Разбор нулевика к контрольной работе по теории вероятностей

2019-2020 учебный год

№ 1

Задание: У рыбака имеется три излюбленных места для ловли рыбы, каждое из которых он посещает с равной вероятностью. Если он закидывает удочку на первом месте, рыба клюёт с вероятностью 0,8; на втором месте – с вероятностью 0,7; на третьем – с вероятностью 0,6. Известно, что рыбак, выйдя на ловлю рыбы, три раза закинул удочку, и рыба клюнула только один раз. Найти вероятность того, что он удил рыбу на первом месте.
Решение:
Определим события:
$H_i = \{\text{рыбак был в } i\text{-м месте}\}$
$A = \{\text{рыбак поймал рыбу}\}$
$B = \{\text{при трех закидываниях удочки рыбак поймал только одну рыбу}\}$
Из условия известны следующие вероятности:
$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \dfrac{1}{3}$
$P(A/H_1) = 0{,}8$
$P(A/H_2) = 0{,}7$
$P(A/H_3) = 0{,}6$
Посчитаем вероятности $P(B/H_i)$. Они вычисляются по формуле Бернулли, если считать, что удочка закидывалась три раза, и только один раз был удачным (рыба поймалась):
$P(B/H_1) = C_3^1 \cdot 0{,}8 \cdot (1 - 0{,}8)^2 = 0{,}096$
$P(B/H_2) = C_3^1 \cdot 0{,}7 \cdot (1 - 0{,}7)^2 = 0{,}189$
$P(B/H_3) = C_3^1 \cdot 0{,}6 \cdot (1 - 0{,}6)^2 = 0{,}288$
Теперь можно посчитать $P(B)$ по формуле полной вероятности:
$P(B) = \dfrac{1}{3} \cdot 0{,}096 + \dfrac{1}{3} \cdot 0{,}189 + \dfrac{1}{3} \cdot 0{,}288 = 0{,}191$
Зная полную вероятность, можно посчитать апостериорную вероятность события H_1, то есть вероятность того, что рыбак удил рыбу на первом месте, учитывая, что из трех попыток поймать рыбу, успешной была лишь одна.
$P(H_1/B) = \dfrac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}096}{0{,}191} = 0{,}1675$

Ответ: 0,1675.

№ 2

Задание: При одном цикле обзора радиолокационной станции объект обнаруживается с вероятностью 0,85. Обнаружение объекта в каждом цикле достигается независимо от других циклов. Какое минимальное число циклов надо осуществить, чтобы вероятность обнаружения объекта была не меньше, чем 0,999?

Решение:
Данная ситуация описывается схемой Бернулли (независимые события, двоичный исход каждого, вероятность не меняется). Вероятность успеха каждого события по условию равна
$P(A) = 0{,}85$.
Пусть было осуществлено n циклов. Тогда необходимо найти минимальное n, удовлетворяющее условию. Чтобы посчитать вероятность обнаружения объекта хотя бы в одном цикле, легче посчитать вероятность необнаружения объекта ни в одном цикле и вычесть ее из 1.
Так как было проведено n испытаний (n циклов), то вероятность необнаружения объекта равна $C_n^0 \cdot 0{,}85^0 \cdot (1 - 0{,}85)^n = 0{,}15^n$. Тогда вероятность обнаружения объекта равна $1 - 0{,}15^n$. Из условия получается следущее неравенство:
$1 - 0{,}15^n \geq 0{,}999$
$0{,}15^n \leq 0{,}001$
$n \geq 4$
Отсюда следует, что минимальное подходящее $n = 4$
Ответ: 4.

