ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Σύντομη Εισαγωγή στα

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Σημειώσεις παραδόσεων του 2ου μέρους του μαθήματος
«*Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά*» (υποχρεωτικό, 3ου εξαμήνου)

ΑΝΑΠΛ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ **ΜΠΟΥΤΣΙΚΑΣ ΜΙΧΑΗΛ,** ΠΕΙΡΑΙΑΣ 2016-17

Περιεχόμενα

Σκοπός των συγκεκριμένων σημειώσεων είναι η σύντομη εισαγωγή στις βασικές έννοιες των χρηματοοικονομικών μαθηματικών ώστε να είναι δυνατή μια πρώτη στοχαστική μοντελοποίηση μιας χρηματοοικονομικής αγοράς και η εξαγωγή συμπερασμάτων που αφορούν μια αγορά σε κατάσταση ισορροπίας (No-Arbitrage).

1 Χρηματοοικονομική αγορά

1.1 Χρηματοοικονομική αγορά και τίτλοι

Χρηματιστηριακός τίτλος (*ή Αξιόγραφο*) είναι ένα μεταβιβάσιμο (φυσικό ή αποϋλοποιημένο) έγγραφο το οποίο εξασφαλίζει συγκεκριμένα δικαιώματα στον κάτοχό του, και ως συνέπεια ενσωματώνει μια συγκεκριμένη αξία.

Χρηματοοικονομική αγορά ή απλώς *αγορά* καλείται ένα σύνολο κ χρηματιστηριακών τίτλων οι οποίοι είναι διαπραγματεύσιμοι από ένα σύνολο επενδυτών μέσα σε ένα χρονικό διάστημα $[0, T]$. Ο χρόνος t θα μετράται σε έτη (δηλ. αν $t = 1$ τότε $t =$ ένα έτος) και μπορεί να είτε διακριτός ($t = 0, h, 2h, \ldots, nh = T$) είτε συνεχής ($t \in [0, T]$).

Συμβολίζουμε με Ω το σύνολο των δυνατών καταστάσεων (των τιμών των τίτλων) της αγοράς. Μια κατάσταση $\omega \in \Omega$ περιγράφει την κατάσταση της αγοράς (δηλ. τις τιμές των τίτλων) σε όλους τους χρόνους $0, h, 2h, \ldots, nh$ ή σε όλο το χρονικό διάστημα $[0, T]$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{F}$ το σύνολο ενδεχομένων του Ω (αν το Ω είναι πεπερασμένο, συνήθως θεωρούμε $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, το δυναμοσύνολο του Ω, δηλαδή το $\mathcal{F}$ αποτελείται από όλα τα υποσύνολα του Ω). Επίσης θεωρούμε και ένα μέτρο πιθανότητας P το οποίο αντιστοιχεί μια πιθανότητα σε κάθε ενδεχόμενο ($A \to P(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{F}$) .

Στο εξής θα αναφέρουμε ότι ένας επενδυτής (με την ευρεία έννοια) έχει λάβει:

- *long position* σε ένα τίτλο, όταν έχει λάβει μια θέση που αποφέρει *κέρδος με την αύξηση της τιμής του τίτλου* και ζημία με τη μείωσή του.
- *short position* σε ένα τίτλο όταν έχει λάβει μια θέση που αποφέρει *ζημία με την αύξηση της τιμής του τίτλου* και κέρδος με τη μείωσή του.

Υποθέτουμε απλουστευτικά ότι:

- Στην αγορά δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών (transaction costs), ενώ όλα τα κέρδη δεν φορολογούνται ή φορολογούνται με τον ίδιο τρόπο (ίδιο φορολογικό συντελεστή).
- Οι συναλλασσόμενοι δρουν λογικά, σύμφωνα με τις προσδοκίες τους, και προσπαθούν να εκμεταλλευτούν οποιαδήποτε ευκαιρία για σίγουρο κέρδος εμφανίζεται.

Υπάρχουν πολλά είδη χρηματιστηριακών τίτλων, στην συνέχεια όμως αρκεί να κατηγοριοποιηθούν σε τρία είδη: *Ομόλογα*, *Μετοχές*, *Παράγωγα*.

1.2 Ομόλογα χωρίς κίνδυνο (Bonds, Riskless Assets).

Για απλότητα θεωρούμε μόνο ένα είδος ομολόγου. Ο εκδότης ομολόγου (δανειζόμενος) δανείζεται για κάποιο χρονικό διάστημα από τον αγοραστή του ομολόγου (δανειστής) κάποιο χρηματικό ποσό, έστω A. Μετά από χρόνο t ο δανειζόμενος επιστρέφει στον δανειστή του το ποσό A, συν τον προβλεπόμενο τόκο, $A \cdot r \cdot t$ (θεωρώντας ετήσιο επιτόκιο r), δηλαδή επιστρέφει ποσό

$$A(1 + r \cdot t).$$

Αν θεωρήσουμε n ανατοκιστικές περιόδους ανά έτος τότε ο δανειζόμενος πρέπει να επιτρέψει μετά από χρόνο $t = k/n$ (δηλ. μετά από k περιόδους) ποσό

$$A\left(1 + r \cdot \frac{1}{n}\right)^{k} = A\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Αν $n \to \infty$ τότε η παραπάνω ποσότητα συγκλίνει στο Ae^{rt}. Στη συνέχεια θα θεωρούμε ότι το επιτόκιο r είναι ονομαστικό ετήσιο, *με συνεχή ανατοκισμό*, και επομένως στο χρόνο t η αξία ενός ομολόγου (επί μιας χρηματικής μονάδας) θα είναι

$$B_t = e^{rt}, \qquad t \in [0, T].$$

Η μελλοντική αξία ενός ομολόγου θεωρείται σήμερα γνωστή (είναι ντετερμινιστική συνάρτηση η οποία δίνεται από τον παραπάνω τύπο) και επομένως το ομόλογο είναι χωρίς κίνδυνο (Riskless). Κάνουμε δηλαδή την παραδοχή ότι ο εκδότης του (δανειζόμενος) εκπληρώνει πάντοτε τις υποχρεώσεις του (δεν υπάρχει ενδεχόμενο χρεοκοπίας). Για παράδειγμα, στην πράξη το r μπορεί να είναι το επιτόκιο Euribor με το οποίο μπορούν να δανείζονται μεταξύ τους οι τράπεζες της Ευρωζώνης για ορισμένη χρονική διάρκεια, χωρίς κίνδυνο.

1.3 Μετοχές (Stocks, Shares, Risky Asset).

Μετοχή είναι ένα μερίδιο του κεφαλαίου μιας ανώνυμης εταιρείας. Οι κάτοχοι μετοχών συνήθως δεν αρκούνται στα μερίσματα (διανομή κερδών της ΑΕ) αλλά π.χ. αν πιστεύουν ότι η τιμή μιας μετοχής θα υποχωρήσει, προσπαθούν να τις πωλήσουν. Αντίθετα, μπορεί να υπάρχουν άλλοι επενδυτές που προσδοκούν άνοδο και επιθυμούν να τις αγοράσουν. Με αυτόν τον τρόπο διαμορφώνεται μια (χρηματιστηριακή) τιμή της μετοχής όπου η προσφορά και η ζήτηση ισορροπούν κάθε δεδομένη χρονική στιγμή. Στην συνέχεια, για απλότητα, θα θεωρούμε μετοχές οι οποίες δεν προσφέρουν μέρισμα στο χρονικό διάστημα $[0, T]$.

Στο εξής ως τιμή ή χρηματική αξία της μετοχής θα θεωρείται η τρέχουσα *χρηματιστηριακή τιμή* της η οποία όπως είπαμε διαμορφώνεται στην αγορά μέσω της προσφοράς και της ζήτησης. Επομένως η μελλοντική αξία μιας μετοχής δεν είναι σήμερα γνωστή, αλλά θεωρείται τυχαία μεταβλητή. Συμβολίζουμε με S_t την αξία μιας μετοχής M στο χρόνο t. Αν ο χρόνος είναι διακριτός ή συνεχής τότε οι τιμές μιας μετοχής στο χρονικό διάστημα $[0, T]$ αντίστοιχα είναι

$$S = \{S_0, S_h, S_{2h}, \dots, S_T\}, \; h = \frac{T}{n}, \qquad \text{ή} \qquad S = \{S_t, \; t \in [0, T]\}.$$

Τα παραπάνω σύνολα αποτελούνται από (εξαρτημένες) τυχαίες μεταβλητές και είναι *Στοχαστικές Ανελίξεις* (ή *Στοχαστικές Διαδικασίες*) διακριτού ή συνεχούς χρόνου αντίστοιχα.

1.4 Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα (ΠΧΠ, Derivatives)

Ως παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν (ΠΧΠ) θεωρείται μια διμερής σύμβαση (ή ένα συμβόλαιο) το οποίο συνάπτεται σήμερα ($t = 0$) μεταξύ δυο αντισυμβαλλομένων A, B και αναφέρεται σε μια αγοραπωλησία

- μεταξύ των A, B
- επί ενός συγκεκριμένου αγαθού (καλείται υποκείμενο αγαθό - underlying asset, π.χ. μετοχές, ομόλογα, συνάλλαγμα ή και εμπορεύματα),
- που θα πραγματοποιηθεί στο μέλλον (χρόνος εξάσκησης ή exercise date), μέχρι και κάποιο χρόνο T ο οποίος καλείται χρόνος λήξης (maturity) του συμβολαίου.

Στην ανάλυσή μας αρκεί να θεωρήσουμε ότι πρόκειται *για συμβόλαια που αναφέρονται σε αγοραπωλησίες μετοχών, οι οποίες δύνανται να πραγματοποιηθούν μόνο στο χρόνο λήξης* T (καλούνται «Ευρωπαϊκού τύπου»)

Η απόδοση (return) ενός ΠΧΠ εξαρτάται από την χρηματική αξία του υποκείμενου αγαθού (1 μετοχής) στο χρόνο T εξάσκησής του (δηλ. όταν θα γίνει η αγοραπωλησία). Μπορούμε επομένως γενικά να θεωρήσουμε ότι η απόδοσή του στο χρόνο T θα είναι

$$D_T = g(S_T),$$

για κάποια συγκεκριμένη συνάρτηση g. Η παραπάνω τιμή θα είναι γνωστή στο χρόνο T αλλά σε κάθε προηγούμενο χρόνο $t < T$ θεωρείται τυχαία μεταβλητή.

Ένα ΠΧΠ από τον χρόνο σύναψής του ($t = 0$) και μέχρι την λήξη του ($t = T$) θεωρούμε ότι διατίθενται στην αγορά, και ένας επενδυτής μπορεί να λάβει μια από τις ακόλουθες αντίθετες θέσεις:

- Αγορά του ΠΧΠ (*Long position*)
- Πώληση του ΠΧΠ (*Short position*)

Συμβολίζουμε με D_t την αγοραία αξία ενός ΠΧΠ (της θέσης long) στο χρόνο $t \in [0, T]$, η οποία διαμορφώνεται με από την προσφορά και την ζήτησή της (δηλ. όπως και οι μετοχές, ανάλογα με το πόσοι επενδυτές ζητούν να λάβουν θέση long και πόσοι short).

Τα ΠΧΠ χρησιμοποιούνται για τρείς κυρίως λόγους : (α) Για αντιστάθμιση κινδύνου (Hedging) (β) Για επιδίωξη κερδών μέσω παράλληλης ανάληψης κινδύνου - Κερδοσκοπία (Speculation) (γ) Για επιδίωξη κερδών χωρίς ανάληψη κινδύνου (Arbitrage).

1.4.1 Συμβόλαιο Μελλοντικής εκπλήρωσης (ΣΜΕ, Future contract).

Μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ένα συμβόλαιο το οποίο συνάπτεται στο χρόνο 0 μετά από συμφωνία δύο επενδυτών A, B, σύμφωνα με το οποίο:

- Ο επενδυτής Α (που έχει λάβει την θέση long) υποχρεώνεται στο χρόνο T να αγοράσει μια μετοχή Μ (από τον Β), ενώ αντίθετα
- Ο επενδυτής Β (που έχει λάβει την θέση short) υποχρεώνεται στο χρόνο T να πωλήσει μια μετοχή (στον Α).

Η τιμή αγοραπωλησίας, K (delivery price ή strike price), είναι προσυμφωνημένη ανεξαρτήτως της τιμής S_T που θα έχει η μετοχή στην αγορά στο χρόνο αγοραπωλησίας T. Προφανώς, το υποκείμενο αγαθό μπορεί να είναι γενικά n μετοχές αλλά για απλότητα θα θεωρούμε ότι είναι μια μετοχή. Κατά τη σύναψη του ΣΜΕ δεν καταβάλλεται κάποιο χρηματικό ποσό από τον A στον B ή από τον B στον A.

Επομένως, το κέρδος του A στο χρόνο T θα είναι ίσο με S_T (θεωρητικά μπορεί άμεσα να πωλήσει την μετοχή Μ στην αγορά), μείον το ποσό K που κατέβαλλε. Άρα η απόδοση του ΣΜΕ είναι στο χρόνο T ίση με

$$D_T = g(S_T) = S_T - K.$$

Η απόδοση για την θέση short θα είναι η αντίθετη: $K - S_T$. Αν τα ΣΜΕ διατίθενται στο χρηματιστήριο, η τιμή παράδοσης K καθορίζεται μέσω της προσφοράς και την ζήτησης (ανάλογα με το πόσοι ζητούν να λάβουν θέση short ή long αντίστοιχα).

Παράδειγμα 1. (α) Ένας επενδυτής συνάπτει n το πλήθος ΣΜΕ σε θέση πωλητή (short future) επί μετοχών Μ (με $S_0 = 100€$) με λήξη $T = 3/12$ και με τιμή παράδοσης $K = 102€$.

