Použijte metodu Théveninovy věty.

sk.	U [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
E	250	150	335	625	245	600



Řešení (Théveninova věta):

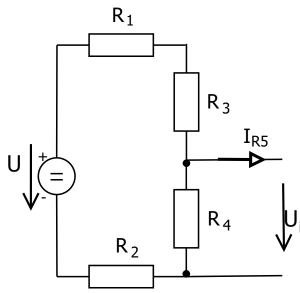
Vypočítáme $\boldsymbol{R_i}$:



Obrázek 6: bez R_5, napěťový zdroj zkratujeme

$$R_i = \frac{R_4(R_1 + R_2 + R_3)}{R_4 + (R_1 + R_2 + R_3)} = \frac{245 \cdot (150 + 335 + 625)}{245 + (150 + 335 + 625)} \doteq 200.701\Omega$$

Vypočítáme $\boldsymbol{U_i}$:



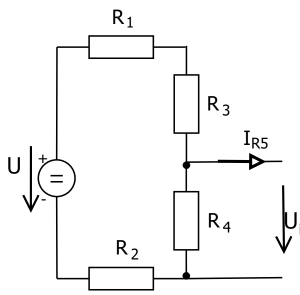
Obrázek 7: Vypočítám I :

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} 150 + 335 + 625 + 245 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Používám Cramerova pravidla pro vypočet I:

$$I = \frac{U}{R_i} = \frac{250}{1355} \doteq 184.501\text{mA}$$
$$U_i \equiv U_{R_4} = I_{R4} = 245 \cdot 0.184501 = 45.203\text{V}$$



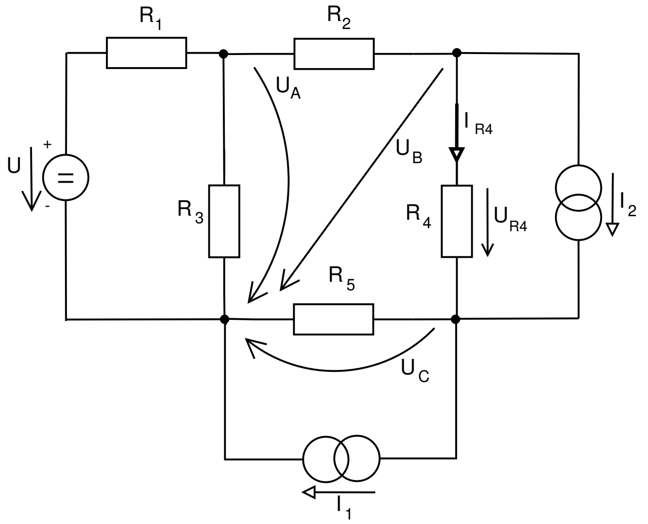
Obrázek 8: ekvivaletní obvod

$$\boldsymbol{I_{R_5}} = \frac{U_i}{R_i + R_5} = \frac{45.203}{200.701 + 600} \doteq \mathbf{56.454mA}$$
$$\boldsymbol{U_{R_5}} = I_{R_5} R_5 = 0.056454 \cdot 600 \doteq \mathbf{33.873V}$$

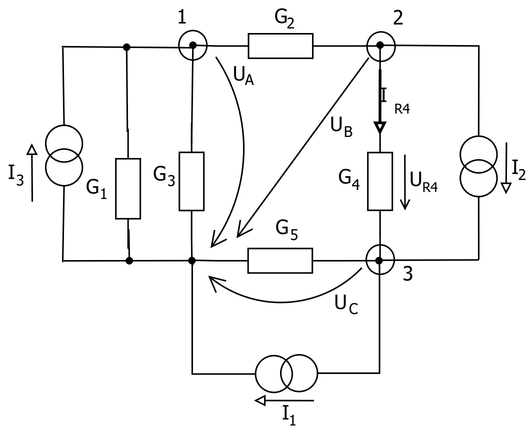
Příklad 3

Stanovte napětí U_{R4} a proud I_{R4}. Použijte metodu uzlových napětí (U_A, U_B, U_C).

sk.	U [V]	I_1 [A]	I_2 [A]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
B	150	0.7	0.8	49	45	61	34	34



Řešení (metoda uzlových napětí):