№ 3

Задание: Аппаратура, состоящая из 1000 элементов, функционирует нормально до тех пор, пока число отказавших элементов не превысит двух. Каждый элемент независимо от других элементов в течение времени T работает безотказно с вероятностью 0.998. Какова вероятность того, что система в целом проработает время T? Пусть случайная величина ξ – количество элементов, отказавших в течении времени T. Найдите математическое ожидание и 0.6-квантиль случайной величины ξ.
Решение:
Во второй части задания определена СВ ξ, но удобно ее использовать и в первой части.
$\xi = \{$количество элементов, отказавших в течении времени T$\}$.
Она описывается биномиальным распределением. Так как вероятность безотказной работы равна 0,998, то вероятность поломки одного элемента в течение времени T равна 0,002. Таким образом, получаем:
$\xi \sim Bi(1000; 0{,}002)$
Так как вероятность маленькая, а количество деталей большое, то можно сказать, что ξ описывается распределением Пуассона с $\lambda = 1000 \cdot 0{,}002 = 2$, то есть:
$\xi \sim \Pi(2)$
Чтобы система работала безотказно, нужно, чтобы не сломалась ни одна деталь, или чтобы сломалась ровно одна деталь, или чтобы сломалось ровно две детали. То есть вероятность безотказной работы системы – это сумма вероятности работы без сломанных деталей, вероятности работы с одной сломанной деталью и вероятности работы с двумя сломанными деталями:

$$P = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = \frac{2^0 e^{-2}}{1} + \frac{2^1 e^{-2}}{1} + \frac{2^2 e^{-2}}{2} = \frac{5}{e^2} = 0{,}68$$

Математическое ожидание найдем по формуле математического ожидания распределения Пуассона:
$E\xi = \lambda = 2$
Число $z_{0,6}$ – это такое число, что выполняется $P(\xi \leq z_{0,6}) = 0{,}6$.
Так как ξ – дискретная СВ, рассмотрим все $F(k)$ от k, начиная с нуля, пока $F(k)$ не превзойдет 0,6:
$P(\xi = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \dfrac{e^{-2}2^k}{k!}$ – общая формула

$P(\xi = 0) = e^{-2} = 0{,}135$
$F(0) = 0{,}135$

$P(\xi = 1) = 2e^{-2} = 0{,}27$
$F(1) = 0{,}136 + 0{,}272 = 0{,}405$
$P(\xi = 2) = 2e^{-2} = 0{,}27$
$F(2) = 0{,}408 + 0{,}272 = 0{,}675$
Значит, $z_{0,6} = 2$
Ответ: Вероятность равна 0,68; математическое ожидание равно 2; квантиль равен 2.

№ 4

Задание: Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2), \text{ если } |x| \le 1 \\ \quad 0 \qquad , \text{ если } |x| > 1 \end{cases}$$

Найти константу c, функцию распределения случайной величины ξ, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\nu = -5\xi + 4$, вычислить вероятность $P(|\xi - 0{,}5| \le 0{,}25)$.
Решение:
По свойствам плотности распределения:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Исходя из этого свойства, найдем константу c :

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} c(1-x^2)dx = c\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)dx = c\left(\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}\right) = c(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}) = c \cdot \frac{4}{3} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{3}{4}$$

По определению плотность определения – это такая функция $f(x)$, что $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Значит, чтобы найти функцию распределения, надо просто взять интеграл от посчитанной выше плотности распределения:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2), \text{ если } |x| \le 1 \\ \quad 0 \qquad , \text{ если } |x| > 1 \end{cases}$$

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0 \qquad , \text{ если } x \le -1 \\ \dfrac{-x^3 + 3x + 2}{4} \quad , \text{ если } -1 < x \le 1 \circledast \\ \displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{3}{4}(1-x^2)dt = 1, \text{ если } x > 1 \end{cases}$$

$\circledast$подсчеты: $\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-1}^{x}\left(\frac{3}{4}(1-x^2)\right)dt = \frac{3}{4}\left(\left(t - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{x}\right) = \frac{3}{4}\left(x + 1 - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{-x^3 + 3x + 2}{4}$

Вспомнив свойства математического ожидания, посчитаем его от СВ ν :

$$E\nu = E(-5\xi + 4) = -5E\xi + 4 = -5\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + 4 = -5\frac{3}{4}\int\limits_{-1}^{1}(x - x^3)dx + 4 =$$

$$= -\frac{15}{4}\left(\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{1}\right) + 4 = 4$$