- Αν στο χρόνο T είναι $S_T = 90€$ τότε αγοράζει τις n μετοχές στην τιμή 90€ από την αγορά και τις πωλεί με βάση το ΣΜΕ στην τιμή $K = 102€$ έχοντας κέρδος

$$K - S_T = 102 - 90 = 12 \text{ ευρώ ανά μετοχή.}$$

- Αν στο χρόνο T είναι $S_T = 120$€ τότε έχει αντίστοιχο κέρδος

$$K - S_T = 102 - 120 = -18 \text{ ευρώ ανά μετοχή (δηλαδή ζημία 18€).}$$

- Αν είχε λάβει την θέση long τότε θα είχε ζημία 12€ και κέρδος 18€ αντίστοιχα (γενικά, $S_T - K$).

(β) Ένας επενδυτής αγοράζει m μετοχές Μ με τρέχουσα τιμή $S_0 = 100$ και ανησυχεί για το ενδεχόμενο πτώσης της τιμής αυτής μέσα στους επόμενους τρείς μήνες. Για το λόγο αυτό συνάπτει short futures επί n μετοχών όπως στο (α) παραπάνω. Η συνάρτηση κέρδους συνολικά από τις δύο αυτές θέσεις θα είναι:

$$m(S_T - e^{rT}S_0) + n(K - S_T) = (m-n)S_T + nK - me^{rT}S_0.$$

(δανείζεται στο $t = 0$ ποσό S_0 και πρέπει να επιστρέψει στο $t = T$ ποσό $e^{rT}S_0$)

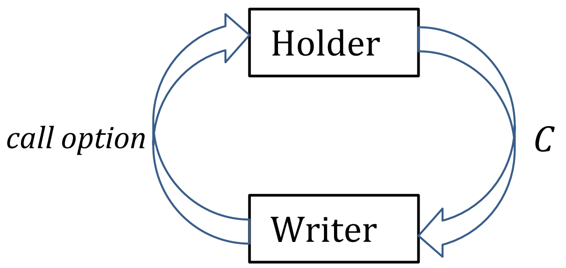
Όλα τα παραπάνω ισχύουν και για τα Προθεσμιακά Συμβόλαια (ΠΣ, Forward contracts). Η διαφορά είναι ότι η διαπραγμάτευση των Forwards είναι εξωχρηματιστηριακή (είναι μη τυποποιημένα προϊόντα) και περιλαμβάνει περισσότερα αγαθά. Η απόδοση των ΠΣ είναι ίδια με αυτή των ΣΜΕ και για αυτό στη συνέχεια θα μελετηθούν μόνο τα ΣΜΕ.

1.4.2 Δικαίωμα αγοράς, (Call Option)

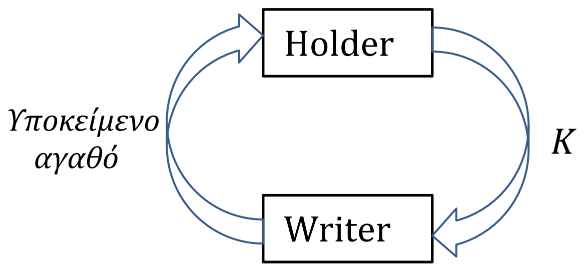
Δικαίωμα αγοράς καλείται μία συμφωνία (ένα συμβόλαιο) μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων:

- τον αγοραστή ή holder (long position) του δικαιώματος, και
- τον πωλητή ή writer (short position) του δικαιώματος.

Η συμφωνία αυτή δίνει στον holder το ***δικαίωμα*** (και όχι την υποχρέωση όπως ένα ΣΜΕ) να *αγοράσει* από τον writer 1 μετοχή σε μία *προκαθορισμένη τιμή* K, σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή T στο μέλλον.



Χρόνος 0



Χρόνος T (αν συμφέρει τον holder)

Το δικαίωμα είναι πιο σύνθετο παράγωγο από το ΣΜΕ διότι τώρα ο αγοραστής του δικαιώματος (holder) δεν είναι υποχρεωμένος να εξασκήσει το δικαίωμά του (να *αγοράσει*) παρά μόνο εάν τον συμφέρει. Αντίθετα ο πωλητής (writer) του δικαιώματος είναι υποχρεωμένος να πράξει ό,τι τελικά αποφασίσει ο holder. Το γεγονός αυτό θέτει σε πλεονεκτική θέση τον holder και για αυτό θα πρέπει να καταβάλει στο χρόνο 0 ένα αντίτιμο C (*ασφάλιστρο* ή *τιμή δικαιώματος* - *Option price, option premium*) στον writer (ο οποίος αναλαμβάνει ρίσκο) για να αποκτήσει το δικαίωμα. Αξίζει να επισημάνουμε ότι στα ΣΜΕ η τιμή K καθορίζεται στον χρόνο 0 από την προσφορά και την ζήτηση ενώ στα call options η τιμή K είναι προκαθορισμένη και αυτό που καθορίζεται από την προσφορά και την ζήτηση είναι το C.

Η απόδοση του call option για τον holder εξαρτάται από το αν θα εξασκήσει ή όχι το δικαίωμά του. Συγκεκριμένα, αν στον χρόνο T ισχύει ότι :

- Αν $S_T > K$ θα εξασκήσει το δικαίωμα και θα αγοράσει στην τιμή K την μετοχή που στην αγορά έχει αξία S_T (διότι θα αγοράσει φθηνότερα). Θα έχει κέρδος

$$S_T - K \quad (\text{όταν } S_T > K).$$

- Αν $S_T \leq K$ δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα (δεν συμφέρει να αγοράσει στην τιμή K αφού στην αγορά η μετοχή είναι φθηνότερη). Θα έχει κέρδος

$$0 \quad (\text{όταν } S_T \leq K)$$

Συνυπολογίζοντας τις δύο παραπάνω περιπτώσεις, η απόδοση του call option για τον holder θα είναι

$$D_T = \max\{S_T - K, 0\} = (S_T - K)_+.$$

(συμβολίζουμε με $A_+ \equiv \max\{A, 0\}$). Αν συνυπολογιστεί και το αρχικό premium C που κατέβαλλε ο holder στον writer τότε το τελικό κέρδος του holder στο χρόνο T θα είναι

$$(S_T - K)_+ - e^{rT}C = D_T - e^{rT}D_0\,.$$

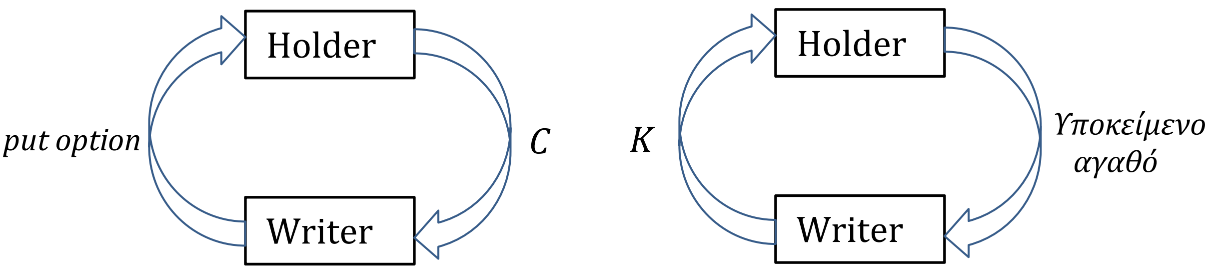
Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι η αρχική αξία της θέσης long είναι $D_0 = C$.

1.4.3 Δικαίωμα πώλησης (Put Option)

Το δικαίωμα πώλησης είναι όμοιο με το δικαίωμα αγοράς, η μόνη διαφορά είναι ότι τώρα ο holder έχει δικαίωμα να **πωλήσει** το υποκείμενο αγαθό στον writer. Και πάλι υπάρχει ένα αντίτιμο C που καταβάλλει ο holder στον writer.

Εδώ, στον χρόνο T ισχύει ότι :

- Αν $S_T < K$ τότε θα εξασκήσει το δικαίωμα και θα πωλήσει στην τιμή K την μετοχή που στην αγορά έχει αξία S_T. Θα έχει κέρδος $K - S_T > 0$.
- Αν $S_T \geq K$ τότε δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα.



Χρόνος 0 Χρόνος T (αν συμφέρει τον holder)

Επομένως, η απόδοση του put option (για τον holder) στο χρόνο T θα είναι

$$D_T = \max\{K - S_T, 0\} = (K - S_T)_+.$$

1.4.4 Απόδοση ενός ΠΧΠ στην γενική περίπτωση

Στην αγορά υπάρχουν δεκάδες ή και εκατοντάδες διαφορετικά ΠΧΠ των οποίων η απόδοση καθορίζεται από την μελλοντική τιμή ενός αγαθού. Για την ανάλυσή μας αρκεί να θεωρήσουμε ότι ένα ΠΧΠ χαρακτηρίζεται από μια τυχαία μεταβλητή της οποίας η τιμή θα γίνει γνωστή στο χρόνο T, δηλαδή

$$D_T = g(S_T)$$

για κάποια συνάρτηση g. Για παράδειγμα,

$g(t) = t - K$ (ΣΜΕ)
$g(t) = (t - K)_+$ (δικαίωμα αγοράς)
$g(t) = (K - t)_+$ (δικαίωμα πώλησης)
$g(t) = I(t > K) = 1$ αν $t > K$ και 0 αν $t \leq K$ (binary δικαίωμα αγοράς)

Γενικότερα, ισχύει ότι

$$D_T = g(S_t, t \in [0, T]),$$

δηλαδή η τιμή D_T είναι μια συνάρτηση των τιμών $\{S_t, t \in [0, T]\}$. Για παράδειγμα ένα barrier call option δίνει το δικαίωμα στον holder να αγοράσει μετά από χρόνο T στην τιμή K μόνο αν η τιμή του υποκείμενου αγαθού σε όλο το $[0, T]$ έμεινε κάτω από ένα άνω φράγμα $u > K$. Σε αυτή την περίπτωση,

$$D_T = (S_T - K)_+ \cdot I(\max\{S_t, t \in [0, T]\} < u)$$

όπου $I(A)$ είναι η δείκτρια συνάρτηση του ενδεχομένου A.

Άσκηση 1. Ένας επενδυτής αγοράζει :

(i) $n = 5000$ μετοχές AAA τρέχουσας αξίας $S_0 = 26€$ η κάθε μία και
(ii) m δικαιώματα πώλησης με τιμή παράδοσης K, λήξη T και τιμή αγοράς C.

(α) Να δοθεί η συνάρτηση κέρδους στο χρόνο T από τις παραπάνω θέσεις. (β) Πόσο πρέπει να είναι το m ώστε αν $S_T = 15€$, η συνολική ζημιά να είναι μόνο $a = -20000$ ($K = 25€$, $C = 1.6€$, $T = 4/12$, $r = 0.01$). Πόση θα ήταν αν δεν είχαν αγορασθεί τα δικαιώματα πώλησης;

Λύση. (α) Το κέρδος στο χρόνο T είναι :

$$n(S_T - e^{rT}S_0) + m((K - S_T)_+ - e^{rT}C)$$

(β) Ζητείται το m που ικανοποιεί την εξίσωση:

$$a = n(S_T - e^{rT}S_0) + m((K - S_T)_+ - e^{rT}C) \Longrightarrow m = \frac{a - n(S_T - e^{rT}S_0)}{(K - S_T)_+ - e^{rT}C} \approx 4221$$

Αν δεν είχαν αγορασθεί τα δικαιώματα πώλησης θα είχαμε κέρδος

$$n(S_T - e^{rT}S_0) = 5000(15 - 26.0868) = -55434.1 \text{ (ζημία)}$$

Ερωτήσεις Ανακεφαλαίωσης 1ου Κεφαλαίου

Ερώτηση 1. Ποια είναι η διαφορά μεταξύ ενός ΣΜΕ (long future) και ενός Δικαιώματος αγοράς (long call) με το ίδιο υποκείμενο αγαθό, τιμή εξάσκησης K και χρόνο εξάσκησης T; Αν $K = 100, C = 5, S_T = 80$ ποιό είναι το κέρδος (ή ζημία) σε καθένα από αυτά τα δύο αυτά συμβόλαια;

Ερώτηση 2. Ποιές από τις ποσότητες K, C, T, καθορίζονται από την προσφορά και τη ζήτηση (i) σε ένα ΣΜΕ και (ii) σε ένα Δικαίωμα Αγοράς;

2 Το θεώρημα του Arbitrage και το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου

2.1 Ο ορισμός του Arbitrage

Η έννοια του arbitrage είναι θεμελιώδης στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά. Μια επενδυτική στρατηγική καλείται arbitrage (ή εξισορροποιητική κερδοσκοπία) αν οδηγεί σε **σίγουρο κέρδος χωρίς κίνδυνο**. Συγκεκριμένα, σε μια αγορά υπάρχει δυνατότητα για arbitrage αν μπορεί να κατασκευαστεί στρατηγική αγοραπωλησιών τίτλων της αγοράς η οποία από μηδενικό κεφάλαιο εξασφαλίζει τελικό κέρδος $V \geq 0$, ενώ επιπλέον $V > 0$ με θετική πιθανότητα.

Υπενθυμίζεται όμως ότι στην αγορά που εξετάζουμε οι συναλλασσόμενοι προσπαθούν να εκμεταλλευτούν οποιαδήποτε ευκαιρία για σίγουρο κέρδος εμφανίζεται. Επομένως αν υπάρχει ευκαιρία για arbitrage, οι επενδυτές θα σπεύσουν να την πραγματοποιήσουν με συνέπεια πολύ σύντομα αυτή να χαθεί. Πράγματι:

- Αν το arbitrage παρουσιάζεται λόγω της πολύ χαμηλής τιμής ενός τίτλου, τότε θα αυξηθεί η ζήτησή του με αποτέλεσμα να αυξηθεί η τιμή του.
- Αν το arbitrage παρουσιάζεται λόγω της πολύ υψηλής τιμής ενός τίτλου, τότε θα αυξηθεί η προσφορά του με αποτέλεσμα να μειωθεί η τιμή του.