Obrázek 9: přepočítáme napětový zdroj U na proudový zdroj I_3 a očíslujeme nezávislé uzly, které definují neznámá uzlová napětí

$$G_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{49}\mathrm{S}$$
$$G_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{45}\mathrm{S}$$
$$G_3 = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{61}\mathrm{S}$$
$$G_4 = \frac{1}{R_4} = \frac{1}{34}\mathrm{S}$$
$$G_5 = \frac{1}{R_5} = \frac{1}{34}\mathrm{S}$$
$$I_3 = \frac{U}{R_1} = \frac{150}{49} = \frac{150}{49}\mathrm{A}$$

Sestavíme rovnice pro nezávislé uzly:

$$1)\ -I_3 - G_1U_A - G_3U_A - G_2(U_A - U_B) = 0$$
$$2)\ -I_2 + G_2(U_A - U_B) - G_4(U_B - U_C) = 0$$
$$3)\ I_2 - I_1 + G_4(U_B - U_C) + G_5U_C = 0$$

Rovnice upravíme:

$$1)\ U_A(G_1 + G_2 + G_3) - U_BG_2 = I_3$$
$$2)\ U_B(-G_2 - G_4) + G_4U_C = I_2$$
$$3)\ U_C(-G_4 - G_5) + G_4U_B = I_2 - I_1$$

Přepíšeme rovnice do maticového tvaru:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & -G_2 & 0 \\ G_2 & -G_2 - G_4 & G_4 \\ 0 & G_4 & -G_4 - G_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 \\ I_2 \\ I_1 - I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{7939}{134505} & -\frac{1}{45} & 0 \\ \frac{1}{45} & -\frac{79}{1530} & \frac{1}{34} \\ 0 & \frac{1}{34} & -\frac{1}{17} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{150}{49} \\ \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

Vypočítáme determinanty Sarrusovoým pravidlem:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{7939}{134505} & -\frac{1}{45} & 0 \\ \frac{1}{45} & -\frac{79}{1530} & \frac{1}{34} \\ 0 & \frac{1}{34} & -\frac{1}{17} \end{vmatrix} = \frac{907}{9146340}$$
$$\Delta_B = \begin{vmatrix} \frac{7939}{134505} & -\frac{1}{45} & \frac{150}{49} \\ \frac{1}{45} & -\frac{79}{1530} & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{1}{34} & -\frac{1}{10} \end{vmatrix} = 0,000867385$$
$$\Delta_C = \begin{vmatrix} \frac{7939}{134505} & \frac{150}{49} & 0 \\ \frac{1}{45} & \frac{4}{5} & \frac{1}{34} \\ 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{17} \end{vmatrix} = 0,00139761$$

Použitím Cramerova pravidla vypočítáme U_B a U_C:

$$U_B = \frac{\Delta_B}{\Delta} = 0.000867385 : \frac{907}{9146340} \doteq 8.747\text{V}$$
$$U_C = \frac{\Delta_C}{\Delta} = 0.00139761 : \frac{907}{9146340} \doteq 14.094\text{V}$$

Vypočítáme $\boldsymbol{U_{R_4}}$ a $\boldsymbol{I_{R_4}}$:

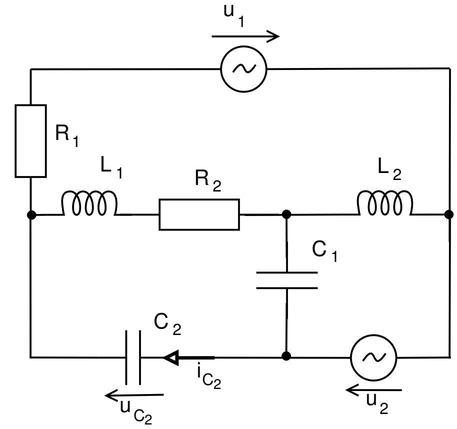
$$\boldsymbol{U_{R_4}} = U_C - U_B = 14.094 - 8.747 = \mathbf{5.347V}$$
$$\boldsymbol{I_{R_4}} = \frac{U_{R_4}}{R_4} = \frac{5.347}{34} \doteq \mathbf{157.264mA}$$

Příklad 4

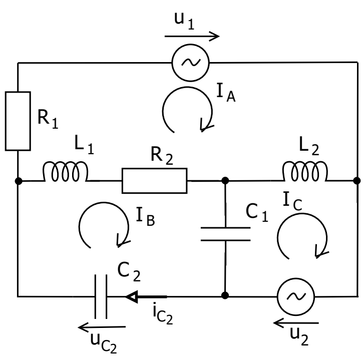
Pro napájecí napětí platí: $u_1 = U_1 \cdot \sin(2\pi f t)$, $u_2 = U_2 \cdot \sin(2\pi f t)$.
Ve vztahu pro napětí $u_{C_2} = U_{C_2} \cdot \sin(2\pi f t + \varphi_{C_2})$ určete $|U_{C_2}|$ a φ_{C_2}. Použijte metodu smyčkových proudů.

Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ($t = \frac{\pi}{2\omega}$).

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	L_1 [mH]	L_2 [mH]	C_1 [µF]	C_2 [µF]	f [Hz]
A	3	5	12	14	120	100	200	105	70



Řešení (metoda smyčkových proudů):



Vyjádříme si úhlovou frekvenci ω:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi 70 = 140\pi \text{ rad/s}$$

Sestavíme maticovou rovnici pro smyčky I_A, I_B a I_C:

$$\begin{bmatrix} R_1 + \omega L_2 i + R_2 + \omega L_1 i & -R_2 - \omega L_1 i & -\omega L_2 i \\ -\omega L_1 i - R_2 & \omega L_1 i + R_2 - \frac{1}{\omega C_1} i - \frac{1}{\omega C_2} i & \frac{1}{\omega C_1} i \\ -\omega L_2 i & \frac{1}{\omega C_1} i & \omega L_2 i - \frac{1}{\omega C_1} i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ 0 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 26 + \frac{154}{5}\pi i & -14 - \frac{84}{5}\pi i & -14\pi i \\ -14 - \frac{84}{5}\pi i & 14 + 19.756813 i & \frac{1}{87920} i \\ -14\pi i & \frac{1}{87920} i & 43959.999 i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Z této rovnice po řešení Cramerovým pravidlem (s výpočtem determinantů Sarrusovým pravidlem) vychází:

$$\Delta \doteq -17143296.915 - 74200178.048 i$$
$$\Delta_2 \doteq -6968528.493 + 1849400 i$$
$$I_B \equiv I_{C_2} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-6968528.493 + 1849400 i}{-17143296.915 - 74200178.048 i} \doteq 0.04 - 0.025 i \text{A}$$

Vypočítáme napětí U_{C_2}:

$$X_{C_2} = -\frac{1}{\omega C_2} i = -\frac{1}{140\pi \cdot 105 \cdot 10^{-6}} i \doteq -21.665 i \Omega$$
$$U_{C_2} = I_{C_2} X_{C_2} = (0.04 - 0.025 i) \cdot (-21.665 i) \doteq -0.541625 - 0.8666 i \text{V}$$

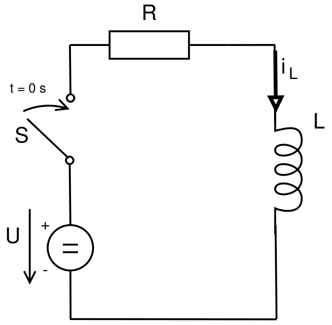
Vypočítáme $|\boldsymbol{U_{C_2}}|$ a $\boldsymbol{\varphi_{C_2}}$:

$$|\boldsymbol{U_{C_2}}| = \sqrt{\text{Re}(U_{C_2})^2 + \text{Im}(U_{C_2})^2} = \sqrt{(-0.541625)^2 + (-0.866)^2} \doteq \mathbf{1.02V}$$
$$\boldsymbol{\varphi_{C_2}} = \arctan \frac{\text{Im}(U_{C_2})}{\text{Re}(U_{C_2})} = \arctan \frac{-0.866}{-0.54162} \doteq \mathbf{1.0122rad}$$

Příklad 5

V obvodu na obrázku níže v čase $t = 0$ [s] sepne spínač S. Sestavte diferenciální rovnici popisující chování obvodu na obrázku, dále ji upravte dosazením hodnot parametrů. Vypočítejte analytické řešení $i_L = f(t)$. Proveďte kontrolu výpočtu dosazením do sestavené diferenciální rovnice.

sk.	U [V]	L [H]	R [Ω]	$i_L(0)$ [A]
E	50	30	40	10



Řešení (sestavení diferenciální rovnice popisující chování obvodu a výpočet analytického řešení $i_L = f(t)$):