Так же вспоминая свойства дисперсии, посчитаем и ее от ν :
$D\nu = D(-5\xi + 4) = D(-5\xi) + D4 + cov(-5\xi, 4) = D(-5\xi) = 25D(\xi) = 25(E\xi^2 - (E\xi)^2)$
Если посмотреть выше, то $E\xi$ уже посчитано и равно 0. Тогда остается только посчитать $E\xi^2$:

$$D\nu = 25E\xi^2 = 25\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = 25\int\limits_{-1}^{1} x^2\frac{3}{4}(1-x^2)dx = \frac{25\cdot 3}{4}\int\limits_{-1}^{1}(x^2-x^4)dx =$$

$$= \frac{25\cdot 3}{4}\left(\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1}\right) = \frac{25\cdot 3}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = \frac{25\cdot 3}{4}\cdot\frac{4}{15} = 5$$

Осталось только посчитать вероятность:

$$P(|\xi-0{,}5|\le 0{,}25) = P(0{,}25\le\xi\le 0{,}75) = \int\limits_{0{,}25}^{0{,}75} f(x)dx = \frac{3}{4}\int\limits_{0{,}25}^{0{,}75}(1-x^2)dx = \frac{3}{4}\left(\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{0{,}25}^{0{,}75}\right) =$$

$$= \frac{3}{4}\left(0{,}75-\frac{0{,}75^3}{3}-0{,}25+\frac{0{,}25^3}{3}\right) = 0{,}2735$$

Ответ: $c = \dfrac{3}{4}$;

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, если } x\le -1 \\ \dfrac{-x^3+3x+2}{4} & \text{, если } -1<x\le 1 \\ 1 & \text{, если } x>1 \end{cases};$$

$E\nu = 4$; $D\nu = 5$; $P(|\xi-0{,}5|\le 0{,}25) = 0{,}2735$

№ 5

Задание: Станок-автомат изготавливает валики. Контролируется диаметр валика ξ, удовлетворительно описываемый гауссовским законом распределения со средним значением 10 мм. Чему равно среднеквадратическое отклонение диаметра валика, если с вероятностью 0,99 диаметр заключён в интервале (9,7; 10,3). Найдите 0,99-квантиль СВ ξ.

Решение:

$\xi \sim N(10,\sigma^2)$ – диаметр валика

Из условия известно, что $P(9{,}7<\xi<10{,}3) = 0{,}99$. Найдем из этого условия среднеквадратическое отклонение:

$$P(9{,}7<\xi<10{,}3) = \Phi_0\left(\frac{10{,}3-10}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{9{,}7-10}{\sigma}\right) = \Phi_0\left(\frac{0{,}3}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{-0{,}3}{\sigma}\right) =$$

$$= 2\Phi_0\left(\frac{0{,}3}{\sigma}\right) = 0{,}99$$

$$\Phi_0\left(\frac{0{,}3}{\sigma}\right) = 0{,}495$$

В таблице найдем наиболее близкое к 0,495 значение и посмотрим, от какого числа была взята функция Лапласа с таким значением:

$$\frac{0{,}3}{\sigma} = 2{,}58$$

$\sigma = 0{,}116$

Найдем квантиль $z_{0{,}99}$. Это такое число, что $F(z_{0{,}99}) = 0{,}99$. Тогда найдем это число:

$$F(z_{0{,}99}) = \int\limits_{-\infty}^{z_{0{,}99}} f(x)dx = \Phi_0\left(\frac{z_{0{,}99}-10}{0{,}116}\right) - \Phi_0(-\infty) = \Phi_0\left(\frac{z_{0{,}99}-10}{0{,}116}\right) + 0{,}5 = 0{,}99$$

$$\Phi_0\left(\frac{z_{0{,}99}-10}{0{,}116}\right) = 0{,}49$$

$\dfrac{z_{0{,}99}-10}{0{,}116} = 2{,}33 \leftarrow$ посмотрели в таблице подходящее число и подставили сюда

$z_{0{,}99} - 10 = 0{,}27$

$z_{0,99} = 10{,}27$
<u>Ответ:</u> $\sigma = 0{,}116$ мм; $z_{0,99} = 10{,}27$