Επομένως η τιμή του τίτλου πολύ σύντομα θα σταθεροποιηθεί σε μια τιμή ισορροπίας (ή δίκαιη ή No-Arbitrage τιμή) η οποία δεν προσφέρει arbitrage.

Άρα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι *μια αγορά βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας αν δεν υπάρχει ευκαιρία για Arbitrage* (NA, No Arbitrage υπόθεση).

Παράδειγμα 2. Ένας επενδυτής αγοράζει m μετοχές Μ με τρέχουσα τιμή S_0 και επίσης συνάπτει ΣΜΕ ως πωλητής (short futures) επί n μετοχών Μ. Η συνάρτηση κέρδους συνολικά από τις δύο αυτές θέσεις θα είναι:

$$m(S_T - e^{rT}S_0) + n(K - S_T)$$

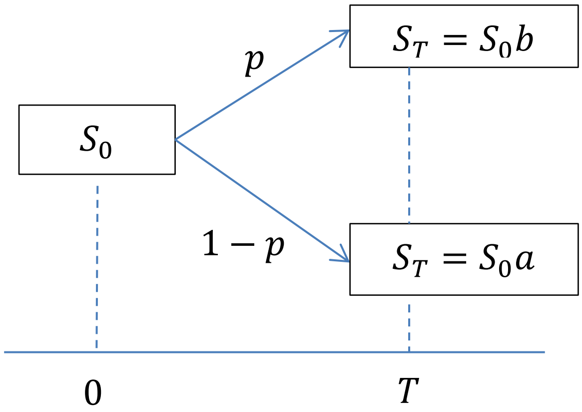
Αν πάρουμε $m = n$ τότε η συνάρτηση κέρδους θα είναι $n(K - e^{rT}S_0)$. Παρατηρούμε ότι

- αν $K > e^{rT}S_0$ τότε λαμβάνοντας τις δύο παραπάνω θέσεις έχουμε σίγουρο κέρδος (arbitrage).
- αν $K < e^{rT}S_0$ τότε λαμβάνοντας τις αντίθετες από τις δύο παραπάνω θέσεις (ανοικτή πώληση μετοχών και long forward) έχουμε και πάλι arbitrage.

Άρα τελικά, η τιμή ισορροπίας του K θα πρέπει να είναι

$$K^* = e^{rT}S_0.$$

Παράδειγμα 3. Ας εξετάσουμε ένα πολύ απλοποιημένο μοντέλο για την κίνηση της τιμής μια μετοχής το οποίο καλείται *διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου.* Το μοντέλο αυτό εξετάζεται μόνο στους χρόνους 0 και T. Η αρχική τιμή μιας μετοχής είναι S_0 ενώ η τιμή S_T στο χρόνο T είναι ίση είτε με $S_0 b$ (με πιθ. p) είτε με $S_0 a$ (με πιθ. $1 - p$) και $0 < a < b$. Σχηματικά:



(α) Αν $0 < a < b \leq e^{rT}$ τότε υπάρχει δυνατότητα για arbitrage:

- Στο χρόνο 0: πωλούμε ανοικτά 1 μετοχή εισπράττοντας ποσό S_0 το οποίο επενδύουμε άμεσα σε ομόλογα.
- Στο χρόνο T: επιστέφουμε την μετοχή (που έχουμε πωλήσει ανοικτά) αγοράζοντάς την στην τιμή S_T και επίσης εισπράττουμε ποσό $S_0 e^{rT}$ από τα ομόλογα.

Θα έχουμε arbitrage διότι το κέρδος μας στο χρόνο T θα είναι

$$V = S_0 e^{rT} - S_T = \begin{cases} S_0(e^{rT} - b) \geq 0 & \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta.\ p \\ S_0(e^{rT} - a) > 0 & \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta.\ 1-p \end{cases}$$

δηλαδή $V \geq 0$ και $V > 0$ με πιθ. τουλάχιστον $1 - p$.

(β) Αν $e^{rT} \leq a < b$ τότε υπάρχει και πάλι δυνατότητα για arbitrage:

- Παίρνουμε τις αντίθετες με το (α) θέσεις: Αρχικά δανειζόμαστε (έκδοση ομολόγου) ποσό S_0 με το οποίο αγοράζουμε 1 μετοχή. Στο χρόνο T πωλούμε την μετοχή επιστέφουμε ποσό $S_0 e^{rT}$ από τα ομόλογα.

Θα έχουμε arbitrage διότι το κέρδος μας στο χρόνο T θα είναι

$$V = S_T - S_0 e^{rT} = \begin{cases} S_0(b - e^{rT}) > 0 & \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta.\ p \\ S_0(a - e^{rT}) \geq 0 & \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta.\ 1-p \end{cases}$$

δηλαδή $V \geq 0$ και $V > 0$ με πιθ. τουλάχιστον p.

Επομένως αναγκαία συνθήκη για να μην υπάρχει arbitrage είναι $a < e^{rT} < b$.

2.2 Βασικές επενδύσεις και το Θεώρημα του Arbitrage

Θεωρούμε ότι μια αγορά μπορεί να βρεθεί σε μια από m δυνατές καταστάσεις,

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$$

όπου η κάθε μια μπορεί να πραγματοποιηθεί με θετική πιθανότητα, συγκεκριμένα θεωρούμε ότι $P(\{\omega_i\}) = p_i > 0,\ i = 1,2, \dots, m$. Επίσης θεωρούμε ότι στην αγορά υπάρχουν συνολικά n το πλήθος *βασικές επενδύσεις* (ΒΕ), με την έννοια ότι κάθε δυνατή επενδυτική στρατηγική μπορεί να θεωρηθεί ως ένας συνδυασμός αγοραπωλησιών αυτών των n βασικών επενδύσεων. Συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι κάθε επενδυτική στρατηγική μπορεί να περιγραφεί από ένα διάνυσμα

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

όπου το x_i δείχνει το πλήθος των βασικών επενδύσεων τύπου i που περιλαμβάνονται στην στρατηγική αυτή. Αν το $x_i > 0$ τότε η επένδυση i έχει ληφθεί x_i φορές, ενώ αν το $x_i < 0$, η αντίθετη της επένδυσης i έχει ληφθεί $-x_i$ φορές.

Συμβολίζουμε με $R_1, R_2, \dots, R_n$ τις αποδόσεις ή τυχαία κέρδη (θετικά ή αρνητικά) από τις n βασικές επενδύσεις (ξεκινώντας πάντοτε με κεφάλαιο 0). Το συνολικό κέρδος μιας επενδυτικής στρατηγικής που περιλαμβάνει $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ βασικές επενδύσεις είναι

$$V = V_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i.$$

Αν πραγματοποιηθεί η ω_j κατάσταση της αγοράς, τότε τα κέρδη από τις n βασικές επενδύσεις θα είναι $R_1(\omega_j), \dots, R_n(\omega_j)$, ενώ το συνολικό κέρδος θα είναι

$$V(\omega_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i(\omega_j).$$

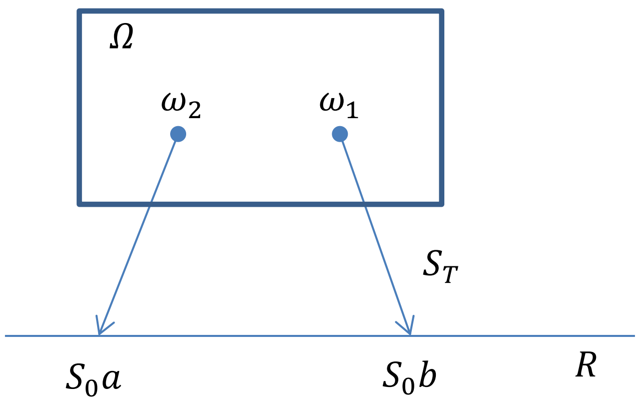
Σχηματικά:

P:	p_1	p_2		p_m	
Ω:	ω_1	ω_2	…	ω_m	
R_1	$R_1(\omega_1)$	$R_1(\omega_2)$	…	$R_1(\omega_m)$	$E_P(R_1) = \sum_{j=1}^{m} R_1(\omega_j) p_j$
R_2	$R_2(\omega_1)$	$R_2(\omega_2)$	…	$R_2(\omega_m)$	$E_P(R_2) = \sum_{j=1}^{m} R_2(\omega_j) p_j$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
R_n	$R_n(\omega_1)$	$R_n(\omega_2)$	…	$R_n(\omega_m)$	$E_P(R_n) = \sum_{j=1}^{m} R_n(\omega_j) p_j$
V	$V(\omega_1)$	$V(\omega_2)$	…	$V(\omega_m)$	$E_P(V) = \sum_{j=1}^{m} V(\omega_j) p_j = \sum_{i=1}^{n} E_P(R_i) x_i$

Παράδειγμα 4. Ας θεωρήσουμε και πάλι το *διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου*. Η αγορά εδώ αρκεί να θεωρηθεί ότι έχει δύο καταστάσεις:

ω_1: *κίνηση τιμής μετοχής πάνω*, ω_2: *κίνηση τιμής μετοχής κάτω*.

Η τιμή S_T της μετοχής στο χρόνο T είναι τυχαία μεταβλητή από τον Ω στον R με $S_T(\omega_1) = S_0 b$ και $S_T(\omega_2) = S_0 a$. (βλ. παρακάτω σχήμα). Συμβολίζουμε με P την πιθανότητα (μέτρο πιθανότητας) στον Ω με $P(\{\omega_1\}) = p$ και $P(\{\omega_2\}) = 1 - p$.



Η βασική επένδυση σε αυτό το απλοποιημένο μοντέλο είναι μόνο μία:

(ΒΕ1) (*δάνειο* S_0 *για την*) *αγορά* 1 *μετοχής στο χρόνο* 0

Γενικά θα θεωρούμε ότι στο χρόνο T γίνονται οι ρευστοποιήσεις των κατεχομένων τίτλων ή κλείνονται οι όποιες ανοιχτές θέσεις, οπότε οι ΒΕ δεν χρειάζεται να αναφέρονται σε κινήσεις που γίνονται στο χρόνο T.

Το κέρδος από την ΒΕ1 (στο χρόνο T) θα είναι

$$R_1 = S_T - e^{rT} S_0$$

Ισχύει προφανώς ότι

$$R_1(\omega_1) = S_0 b - e^{rT} S_0, \qquad R_1(\omega_2) = S_0 a - e^{rT} S_0$$

Το κέρδος από μια επενδυτική στρατηγική $\mathbf{x} = (x_1)$ θα είναι $V = x_1 R_1$ με

$$V(\omega_1) = x_1 R_1(\omega_1), \qquad R_1(\omega_2) = x_1 R_1(\omega_2)$$

ενώ το αναμενόμενο κέρδος θα είναι

$$V = E(x_1 R_1) = x_1 E(S_T) - x_1 e^{rT} S_0 = x_1 (p S_0 b + (1-p) S_0 a) - x_1 e^{rT} S_0$$

Αν π.χ. $\mathbf{x} = (x_1) = (10)$ τότε αγοράζουμε 10 μετοχές, ενώ αν π.χ. $\mathbf{x} = (x_1) = (-5)$ τότε πωλούμε ανοικτά 5 μετοχές.

Παράδειγμα 5. Σε μια αγορά διατίθενται προς αγορά ή πώληση δύο μετοχές: A, B. Αν θεωρήσουμε ότι επιτρέπονται αγοραπωλησίες αυτών των μετοχών μόνο στο χρόνους $t = 0, T$ τότε οι βασικές επενδύσεις είναι:

(ΒΕ1) (*δάνειο* S_0^A *για την*) *αγορά* 1 *μετοχής* A *στο χρόνο* 0
(ΒΕ2) (*δάνειο* S_0^B *για την*) *αγορά* 1 *μετοχής* B *στο χρόνο* 0

Στο χρόνο T γίνονται οι ρευστοποιήσεις των κατεχόμενων τίτλων ή κλείνονται οι όποιες ανοιχτές θέσεις. Προφανώς, θα ισχύει ότι

$$R_1 = S_T^A - e^{rT} S_0^A \quad \text{και} \quad R_2 = S_T^B - e^{rT} S_0^B.$$

Αν π.χ. $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (10, -5)$ τότε πραγματοποιούμε την πρώτη βασική επένδυση 10 φορές (αγορά 10 μετοχών Α στο χρόνο 0 και πώλησή τους στο χρόνο T) και πραγματοποιούμε την αντίθετη της δεύτερης επένδυσης 5 φορές (ανοικτή πώληση 5 μετοχών Β στο χρόνο 0 και επαναγορά τους στο χρόνο T). Το συνολικό κέρδος θα είναι

$$V = x_1 R_1 + x_2 R_2 = 10(S_T^A - e^{rT} S_0^A) - 5(S_T^B - e^{rT} S_0^B).$$

Παράδειγμα 6. Σε μια αγορά διατίθεται προς αγορά ή πώληση μια μετοχή και ένα ΠΧΠ (επί της μετοχής) στους χρόνους $0, h, T$. Οι βασικές επενδύσεις μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι:

(ΒΕ1) (*δάνειο* S_0 *για την*) *αγορά* 1 *μετοχής στο χρόνο* 0
(ΒΕ2) (*δάνειο* D_0 *για την*) *αγορά* 1 ΠΧΠ *στο χρόνο* 0
(ΒΕ3) (*δάνειο* S_h *για την*) *αγορά* 1 *μετοχής στο χρόνο* h
(ΒΕ4) (*δάνειο* D_h *για την*) *αγορά* 1 ΠΧΠ *στο χρόνο* h

Τα αντίστοιχα τυχαία κέρδη (στο χρόνο T) θα είναι,

$$R_1 = S_T - e^{rT} S_0, \qquad R_2 = D_T - e^{rT} D_0$$

$$R_3 = S_T - e^{r(T-h)} S_h, \quad R_4 = D_T - e^{r(T-h)} D_h.$$

Για παράδειγμα, η επενδυτική στρατηγική $\mathbf{x} = (10, -1, -3, 2)$ αντιστοιχεί σε

- αγορά 10 μετοχών στο 0 και πώλησή 3 εξ αυτών στο χρόνο h, και
- μια short θέση στο ΠΧΠ στο χρόνο 0 και δύο θέσεις long στο ΠΧΠ στο χρόνο h

(στο χρόνο T ρευστοποιούμε 7 μετοχές και 1 long ΠΧΠ).