Sestavíme rovnici pro i'_L:

$$i'_L = \frac{U_L}{L}$$

Napětí na cívce U_L vyjádříme z rovnice, která platí podle II. Kirchhoffova zákona:

$$U_R + U_L - U = 0$$
$$U_L = U - U_R$$

Dosadíme U_L do rovnice pro i'_L:

$$i'_L = \frac{U - U_R}{L}$$

Po úpravě a dosazení do rovnice dostáváme diferenciální rovnici popisující chování tohoto obvodu:

$$i'_L = \frac{U - Ri_L}{L}$$
$$Li'_L + Ri_L = U$$
$$\boldsymbol{30i'_L + 40i_L = 50}$$

Pro vyřešení diferenciální rovnice vyřešíme charakteristickou rovnici:

$$30\alpha + 40 = 0$$
$$\alpha = -\frac{40}{30} = -\frac{4}{3}$$

Dosadíme α do očekávaného tvaru řešení:

$$i_L(t) = C(t) \cdot e^{\alpha t}$$
$$i_L(t) = C(t) \cdot e^{-\frac{4}{3}t}$$
$$i_L(t)' = C(t)' \cdot e^{-\frac{4}{3}t} - \frac{4}{3}C(t) \cdot e^{-\frac{4}{3}t}$$

Dosadíme i'_L do diferenciální rovnice:

$$30(C(t)' \cdot e^{-\frac{4}{3}t} - \frac{4}{3}C(t) \cdot e^{-\frac{4}{3}t}) + 40C(t) \cdot e^{-\frac{4}{3}t} = 50$$
$$30C(t)' \cdot e^{-\frac{4}{3}t} - 40C(t) \cdot e^{-\frac{4}{3}t} + 40C(t) \cdot e^{-\frac{4}{3}t} = 50$$
$$30C(t)' \cdot e^{-\frac{4}{3}t} = 50$$
$$C(t)' = \frac{5}{5} \cdot e^{\frac{4}{3}t}$$
$$C(t) = \int \frac{5}{3} \cdot e^{\frac{4}{3}t} dt = \frac{5}{4} \cdot e^{\frac{4}{3}t} + K$$

Dosadíme $C(t)$ do očekávaného tvaru řešení:

$$i_L(t) = (\frac{5}{4} \cdot e^{\frac{4}{3}t} + K) \cdot e^{-\frac{4}{3}t} = \frac{5}{4} + K \cdot e^{-\frac{4}{3}t}$$

Vypočítáme K podle počáteční podmínky $i_L(0) = 10\text{A}$:

$$i_L(0) = \frac{5}{4} + K \cdot e^{-\frac{4}{3} \cdot 0}$$
$$10 = \frac{5}{4} + K$$
$$K = \frac{35}{4}$$

Dosadíme K do očekávaného tvaru řešení a dostaneme výsledné i_L:

$$i_L = \frac{5}{4} + \frac{35}{4} \cdot e^{-\frac{4}{3}t}$$
$$\boldsymbol{i_L = \frac{5}{4} + \frac{35}{4} \cdot e^{-\frac{4}{3}t}\mathbf{A}}$$

Provedeme kontrolu výsledku

První podmínka platí, protože řešení odpovídá počáteční podmínce:

$$i_L(0) = 10\text{A}$$

Druhou podmínku ověříme dosazením do sestavené diferenciální rovnice, jejíž výsledek musí vyjít 75V:

$$U = 50i'_L + 25i_L$$
$$i'_L = (\frac{5}{4})' = 0$$
$$U = 30 \cdot 0 + 40 \cdot \frac{5}{4} = 50\text{V}$$

Shrnutí výsledků

Příklad	Skupina	Výsledky	
1	A	$U_{R2} = 22.628\mathbf{V}$	$I_{R2} = 34.812\mathbf{mA}$
2	E	$U_{R5} = 33.873\mathbf{V}$	$I_{R5} = 56.454\mathbf{mA}$
3	B	$U_{R4} = 5.347\mathbf{V}$	$I_{R4} = 157.264\mathbf{mA}$
4	A	$\lvert U_{C_2}\rvert = 1.02\mathbf{V}$	$\varphi_{C_2} = 1.0122\mathbf{rad}$
5	E	$i_L = \frac{5}{4} + \frac{35}{4} \cdot e^{-\frac{4}{3}t}\mathbf{A}$	