Το συνολικό κέρδος θα είναι

$$V = 10(S_T - e^{rT}S_0) - 1(D_T - e^{rT}D_0) - 3\big(S_T - e^{r(T-h)}S_h\big) + 2\big(D_T - e^{r(T-h)}D_h\big).$$

Ισχύει το ακόλουθο θεμελιώδες αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1 (**ΘΑ**, ***Θεώρημα του Arbitrage, First Fundamental Theorem of Asset Pricing***). *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Υπάρχει μέτρο πιθανότητας* Q *στον* $(\Omega, \mathcal{F})$ (με $Q(\{\omega_i\}) = q_i > 0, i = 1,2, \dots, m$) *υπό το οποίο*

$$E_Q(R_i) = 0, \qquad i = 1,2, \dots, n.$$

(β) *Δεν υπάρχει δυνατότητα για arbitrage* (*δηλαδή δεν υπάρχει επενδυτική στρατηγική* $\mathbf{x}$ *τέτοια ώστε* $V = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i \geq 0$ *για κάθε κατάσταση της αγοράς ενώ* $V > 0$ *για τουλάχιστον μια κατάσταση της αγοράς*).

Περιφραστικά, το ΘΑ λέει ότι «*Δεν υπάρχει Arbitrage αν και μόνο αν υπάρχει* Q *υπό το οποίο μηδενίζονται οι αναμενόμενες αποδόσεις των ΒΕ*». Η αναμενόμενη απόδοση $E_Q(R_i)$ υπό το μέτρο πιθανότητας Q είναι

$$E_Q(R_i) = q_1 R_i(\omega_1) + \cdots + q_m R_i(\omega_m)$$

ενώ υπό το αρχικό (πραγματικό) μέτρο πιθανότητας P είναι

$$E_P(R_i) = p_1 R_i(\omega_1) + \cdots + p_m R_i(\omega_m).$$

Απόδειξη. (i) **Αν ισχύει το (α) ⇒ ισχύει το (β):** Θεωρούμε ότι ισχύει το (α) για κάποιο μέτρο πιθανότητας Q, άρα για κάθε $\mathbf{x}$,

$$E_Q(V) = E_Q\left(\sum_{i=1}^{n} x_i R_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i E_Q(R_i) = 0.$$

Έστω ότι δεν ισχύει το (β), δηλαδή υπάρχει $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ τέτοιο ώστε $V(\omega_i) \geq 0$, $i = 1,2, \dots, n$, και για κάποιο j ισχύει $V(\omega_j) > 0$. Επομένως

$$E_Q(V) = \sum_{i=1}^{m} q_i V(\omega_i) > 0.$$

Το παραπάνω είναι άτοπο, διότι από το (α) είχαμε $E_Q(V) = 0$. Άρα πρέπει να ισχύει το (β), δηλαδή δεν υπάρχει arbitrage.

(ii) **Αν δεν ισχύει το (α) ⇒ Δεν ισχύει το (β):** Αυτή η συνεπαγωγή είναι τεχνικά πιο δύσκολο να αποδειχθεί (χρησιμοποιείται το δυικό θεώρημα του γραμμικού προγραμματισμού). Θα παρουσιάσουμε μόνο μια γεωμετρική διαισθητική απόδειξη για $n = 1$ και $n = 2$.

• Αν $n = 1$ τότε υπάρχει μόνο μια βασική επένδυση, το κέρδος R_1 από την οποία παίρνει τις τιμές $R_1(\omega_1), \dots, R_1(\omega_m)$, ανάλογα με το στοιχειώδες ενδεχόμενο ω_i που θα πραγματοποιηθεί. Θεωρούμε ότι δεν ισχύει (α), δηλαδή δεν μπορούν να βρεθούν πιθανότητες $q_i > 0, i = 1,2, \dots, m$ τέτοιες ώστε

$$E_Q(R_1) = q_1 R_1(\omega_1) + \cdots + q_m R_1(\omega_m) = 0.$$

Αυτό μπορεί να ισχύει μόνο όταν όλες οι τιμές $R_1(\omega_1), \dots, R_1(\omega_m) \geq 0$ (και κάποια είναι > 0) ή όλες είναι ≤ 0 (και κάποια είναι < 0). Στην πρώτη περίπτωση αρκεί να πάρουμε $x_1 > 0$ ενώ στην δεύτερη αρκεί να πάρουμε $x_1 < 0$ ώστε να έχουμε arbitrage (δηλαδή $V = x_1 R_1 \geq 0$ και $V > 0$ για κάποια κατάσταση) και επομένως δεν ισχύει το (β).

• Αν $n=2$ τότε υπάρχουν δύο βασικές επενδύσεις. Ανάλογα με το στοιχειώδες ενδεχόμενο ω_i που θα πραγματοποιηθεί, το ζεύγος των κερδών R_1, R_2 μπορεί να λάβει μια από τις m τιμές:

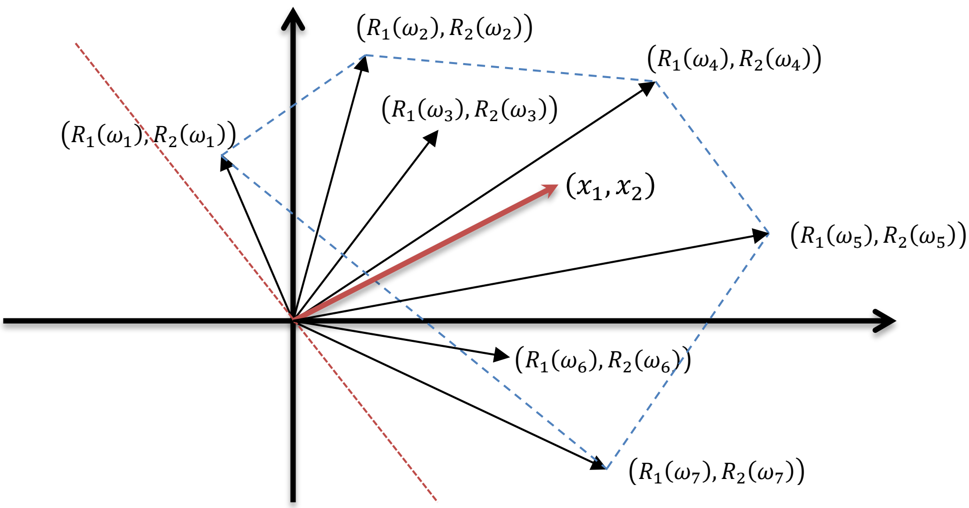
$$\big(R_1(\omega_1), R_2(\omega_1)\big), \big(R_1(\omega_2), R_2(\omega_2)\big), \dots , \big(R_1(\omega_m), R_2(\omega_m)\big),$$

οι οποίες θεωρούνται ως σημεία του επιπέδου (κάθε ω_i αντιστοιχεί σε ένα σημείο). Θεωρούμε ότι δεν ισχύει (α), δηλαδή δεν μπορούν να βρεθούν πιθανότητες $q_i > 0$, $i = 1,2, \dots , m$ τέτοιες ώστε

$$E_Q(R_1) = q_1 R_1(\omega_1) + q_2 R_1(\omega_2) + \cdots + q_m R_1(\omega_m) = 0,$$

$$E_Q(R_2) = q_1 R_2(\omega_1) + q_2 R_2(\omega_2) + \cdots + q_m R_2(\omega_m) = 0,$$

δηλαδή, με άλλα λόγια, δεν μπορούμε να βάλουμε θετικά βάρη $(q_1 , q_2, \dots , q_m)$ σε αυτά τα m σημεία ώστε το βαρύκεντρό τους να είναι το (0,0). Αυτό συμβαίνει μόνο αν τα m αυτά σημεία ανήκουν σε ένα κυρτό υποσύνολο (πολύγωνο) του επιπέδου που δεν περιλαμβάνει στο εσωτερικό του το (0,0). Είναι εύκολο τώρα να αντιληφθούμε ότι και τα m σημεία θα βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο, δηλαδή υπάρχει ευθεία που περνά από το 0 η οποία έχει και τα m σημεία από την μια της πλευρά (και ενδεχομένως κάποια, άλλα όχι όλα, πάνω της). Ας θεωρήσουμε τώρα τα σημεία αυτά ως διανύσματα με αρχή το (0,0) (εξαιρούμε όσα βρίσκονται πάνω στο (0,0) που πρέπει να είναι λιγότερα από m).



Αφού βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο, έπεται ότι υπάρχει διάνυσμα (x_1, x_2) στο ίδιο ημιεπίπεδο το οποίο σχηματίζει γωνία μικρότερη ή ίση του $\pi/2$ με καθένα από αυτά (ενώ για κάποια σημεία θα είναι $< \pi/2$). Μάλιστα θα υπάρχουν άπειρα τέτοια (x_1, x_2). Δηλαδή, το εσωτερικό γινόμενο των m διανυσμάτων $\big(R_1(\omega_i), R_2(\omega_i)\big)$, $i = 1,2, \dots , m$ με το (x_1, x_2) είναι ≥ 0 (υπενθυμίζεται ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το γινόμενο των μέτρων τους επί το συνημίτονο της μεταξύ τους γωνίας), ενώ για κάποια θα είναι > 0. Άρα τελικά θα ισχύει ότι

$$V(\omega_1) = x_1 R_1(\omega_1) + x_2 R_2(\omega_1) \geq 0$$

$$V(\omega_2) = x_1 R_1(\omega_2) + x_2 R_2(\omega_2) \geq 0$$

$$\dots$$

$$V(\omega_m) = x_1 R_1(\omega_m) + x_2 R_2(\omega_m) \geq 0$$

Ενώ ένα τουλάχιστον από τα παραπάνω θα είναι > 0. Δηλαδή υπάρχει arbitrage, και δεν ισχύει το (β). Ανάλογα επιχειρήματα μπορούν κατάλληλα να διατυπωθούν σε περισσότερες διαστάσεις θεωρώντας κυρτά πολύεδρα (simplex) και υπερεπίπεδα.

2.3 Το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου

Αν, σύμφωνα με το παραπάνω ΘΑ, υπάρχει (δηλ. μπορεί να κατασκευαστεί) μέτρο πιθανότητας Q στον Ω υπό το οποίο μηδενίζονται οι αναμενόμενες αποδόσεις όλων των βασικών επενδύσεων της αγοράς, τότε αυτό καλείται ***μέτρο πιθανότητας Ουδέτερου Κινδύνου*** (*Risk Neutral Probability Measure*).

Σύμφωνα με το ΘΑ, δεν υπάρχει arbitrage αν και μόνο αν υπάρχει μέτρο πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου Q, αλλά το ΘΑ δεν λέει ότι το Q αυτό θα συμπίπτει με το πραγματικό μέτρο πιθανότητας P. Επομένως, οι πραγματικές πιθανότητες των καταστάσεων της αγοράς

$$P(\{\omega_i\}) = p_i, \qquad i = 1,2,\dots,m$$

(υπό το P) μπορεί να είναι διαφορετικές από τις πιθανότητες

$$Q(\{\omega_i\}) = q_i, \qquad i = 1,2,\dots,m,$$

του μέτρου πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου Q.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι, για την βασική επένδυση

BE: (*δάνειο* S_0 *για την*) *αγορά* 1 *μετοχής* A *στο χρόνο* 0

με κέρδος $R = S_T - e^{rT}S_0$, θα ισχύει υπό το Q ότι

$$E_Q(R) = 0 \Leftrightarrow E_Q(S_T) - e^{rT}S_0 = 0 \Leftrightarrow E_Q(S_T) = e^{rT}S_0.$$

Δηλαδή αν στην αγορά ίσχυε το Q και επενδύσουμε ποσό S_0:

(i) σε 1 μετοχή, τότε το αναμενόμενο κέρδος μας (στο χρόνο T) θα είναι

$$E_Q(S_T) = e^{rT}S_0.$$

(ii) σε ομόλογα, τότε το κέρδος μας (στο χρόνο T) θα είναι

$$e^{rT}S_0.$$

Δηλαδή, υπό το Q, το αναμενόμενο κέρδος από την επένδυση σε μια μετοχή (που είναι Risky Asset) είναι ίσο με το κέρδος από την επένδυση σε ομόλογα (που είναι Riskless Asset). Το παραπάνω μπορεί να ισχύει μόνο σε μια αγορά όπου οι επενδυτές είναι ουδέτεροι απέναντι στον κίνδυνο (δηλαδή είναι πρόθυμοι να αναλάβουν κίνδυνο, χωρίς να απαιτούν μεγαλύτερο αναμενόμενο κέρδος). Κατά κανόνα, οι επενδυτές θα επενδύσουν σε μετοχές μόνο αν $E_P(S_T) > e^{rT}S_0$, διαφορετικά θα επιλέξουν να επενδύσουν σε ομόλογα που δεν ενέχουν κίνδυνο. Για το λόγο αυτό το Q καλείται *μέτρο πιθανότητας Ουδέτερου Κινδύνου* (συνήθως δεν ισχύει στην αγορά, εμφανίζεται στο θεώρημα του Arbitrage) ενώ το P καλείται *πραγματικό μέτρο πιθανότητας* (είναι αυτό που ισχύει την αγορά).

Άσκηση 2. Θεωρούμε μια λοταρία με m δυνατά αποτελέσματα $\{1,2,\dots,m\}$. Αν στοιχηματίσουμε 1 ευρώ στο αποτέλεσμα $i \in \{1,2,\dots,m\}$ και αυτό πραγματοποιηθεί τότε κερδίζουμε $1 + a_i$ ευρώ («απόδοση» $a_i > 0$) (*σε κάθε περίπτωση, το* 1 *ευρώ που στοιχηματίσαμε δεν μας επιστρέφεται*). Επιτρέπεται και η αντίθετη επένδυση-στοίχημα (π.χ. πραγματοποιείται από τον φορέα διοργάνωσης της λοταρίας). **(α)** Να βρείτε το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου και την σχέση που πρέπει να ικανοποιούν οι αποδόσεις a_i ώστε να μην υπάρχει arbitrage.

(β) Αν επενδύσουμε στο i αποτέλεσμα ποσό x_i, για $i = 1,2,\dots,m$, όπου

$$x_i = \frac{1}{(1+a_i)\left(1 - \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{1+a_j}\right)},$$

να δείξετε ότι θα έχουμε σίγουρο κέρδος 1€ (αρκεί ο παρονομαστής να είναι $\neq 0$)

(γ) Αν $m = 3$ και οι αποδόσεις είναι $a_1 = 1.5, a_2 = 3, a_3 = 5$ να διαπιστώσετε αν υπάρχει arbitrage και αν ναι, προτείνετε μια στρατηγική σίγουρου κέρδους.

Λύση. **(α)** Εδώ είναι $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$, όπου το ω_i αντιστοιχεί στο αποτέλεσμα i. Αν X το αποτέλεσμα της λοταρίας τότε $X(\omega_i) = i,\ i = 1,2,\ldots,m$. Έχουμε m βασικές επενδύσεις,

$$\text{BE}i : \text{στοίχημα 1 ευρώ στο αποτέλεσμα } i, \text{ για } i = 1,2,\ldots,m,$$

με αντίστοιχα κέρδη

$$R_i = (1 + a_i)I(X = i) - 1 = \begin{cases} a_i, & X = i \\ -1, & X \neq i \end{cases}, \qquad i = 1,2,\ldots,m,$$

(όπου $I(X = i) = 1$ αν $X = i$ και 0 διαφορετικά). Για να μην υπάρχει arbitrage θα πρέπει να υπάρχει Q με

$$q_i = Q(X = i) = Q(\{\omega_i\}) = q_i > 0, i = 1,2,\ldots,m,$$

έτσι ώστε

$$E_Q(R_i) = E_Q\big((1 + a_i)I(X = i)\big) - 1 = (1 + a_i)q_i - 1 = 0$$

για $i = 1,2,\ldots,m$. Δηλαδή, θα πρέπει,

$$q_i = \frac{1}{a_i + 1}, \qquad i = 1,2,\ldots,m.$$

Τα παραπάνω q_i είναι γνήσια θετικά και άρα για να μπορούν να θεωρηθούν πιθανότητες στο (0,1) αρκεί να αθροίζουν στην μονάδα:

$$\sum_{i=1}^{m} q_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{a_i + 1} = 1.$$

Επομένως, αν δεν ισχύει η παραπάνω συνθήκη για τις αποδόσεις $a_1, a_2, \ldots, a_m$, τότε δεν μπορεί να βρεθεί μέτρο πιθανότητας Q ουδέτερου κινδύνου και επομένως υπάρχει δυνατότητα για arbitrage.

(β) Αν δεν ισχύει η συνθήκη $\sum_{i=1}^{m} q_i = 1$ του (α) τότε ορίζεται το x_i διότι ο παρονομαστής του είναι $\neq 0$. Το κέρδος μας θα είναι

$$\begin{aligned} V = \sum_{i=1}^{m} x_i R_i &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\frac{1}{1 + a_i}}{1 - \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{1 + a_j}} \big((1 + a_i)I(X = i) - 1\big) \\ &= \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{1 + a_j}} \sum_{i=1}^{m} \left(I(X = i) - \frac{1}{1 + a_i} \right) = 1 \end{aligned}$$

διότι $\sum_{i=1}^{m} I(X = i) = 1$ (ακριβώς ένα από τα $I(X = i), i = 1,2,\ldots,m$ είναι ίσο με 1 ενώ τα υπόλοιπα $m - 1$ θα είναι 0).

(γ). Θα έχουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{a_i + 1} = \frac{1}{1.5 + 1} + \frac{1}{3 + 1} + \frac{1}{5 + 1} \approx 0.8166 < 1$$

και επομένως υπάρχει δυνατότητα για arbitrage. Από το (β), αν επενδύσουμε x_i ευρώ στην i επένδυση, και συγκεκριμένα,

$$x_1 \approx \frac{\frac{1}{1+1.5}}{1-0.8166} \approx 2.181, x_2 \approx \frac{\frac{1}{1+3}}{1-0.8166} \approx 1.363, x_3 \approx \frac{\frac{1}{1+5}}{1-0.8166} \approx 0.9087$$

τότε τα κέρδη από αυτές τις τρείς βασικές επενδύσεις για κάθε κατάσταση της αγοράς θα είναι

$$V(\omega_1) = x_1R_1(\omega_1) + x_2R_2(\omega_1) + x_3R_3(\omega_1) = x_1 1.5 - x_2 - x_3 = 1$$
$$V(\omega_2) = x_1R_1(\omega_2) + x_2R_2(\omega_2) + x_3R_3(\omega_2) = -x_1 + 3x_2 - x_3 = 1$$
$$V(\omega_3) = x_1R_1(\omega_3) + x_2R_2(\omega_3) + x_3R_3(\omega_3) = -x_1 - x_2 + 5x_3 = 1$$

Ερωτήσεις Ανακεφαλαίωσης 2ου Κεφαλαίου

Ερώτηση 3. Πότε μια επενδυτική στρατηγική καλείται arbitrage;

Ερώτηση 4. Πότε μια αγορά βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας και γιατί η αγορά έχει την τάση να επιστρέφει σε αυτήν;

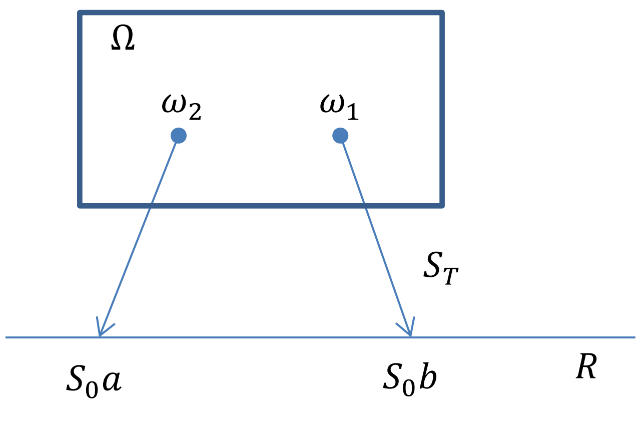
Ερώτηση 5. Τι αποδεικνύεται ότι πρέπει να ισχύει σχετικά με τις Βασικές Επενδύσεις μιας αγοράς ώστε να μην υπάρχει ευκαιρία για arbitrage;

Ερώτηση 6. Τι καλείται Μέτρο Πιθανότητας Ουδέτερου Κινδύνου και πως θα συμπεριφέρονταν οι επενδυτές σε μια αγορά που αυτό θα ίσχυε;

3 Το Διωνυμικό μοντέλο αποτίμησης ΠΧΠ

3.1 Δίκαιη (ΝΑ) αξία ΠΧΠ στο διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου

Θεωρούμε και πάλι το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου το οποίο έχει δύο δυνατές καταστάσεις: ω_1:*κίνηση μετοχής πάνω*, ω_2:*κίνηση μετοχής κάτω*. Η S_T είναι τυχαία μεταβλητή από τον Ω στον R με $S_T(\omega_1) = S_0b$ και $S_T(\omega_2) = S_0a$. (βλ. παρακάτω σχήμα). Συμβολίζουμε με P το πραγματικό μέτρο πιθανότητας στον Ω. Θα είναι $P(\{\omega_1\}) = p$ και $P(\{\omega_2\}) = 1 - p$.



Θεωρούμε ότι στην αγορά έχουμε τρείς τίτλους:

(i) *ομόλογο*, (ii) *μετοχή* M, (iii) *δικαίωμα αγοράς επί της μετοχής* M

Υπό τις υποθέσεις αυτές υπάρχουν οι ακόλουθες δύο βασικές επενδύσεις:

(ΒΕ1) (*δάνειο* S_0 *για την*) *αγορά* 1 *μετοχής στο χρόνο* 0,
(ΒΕ2) (*δάνειο* D_0 *για την*) *αγορά* 1 *call option* (*θέση long*) *στο χρόνο* 0.

Τα αντίστοιχα κέρδη στο χρόνο T θα είναι

$$R_1 = S_T - S_0 e^{rT} \text{ και } R_2 = (S_T - K)_+ - D_0 e^{rT}$$

Από το ΘΑ, δεν υπάρχει arbitrage αν και μόνο αν υπάρχει πιθανότητα ουδέτερου κινδύνου Q (με $Q(\{\omega_1\}) = q \in (0,1)$, $Q(\{\omega_2\}) = 1 - q$) τέτοια ώστε:

$$E_Q(R_1) = 0 \Leftrightarrow E_Q(S_T) = S_0 e^{rT},$$

$$E_Q(R_2) = 0 \Leftrightarrow E_Q((S_T - K)_+) = D_0 e^{rT}.$$

Από την πρώτη εξίσωση προσδιορίζουμε το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου Q. Αρκεί να προσδιορίσουμε το q. Συγκεκριμένα θα έχουμε

$$E_Q(S_T) = qS_0 b + (1 - q)S_0 a = S_0 e^{rT} \Leftrightarrow q = \frac{e^{rT} - a}{b - a}.$$

Ισχύει ότι $q \in (0,1)$ διότι έχουμε δείξει παραπάνω ότι θα πρέπει $a < e^{rT} < b$. Επομένως, υπό το Q, η τιμή της μετοχής κινείται άνω ($S_T = S_0 b$) με πιθανότητα q και κάτω ($S_T = S_0 a$) με πιθανότητα $1 - q$.

Τώρα, για να ισχύει και η δεύτερη εξίσωση θα πρέπει το D_0 να είναι ίσο με

$$D_0^* = e^{-rT} E_Q((S_T - K)_+) = e^{-rT}(q(S_0 b - K)_+ + (1 - q)(S_0 a - K)_+)$$

όπου $q = \frac{e^{rT} - a}{b - a}$. Άρα προέκυψε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 6. *Στο διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου δεν υπάρχει arbitrage αν και μόνο αν η αξία ενός call option στο χρόνο* 0 *είναι*

$$C^* = D_0^* = e^{-rT} E_Q((S_T - K)_+)$$

όπου Q είναι το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου.

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, το παραπάνω ισχύει γενικότερα. Δηλαδή για οποιοδήποτε ΠΧΠ και σε συνθετότερα μοντέλα κίνησης της τιμής της μετοχής.

Άσκηση 3. *Στο διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου*: Στην αγορά διατίθεται ένα long call συμβόλαιο (επί μιας μετοχής με σημερινή αξία $S_0 = 100$ ευρώ) με χρόνο εξάσκησης T τρείς μήνες και τιμή εξάσκησης $K = 105$ ευρώ. Το επιτόκιο των ομολόγων της αγοράς είναι $r = 2\%$. Ποια η πιθανότητα ουδέτερου κινδύνου και ποια η τιμή ισορροπίας C^* του call option, αν μετά από τρείς μήνες η τιμή της μετοχής θα είναι είτε $S_T = 120$, είτε $S_T = 80$ ευρώ με πιθανότητες p και $1 - p$ αντίστοιχα;

Λύση. (α) Η τιμή ισορροπίας C^* του long call συμβολαίου θα είναι ίση με

$$C^* = e^{-rT} E_Q(S_T - K)_+ = e^{-rT}(q(S_0 b - K)_+ + (1 - q)(S_0 a - K)_+)$$

όπου b = 120/100 = 1.2, a = 80/100 = 0.8, και η πιθ. ουδέτερου κινδύνου είναι

$$q = \frac{e^{rT} - a}{b - a} = \frac{e^{0.02 \cdot \frac{3}{12}} - 0.8}{1.2 - 0.8} \approx 0.5125.$$

Αντικαθιστώντας, θα είναι $C^* = e^{-0.02 \cdot \frac{3}{12}} \cdot 0.5125(120 - 105) \approx 7.65$.

Άσκηση 4. Θεωρούμε το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου στο οποίο διατίθεται προς αγορά ή πώληση μια μετοχή και ένα ΠΧΠ (επί της μετοχής) με τελική αξία D_T.

(α) Ποιες είναι οι βασικές επενδύσεις και ποια τα αντίστοιχα κέρδη;

(β) Να βρείτε το μέτρο πιθανότητας Q ουδέτερου κινδύνου και τη δίκαιη (NA) τιμή του ΠΧΠ στο χρόνο 0.

(γ) Να βρείτε τη δίκαιη τιμή του ΠΧΠ στο χρόνο 0 όταν $D_T = I(K > S_T) = 1$ αν $K > S_T$ και 0 διαφορετικά (digital put option) με $S_0 a < K < S_0 b$.

Λύση (α). Δυνατές καταστάσεις: ω_1:*κίνηση μετοχής πάνω*, ω_2:*κίνηση μετοχής κάτω*. Υπάρχουν οι ακόλουθες δύο βασικές επενδύσεις:

ΒΕ1: (*δάνειο* S_0 *για την*) *αγορά* 1 *μετοχής στο χρόνο* 0,
ΒΕ2: (*δάνειο* D_0 *για την*) *αγορά ενός put option* (*θέση long*) *στο χρόνο* 0.

Οι αποδόσεις τους στο χρόνο T θα είναι $R_1 = S_T - S_0 e^{rT}$ και $R_2 = D_T - D_0 e^{rT}$.

(β) Από το ΘΑ, δεν υπάρχει arbitrage $\Leftrightarrow$ υπάρχει Q (με $Q(\{\omega_1\}) = q \in (0,1)$, $Q(\{\omega_2\}) = 1 - q$) τέτοιο ώστε:

$$E_Q(R_1) = 0 \Leftrightarrow E_Q(S_T) = S_0 e^{rT}, \qquad E_Q(R_2) = 0 \Leftrightarrow E_Q(D_T) = D_0 e^{rT}.$$

Από την πρώτη εξίσωση προσδιορίζουμε το μέτρο πιθ. ουδέτερου κινδύνου Q:

$$E_Q(S_T) = q S_0 b + (1-q) S_0 a = S_0 e^{rT} \Leftrightarrow q = \frac{e^{rT} - a}{b - a}.$$

Για να ισχύει και η δεύτερη εξίσωση θα πρέπει το D_0 να είναι ίσο με

$$D_0^* = e^{-rT} E_Q(D_T)$$

(γ) Από το (β), η δίκαιη τιμή του ΠΧΠ είναι

$$\begin{aligned} D_0^* &= e^{-rT} E_Q(D_T) = e^{-rT} E_Q\big(I(K > S_T)\big) \\ &= e^{-rT}\big(q I(K > S_0 b) + (1-q) I(K > S_0 a)\big) = e^{-rT}(1-q)\,. \end{aligned}$$

3.2 Δίκαιη (NA) αξία ΠΧΠ στο διωνυμικό μοντέλο n περιόδων

Το διωνυμικό μοντέλο n αποτελεί επέκταση του διωνυμικού μοντέλο μιας περιόδου. Θεωρούμε ότι ο χρόνος είναι και πάλι διακριτός: $t = 0, h, 2h, \dots, nh = T$. Σε κάθε χρονικό σημείο η τιμή της μετοχής κινείται είτε προς τα πάνω είτε προς τα κάτω με πιθανότητες p και $1 - p$ αντίστοιχα,

$$S_{ih} = \begin{cases} S_{(i-1)h} b, & \text{με πιθ. } p \\ S_{(i-1)h} a, & \text{με πιθ. } 1-p \end{cases} \quad \text{για } i = 1,2, \dots, n.$$

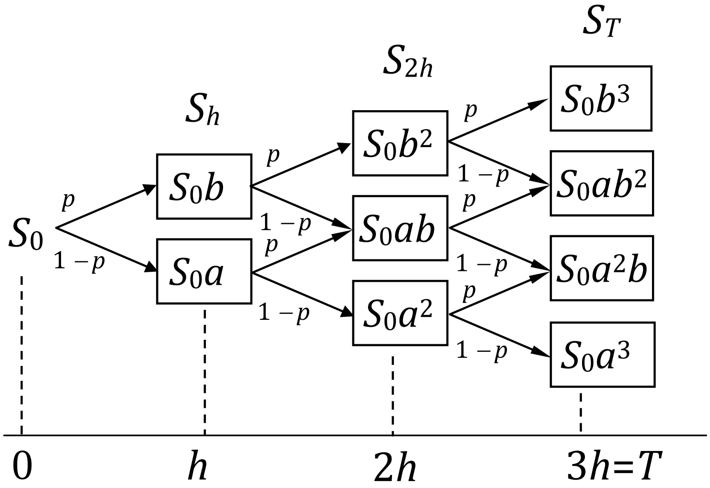
Όπως και στο μοντέλο μιας περιόδου υποθέτουμε ότι $a < e^{rh} < b$. Οι δυνατές καταστάσεις της αγοράς είναι όσες και οι δυνατές διαδρομές της τιμής $S_0, S_h, \dots, S_{nh}$ (2^n το πλήθος), δηλαδή

$$\Omega = \big\{(a_1, a_2, \dots, a_n), a_i \in \{0,1\}\big\} = \{0,1\}^n,$$

όπου π.χ. το $\omega = (1,0,1,1,..,0) \in \Omega$ αντιστοιχεί στην διαδρομή

$$S_h = S_0 b,\ \ S_{2h} = S_h a,\ \ S_{3h} = S_{2h} b,\ \ S_{4h} = S_{3h} b, \dots,\ \ S_{nh} = S_{(n-1)h} a$$

(1: κίνηση άνω, 0 κίνηση κάτω). Π.χ. για $n = 3$ θα έχουμε σχηματικά:



Θεωρώντας βοηθητικές τ.μ. $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$:

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{αν } S_{ih} = S_{(i-1)h}b \\ 0, & \text{αν } S_{ih} = S_{(i-1)h}a \end{cases}$$

θα έχουμε ότι $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ είναι το πλήθος των κινήσεων «άνω» της S και άρα

$$S_T = S_0 b^Y a^{n-Y}$$

(έχουμε $n - Y$ κινήσεις «κάτω») και η $Y \sim Bi(n,p)$ (ακολουθεί Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους (n,p)).

Θεωρούμε γενικότερα ότι στην αγορά διατίθεται ένα ΠΧΠ με $D_T = g(S_T)$ (αν π.χ. $g(x) = (x-K)_+$ τότε το ΠΧΠ είναι δικαίωμα αγοράς). Εδώ οι βασικές επενδύσεις σε καθένα από τους χρόνους ih, $i = 0,1,\dots,n-1$, είναι $2n$ το πλήθος:

(ΒΕi1) *αγορά μιας μετοχής στο χρόνο ih (λαμβάνοντας δάνειο S_{ih}),*
(ΒΕi2) *αγορά ενός ΠΧΠ στο χρόνο ih (λαμβάνοντας δάνειο D_{ih}).*

Οι αντίστοιχες αποδόσεις (στον χρόνο T) θα είναι

$$R_{i1} = S_T - S_{ih}e^{r(T-ih)} \quad \text{και} \quad R_{i2} = g(S_T) - D_{ih}e^{r(T-ih)}.$$

Από το ΘΑ έχουμε την ακόλουθη Πρόταση *στο διωνυμικό μοντέλο n περιόδων.*

Πρόταση 7. (α) *Υπάρχει μέτρο πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου, Q, υπό το οποίο η τιμή της μετοχής κινείται σε διαδοχικούς χρόνους: άνω με πιθ. q και κάτω με πιθ. $1-q$, όπου*

$$q = \frac{e^{rh} - a}{b - a} \in (0,1).$$

(β) *Δεν υπάρχει Arbitrage αν και μόνο αν η αξία στο χρόνο t ενός ΠΧΠ είναι*

$$D_t^* = e^{-r(T-t)} E_Q(g(S_T)|S_t), \qquad t = 0, h, \dots, T$$

Ειδικότερα, για $t = 0$, η ΝΑ αξία του ΠΧΠ *θα είναι*

$$C^* = D_0^* = e^{-rT} E_Q\big(g(S_T)\big).$$

Απόδειξη. Από το ΘΑ: δεν υπάρχει arbitrage ⟺ υπάρχει Q τέτοιο ώστε

$$E_Q(R_{i1}|S_{ih}) = 0, \qquad E_Q(R_{i2}|S_{ih}) = 0, \qquad i = 0,1,\dots,n-1.$$

(εδώ εφαρμόζεται μια επέκταση του ΘΑ, θα πρέπει οι αναμενόμενες αποδόσεις των ΒΕ να είναι 0 στον χρόνο που αυτές λαμβάνονται, και αφού π.χ. η $BEi1$ λαμβάνεται στο χρόνο ih, στο χρόνο αυτό θα είναι γνωστή η τιμή S_{ih})

Θεωρούμε ως μέτρο πιθανότητας Q αυτό που σε κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο $\omega = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \{0,1\}^n = \Omega$ αντιστοιχεί πιθανότητα

$$Q(\{\omega\}) = \prod_{i=1}^{n} q^{a_i}(1-q)^{1-a_i}.$$

(π.χ. αν $n = 3$, στο $\omega = (0,1,1)$ αντιστοιχεί η πιθανότητα $Q(\{\omega\}) = (1-q)q^2$). Δηλαδή υπό το Q, η διαδικασία $S_0, S_h, \dots, S_{nh}$ κινείται μεταξύ διαδοχικών χρόνων άνω ή κάτω με πιθανότητες q και $1-q$ αντίστοιχα. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι

$$S_T = S_{nh} = S_{ih} b^W a^{n-i-W}, \qquad i = 0,1, \dots, n-1$$

όπου $W = \sum_{j=i+1}^{n} Y_i \sim_Q \mathrm{Bi}(n-i, q)$ και επομένως, υπό το Q θα έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} E_Q(S_T|S_{ih}) &= E_Q\left(S_{ih} b^W a^{n-i-W} \middle| S_{ih}\right) = S_{ih} \sum_{w=0}^{n-i} b^w a^{n-i-w} Q(W = w) \\ &= S_{ih} \sum_{w=0}^{n-i} b^w a^{n-i-w} \binom{n-i}{w} q^w (1-q)^{n-i-w} \\ &= S_{ih} \sum_{w=0}^{n-i} \binom{n-i}{w} (bq)^w (a-aq)^{n-i-w} = S_{ih}(bq + a - aq)^{n-i} \\ &= S_{ih} e^{r(n-i)h}, \end{aligned}$$

(*δηλαδή η αναμενόμενη απόδοση μετοχής = απόδοση ομολόγου*). Από την παραπάνω προκύπτει άμεσα ότι, για $i = 0,1,2, \dots, n-1$,

$$E_Q(R_{i1}|S_{ih}) = E_Q(S_T|S_{ih}) - S_{ih} e^{r(T-ih)} = 0.$$

και επομένως το Q που ορίσαμε παραπάνω μηδενίζει τις πρώτες n αναμενόμενες αποδόσεις των ΒΕi1. Για να μηδενίζονται και οι υπόλοιπες n αναμενόμενες αποδόσεις $E_Q(R_{i2}|S_{ih})$, $i = 0,1,2, \dots, n-1$ αρκεί να είναι

$$E_Q(R_{i2}|S_{ih}) = E_Q(g(S_T)|S_{ih}) - D_{ih} e^{r(T-ih)} = 0,$$

δηλαδή αρκεί να ισχύει ότι $D_{ih}^* = e^{-r(T-ih)} E_Q(g(S_T)|S_{ih})$, το οποίο έπρεπε να δειχθεί. □

Η παραπάνω πρόταση διατυπώνεται και ως εξής: Η ΝΑ αξία ενός ΠΧΠ στο διωνυμικό μοντέλο είναι ίση με την *παρούσα αξία της αναμενόμενης απόδοσής του υπό το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου*.

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η παραπάνω διατύπωση ισχύει και σε μοντέλα συνεχούς χρόνου. Συγκεκριμένα θα εξετάσουμε σε επόμενη παράγραφο το κλασικό μοντέλο αποτίμησης, το μοντέλο των Black and Scholes.

Ερωτήσεις Ανακεφαλαίωσης 3ου Κεφαλαίου

Ερώτηση 7. Πως κινείται η τιμή της μετοχής στο διωνυμικό μοντέλο n περιόδων υπό το πραγματικό μέτρο P και υπό το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου Q;

Ερώτηση 8. Ποιες είναι οι Βασικές Επενδύσεις στο διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου και ποιες οι αντίστοιχες αποδόσεις;

Ερώτηση 9. Ποιες είναι οι δυνατές καταστάσεις της αγοράς στο διωνυμικό μοντέλο $n = 3$ περιόδων;

4 Το κλασσικό μοντέλο αποτίμησης ΠΧΠ (Black and Scholes)

4.1 Κίνηση Brown

Θα προσαρμόσουμε σε συνεχή χρόνο τις έννοιες και τα αποτελέσματα που προέκυψαν κατά τη μελέτη του διωνυμικού μοντέλου. Αρχικά θα πρέπει να περιγράψουμε πως κινείται η διαδικασία $S=\{S_t, t\in[0,T]\}$ τιμών του υποκείμενου τίτλου (μετοχής) σε συνεχή χρόνο. Ξεκινάμε από το γνωστό διωνυμικό μοντέλο κίνησης της τιμής της μετοχής στα χρονικά σημεία $0,h,2h,\dots,nh=T$ του $[0,T]$. Υπενθυμίζεται ότι στο διωνυμικό μοντέλο έχουμε θεωρήσει ότι

$$S_{ih} = \begin{cases} S_{(i-1)h}b, & \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta.\ p \\ S_{(i-1)h}a, & \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta.\ 1-p \end{cases}, \quad i=1,2,\dots,n.$$

Θα μελετήσουμε τα χαρακτηριστικά της παραπάνω στοχαστικής διαδικασίας, όταν το πλήθος n των χρονικών περιόδων στο $[0,T]$ συγκλίνει στο άπειρο (ή ισοδύναμα $h=T/n\to 0$). Αφού το μήκος h των χρονικών περιόδων θα συγκλίνει στο 0, θα πρέπει τα $a,b\to 1$ (με $a<1<b$) και $p\to 1/2$ με κατάλληλες τάξεις σύγκλισης ώστε το οριακό μοντέλο συνεχούς χρόνου να μην είναι εκφυλισμένο (να μην απειρίζει ούτε να μηδενίζεται). Θεωρούμε τώρα συγκεκριμένα ότι

$$b=e^{\sigma\sqrt{h}}, \qquad a=e^{-\sigma\sqrt{h}}, \qquad p=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{h}\right)$$

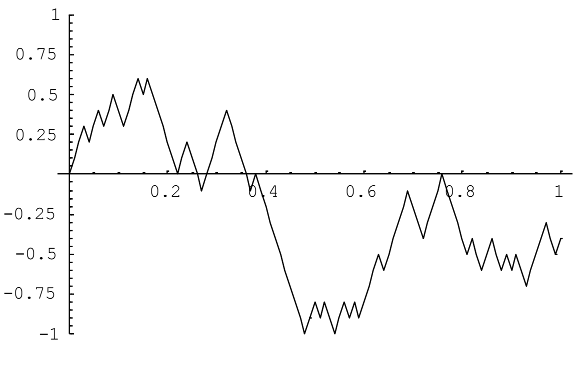
για κάποιες παραμέτρους μ,σ και $h=T/n$, όπου n το πλήθος των περιόδων. Συνεπώς θα έχουμε τώρα το διωνυμικό μοντέλο

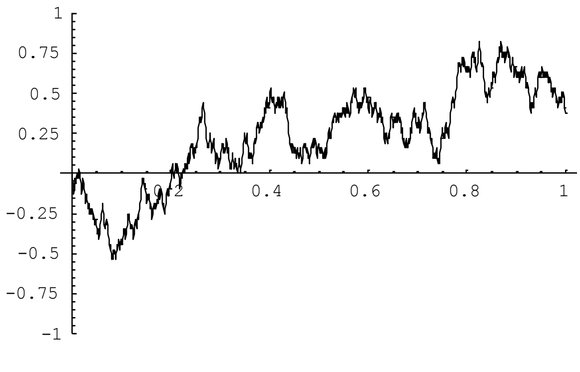
$$S_{ih} = \begin{cases} S_{(i-1)h}e^{\sigma\sqrt{h}}, & \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta.\ p=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{h}\right) \\ S_{(i-1)h}e^{-\sigma\sqrt{h}}, & \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta.\ 1-p \end{cases}, \quad i=1,2,\dots,n.$$

Είναι απλούστερο αρχικά να μελετήσουμε το αντίστοιχο προσθετικό μοντέλο αντί το παραπάνω πολλαπλασιαστικό. Θεωρούμε την $X_t=\ln S_t$, $t\geq 0$, για την οποία ισχύει ότι

$$X_{ih} = \begin{cases} X_{(i-1)h}+\sigma\sqrt{h}, & \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta.\ p \\ X_{(i-1)h}-\sigma\sqrt{h}, & \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta.\ 1-p \end{cases}, \quad i=1,2,\dots,n,$$

(στο $[(i-1)h,ih]$ θεωρούμε ότι η X κινείται γραμμικά από το $X_{(i-1)h}$ στο X_h). Η παραπάνω στοχαστική διαδικασία καλείται και τυχαίος περίπατος διότι η επόμενη τιμή της είναι ίση με την προηγούμενη συν ένα βήμα που γίνεται τυχαία προς τα πάνω ή προς τα κάτω. Για παράδειγμα, δύο τυχαίες πραγματοποιήσεις (διαδρομές) της $\{X_t,\ t\in[0,1]\}$ (για $h=0.01$ και 0.001) με $\mu=0,\sigma=1,X_0=0$, θα έχουν την μορφή:





Προκειμένου να μελετήσουμε την οριακή συμπεριφορά της $\{X_t, t\in[0,1]\}$ (όταν $n\to\infty$) θεωρούμε και πάλι τις βοηθητικές (ανεξάρτητες και ισόνομες) τ.μ.

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{αν } X_{ih} = X_{(i-1)h} + \sigma\sqrt{h} \\ 0, & \text{αν } X_{ih} = X_{(i-1)h} - \sigma\sqrt{h} \end{cases}, \qquad i = 1,2,\dots,n.$$

Θα ισχύει για σταθερό $t = kh$ ότι

$$X_t - X_0 = X_{kh} - X_0 = \sigma\sqrt{h}\sum_{i=1}^{k} Y_i - \sigma\sqrt{h}\left(k - \sum_{i=1}^{k} Y_i\right) \underset{h=t/k}{=} 2\sigma\sqrt{\frac{t}{k}}\sum_{i=1}^{k} Y_i - k\sigma\sqrt{\frac{t}{k}}$$

$$= 2\sigma\sqrt{tp(1-p)}\frac{\sum_{i=1}^{k} Y_i - kp}{\sqrt{kp(1-p)}} + (2p-1)\sigma\sqrt{tk} = a_k Z_k + \mu t.$$

όπου $a_k = 2\sigma\sqrt{tp(1-p)},\ Z_k = \frac{\sum_{i=1}^{k} Y_i - kp}{\sqrt{kp(1-p)}}$. Θεωρώντας ότι $h \to 0, k = t/h \to \infty$ θα έχουμε

$$a_k \to 2\sigma\sqrt{t\tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{1}{2}\right)} = \sigma\sqrt{t},$$

Επίσης είναι γνωστό από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα ότι η κατανομή ενός τυποποιημένου αθροίσματος k ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών συγκλίνει στην τυπική κανονική ($N(0,1)$) κατανομή όταν το $k \to \infty$. Επομένως η συνάρτηση κατανομής F_k της τ.μ.

$$Z_k = \frac{\sum_{i=1}^{k} Y_i - E\left(\sum_{i=1}^{k} Y_i\right)}{\sqrt{V\left(\sum_{i=1}^{k} Y_i\right)}}$$

θα συγκλίνει στη συνάρτηση κατανομής Φ της $N(0,1)$ (δηλαδή $F_k(x) \to \Phi(x), x \in R$) όταν $k \to \infty$. Άρα, οριακά, η κατανομή της τ.μ.

$$X_t - X_0 = a_k Z_k + \mu t$$

θα είναι ίση με την κατανομή της τ.μ. $\sigma\sqrt{t}Z + \mu t$ όπου $Z \sim N(0,1)$, η οποία είναι κανονική με μέση τιμή μt και διασπορά $\sigma^2 t$. Συνεπώς, σε συνεχή χρόνο θα πρέπει για κάθε $t > 0$, η κατανομή της τ.μ.

$$X_t - X_0 \sim N(t\mu, t\sigma^2).$$

Αν τώρα ως προσαύξηση της διαδικασίας $X = \{X_t, t \geq 0\}$ σε κάθε χρονικό διάστημα $(y, y+t]$ θεωρηθεί η διαφορά $X_{t+y} - X_y$, παρατηρούμε ότι,

(1) Η X έχει ***κανονικές προσαυξήσεις***: για κάθε $y \geq 0, t > 0$

$$X_{y+t} - X_y \sim N(\mu t, \sigma^2 t).$$

Αυτό ισχύει διότι κάθε $X_{y+t} - X_y$ έχει την ίδια κατανομή με την $X_{0+t} - X_0$ αφού σε κάθε $(y, y+t]$ ισχύει ακριβώς το ίδιο μοντέλο τυχαίου περιπάτου με το $(0, t]$.

(2) Η X έχει ***ανεξάρτητες προσαυξήσεις***: για κάθε $y \geq 0, t > 0$

$$X_{y+t} - X_y \text{ ανεξάρτητη από το παρελθόν } X_u, u \leq y.$$

Αυτό ισχύει διότι κάθε μια από τις αυξομειώσεις $\Delta_{ih} = X_{ih} - X_{(i-1)h}$ είναι ίση με $\sigma\sqrt{h}$ ή $-\sigma\sqrt{h}$ (με πιθ. p και $(1-p)$) ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες. Επομένως η συμπεριφορά της διαδικασίας X σε ένα χρονικό διάστημα $(y, y+t]$ είναι ανεξάρτητη από την συμπεριφορά της X σε οποιοδήποτε άλλο χρονικό διάστημα, ξένο από το $(y, y+t]$. Με άλλα λόγια η X έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις σε ξένα χρονικά διαστήματα.

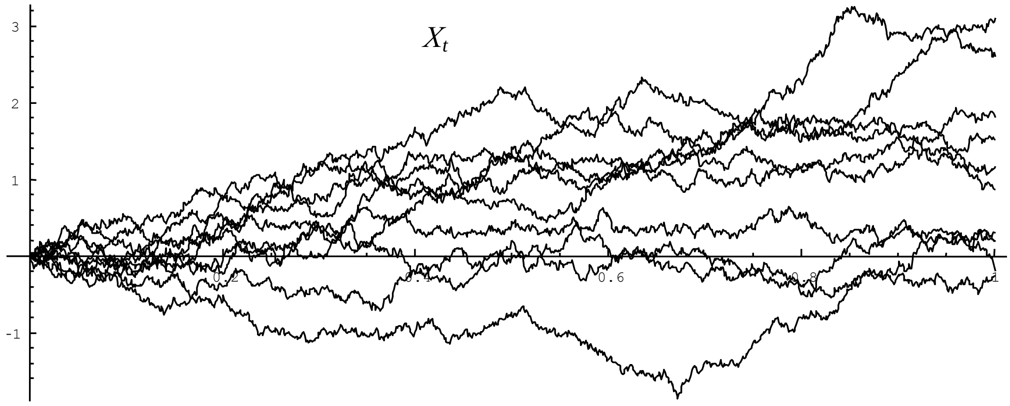
Αρκούν τα δύο παραπάνω χαρακτηριστικά για να ορίσουμε και αυστηρότερα την διαδικασία που περιγράφει την κίνηση της X.

Ορισμός. *Μία σ.δ.* $\{X_t, t \geq 0\}$ *καλείται* ***κίνηση Brown*** $BM(\mu, \sigma^2)$ *με παραμέτρους*

$\mu \in R$ *(τάση - drift parameter)* *και* $\sigma > 0$ *(μεταβλητότητα - volatility)*

αν έχει κανονικές ($N(\mu t, \sigma^2 t)$ *σε διάστημα μήκους* t) *και ανεξάρτητες προσαυξήσεις (σε ξένα χρονικά διαστήματα).*

Η αρχική τιμή X_0 της διαδικασίας είναι γνωστή και συνήθως $X_0 = 0$. Για παράδειγμα 10 τυχαίες διαδρομές της κίνησης Brown με $\mu = 1, \sigma = 1$ ($t \in [0,1]$) είναι

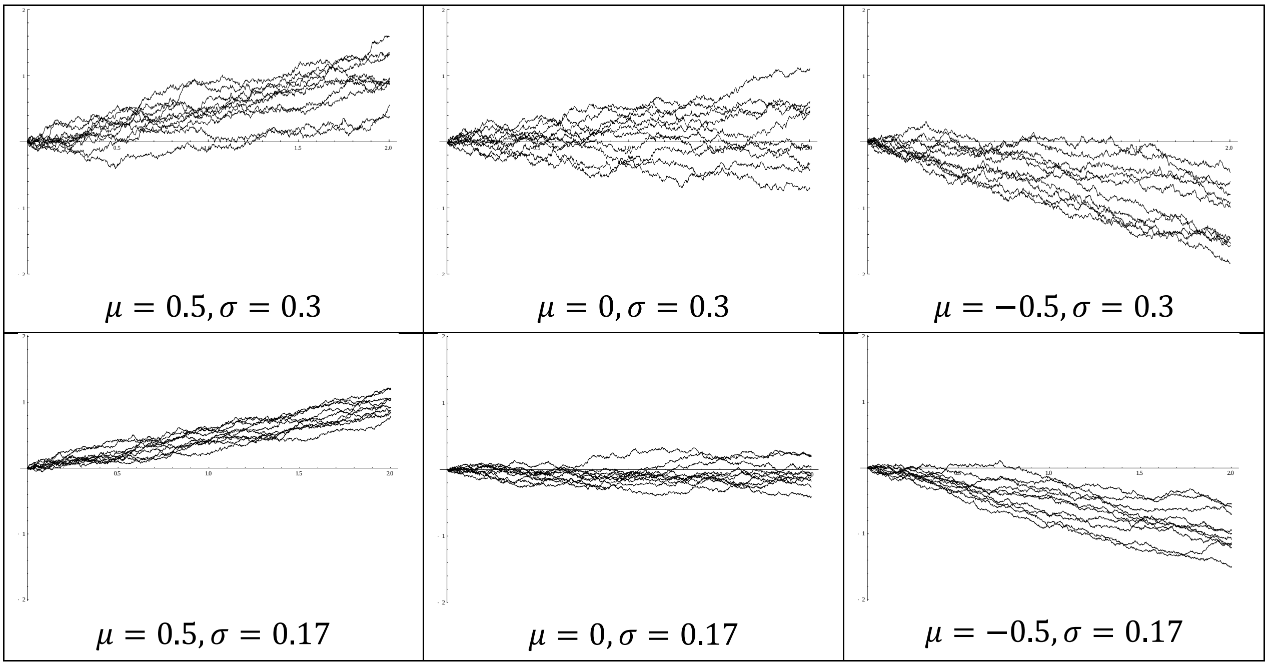


Μία διαδρομή (πραγματοποίηση) της κίνησης Brown ($X(\omega) = \{X_t(\omega), t \geq 0\}, \omega \in \Omega$) είναι ***συνεχής*** συνάρτηση του t, αλλά δεν είναι ***πουθενά παραγωγίσιμη*** (με πιθ. 1). Αυτό είναι εύκολο να γίνει αντιληπτό και από το διακριτό ανάλογο της κίνησης Brown που παρουσιάστηκε παραπάνω. Πράγματι, στον διακριτό τυχαίο περίπατο είδαμε ότι, σε διάστημα μήκους h, η διαδικασία κινείται άνω ή κάτω κατά $\sigma\sqrt{h}$, και επομένως η «παράγωγος» της στο διάστημα αυτό θα είναι ίση με

$$\frac{\sigma\sqrt{h}}{h} \to_{h\to\infty} \infty \quad \text{ή} \quad -\frac{\sigma\sqrt{h}}{h} \to_{h\to\infty} -\infty$$

με πιθ. p και $1-p$ αντίστοιχα.

Η παράμετρος μ δείχνει προς τα που έχει την τάση να κινηθεί η διαδικασία. Αν $\mu > 0$ η X έχει ανοδική τάση, ενώ αν $\mu < 0$ έχει καθοδική τάση. Η παράμετρος σ εκφράζει την μεταβλητότητά της. Αυτό διαφαίνεται και στα ακόλουθα γραφήματα όπου παρουσιάζονται στο ίδιο σχήμα 10 τυχαίες πραγματοποιήσεις της $X_t, t \in [0,2]$ για διάφορες τιμές των παραμέτρων μ, σ.



$\mu = 0.5, \sigma = 0.3$	$\mu = 0, \sigma = 0.3$	$\mu = -0.5, \sigma = 0.3$
$\mu = 0.5, \sigma = 0.17$	$\mu = 0, \sigma = 0.17$	$\mu = -0.5, \sigma = 0.17$

4.2 Η Γεωμετρική Κίνηση Brown

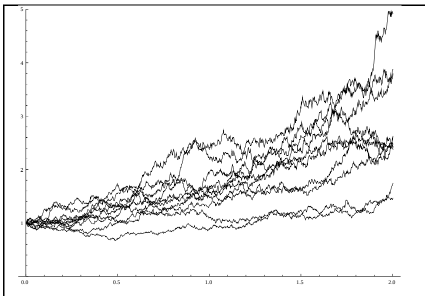
Υπενθυμίζεται ότι πρωτίστως μας ενδιαφέρει να εκφράσουμε σε συνεχή χρόνο την διαδικασία $S = \{S_t, t \geq 0\}$ για την οποία σε διακριτό χρόνο ισχύει

$$S_{ih} = S_{(i-1)h} e^{\pm\sigma\sqrt{h}}, \quad i = 1,2, \dots, n.$$

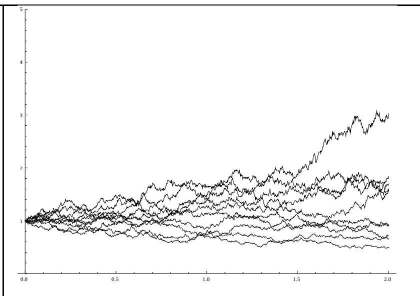
Η διαδικασία X που μελετήσαμε παραπάνω (και είδαμε ότι είναι ΒΜ(μ, σ^2)) είναι ο λογάριθμος της S (δηλ. $X_t = \ln S_t$) και επομένως αντίστροφα η S_t θα γράφεται

$$S_t = e^{X_t}, \qquad t \geq 0.$$

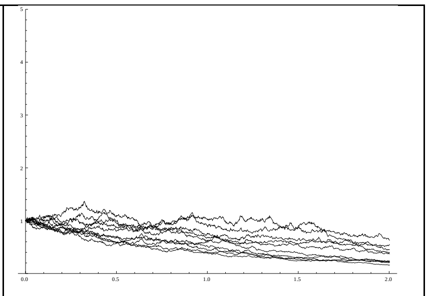
Μια τέτοια στοχαστική διαδικασία, ο λογάριθμος της οποίας είναι μία κίνηση Brown, καλείται *εκθετική* ή ***γεωμετρική κίνηση Brown***, $GBM(\mu, \sigma^2)$. Η S έχει πολλά από τα χαρακτηριστικά της X, π.χ. μία διαδρομή $S_t(\omega), t \geq 0$ της S είναι και πάλι μία *συνεχής* συνάρτηση του t η οποία δεν είναι *πουθενά παραγωγίσιμη* (με πιθ. 1). Στο εξής θα θεωρούμε ότι η διαδικασία $S = \{S_t, t \geq 0\}$ που περιγράφει την κίνηση της τιμής μιας μετοχής (γενικότερα ενός risky asset) είναι μια γεωμετρική κίνηση Brown ($GBM(\mu, \sigma^2)$), δηλαδή $S_t = e^{X_t}, t \geq 0$ όπου η $X = \{X_t, t \geq 0\}$ είναι μια κίνηση Brown ($BM(\mu, \sigma^2)$). Η παράμετρος μ θα εκφράζει την τάση, και η σ^2 την μεταβλητότητα του λογαρίθμου των τιμών της μετοχής. Στα ακόλουθα γραφήματα παρουσιάζονται στο ίδιο σχήμα 10 τυχαίες πραγματοποιήσεις της $S_t, t \in [0,2]$ για διάφορες τιμές των παραμέτρων μ, σ.



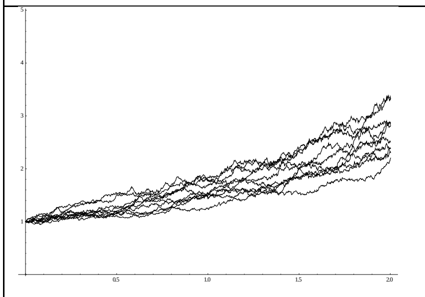
$\mu = 0.5, \sigma = 0.3$



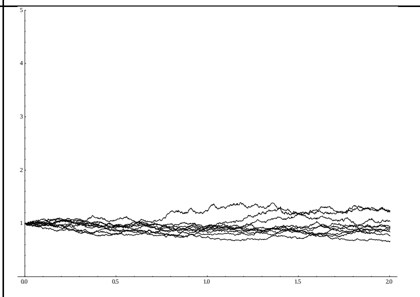
$\mu = 0, \sigma = 0.3$



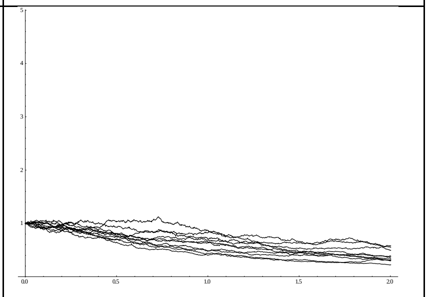
$\mu = -0.5, \sigma = 0.3$



$\mu = 0.5, \sigma = 0.17$



$\mu = 0, \sigma = 0.17$



$\mu = -0.5, \sigma = 0.17$

Στην βιβλιογραφία έχουν προταθεί πάρα πολλά μοντέλα περιγραφής της κίνησης της S αλλά η GBM είναι το απλούστερο μοντέλο που τις περισσότερες περιπτώσεις περιγράφει αρκετά ικανοποιητικά αυτό που παρατηρείται στην πραγματική αγορά.

Αν θέσουμε $L = S_{y+t}/S_y$ για $t > 0, y \geq 0$ παρατηρούμε ότι

$$\ln L = \ln \frac{S_{y+t}}{S_y} = \ln S_{y+t} - \ln S_y = X_{y+t} - X_y \sim N(t\mu, t\sigma^2).$$

Δηλαδή ο λογάριθμος της τυχαίας μεταβλητής $L = S_{y+t}/S_y$ (=ποσοστιαία προσαύξηση της S στο $(y, y+t]$) ακολουθεί κανονική κατανομή με παραμέτρους $t\mu, t\sigma^2$. Επομένως η συνάρτηση κατανομής F_L της L για κάθε $x \geq 0$ θα είναι,

$$F_L(x) = P(L \leq x) = P(\ln L \leq \ln x) = P\left(\frac{\ln L - t\mu}{\sigma\sqrt{t}} \leq \frac{\ln x - t\mu}{\sigma\sqrt{t}}\right) = \Phi\left(\frac{\ln x - t\mu}{\sigma\sqrt{t}}\right),$$

όπου Φ είναι η συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής $N(0,1)$. Από την παραπάνω σχέση, παραγωγίζοντας ως προς x, προκύπτει η σ.π.π. f_L της L. Συγκεκριμένα, για $x \geq 0$,

$$f_L(x) = \frac{d}{dx}P(L \leq x) = \frac{d}{dx}\Phi\left(\frac{\ln x - t\mu}{\sigma\sqrt{t}}\right) = \varphi\left(\frac{\ln x - t\mu}{\sigma\sqrt{t}}\right)\frac{1}{x\sigma\sqrt{t}} = \frac{e^{-\frac{(\ln x - t\mu)^2}{2t\sigma^2}}}{x\sqrt{2\pi t\sigma^2}},$$

όπου $\varphi(x) = \exp(-x^2/2)/(2\pi)^{1/2}$ είναι η σ.π.π. της $N(0,1)$. Η παραπάνω κατανομή της τ.μ. L (της οποίας ο λογάριθμος ακολουθεί $N(t\mu, t\sigma^2)$) είναι γνωστή ως ***λογαριθμοκανονική κατανομή*** με παραμέτρους $t\mu$ και $t\sigma^2$ (θα συμβολίζεται με $LN(t\mu, t\sigma^2)$).

Συνοψίζοντας, αν η τ.μ. S_t εκφράζει την τιμή μιας μετοχής στο χρόνο t τότε η ποσοστιαία προσαύξηση, S_{y+t}/S_y, της τιμής της μετοχής στα άκρα κάθε χρονικού διαστήματος $(y, y+t]$ μήκους t, ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή με παραμέτρους $(\mu t, \sigma^2 t)$. Ισοδύναμα, ο λογάριθμος του πηλίκου S_{y+t}/S_y ακολουθεί κανονική κατανομή με παραμέτρους $(\mu t, \sigma^2 t)$.

Οι ροπές m τάξης της τ.μ. S_t θα είναι

$$E(S_t^m) = S_0^m E\left(\frac{S_t^m}{S_0^m}\right) = S_0^m E\left(\frac{e^{mX_t}}{e^{mS_0}}\right) = S_0^m E\left(e^{m(X_t - X_0)}\right),$$

όπου $X_t - X_0 \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$. Αν τώρα Z μια τ.μ. που ακολουθεί την $N(0,1)$, είναι γνωστό ότι η ροπογεννήτριά της είναι

$$E(e^{wZ}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{wx - \frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{e^{w^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-w)^2}\,dx = e^{w^2/2},$$

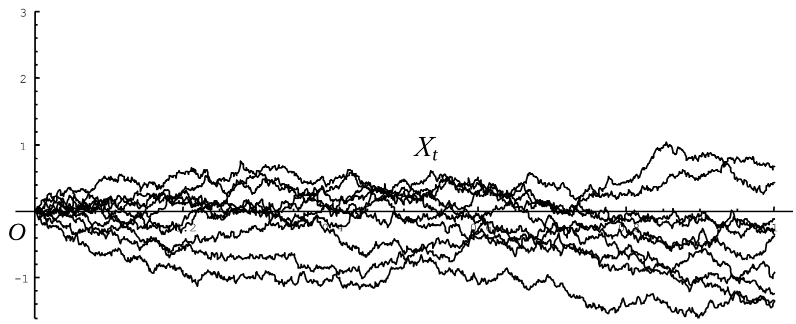
και επομένως τελικά, για $m = 1,2,\ldots$

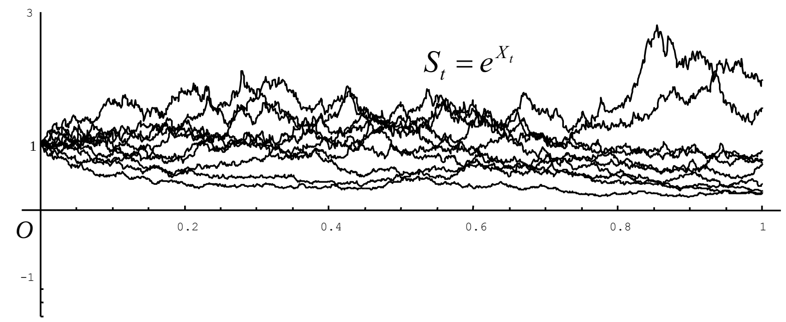
$$E(S_t^m) = S_0^m E\left(e^{m(\mu t + \sigma\sqrt{t}Z)}\right) = S_0^m e^{m\mu t} E\left(e^{m\sigma\sqrt{t}Z}\right) = S_0^m e^{m\mu t + \frac{m^2\sigma^2 t}{2}}.$$

Άρα, για $m = 1$, η αναμενόμενη τιμή της μετοχής στο χρόνο t θα είναι

$$E(S_t) = S_0 e^{t\mu + \frac{1}{2}t\sigma^2}.$$

(Γενικότερα, αν μια τ.μ. $L \sim LN(\alpha, \beta)$ τότε $E(L) = e^{\alpha + \beta/2}$). Μπορούμε να πάρουμε μια εικόνα για την μορφή των πραγματοποιήσεων της $X \sim BM$ και της αντίστοιχης $S \sim GBM$ από τα παρακάτω γραφήματα 10 διαδρομών στο $[0,1]$ ($\mu = -0.1, \sigma = 0.8, X_0 = 0$)





Σύμφωνα με όσα έχουμε εξετάσει, οι τιμές της διαδικασίας X στο χρόνο $t=1$ (δηλ. X_1) προέρχονται από την $N(\mu t=-0.1, \sigma^2 t= 0.64)$, ενώ οι τιμές της διαδικασίας S στο χρόνο $t=1$ (δηλ. S_1) προέρχονται από την $LN(\mu t=-0.1, \sigma^2 t= 0.64)$, με

$$E(S_1)=S_0 e^{t\mu+\frac{1}{2}t\sigma^2}=e^{-0.1+\frac{1}{2}0.64}\approx 1.24$$

και

$$V(S_1)=E(S_1^2)-E(S_1)^2=S_0^2 e^{2\mu t+\frac{4\sigma^2 t}{2}}-S_0^2 e^{2t\mu+t\sigma^2}\approx 1.39$$

Από την παραπάνω ανάλυση είναι φανερό ότι το συνεχές ανάλογο του διωνυμικού μοντέλου είναι η γεωμετρική κίνηση Brown (GBM). Στη συνέχεια λοιπόν θα θεωρούμε ότι η ανέλιξη της αξίας της μετοχής (risky asset) της αγοράς θα περιγράφεται από μια GBM για κάποιες παραμέτρους μ, σ^2.

Άσκηση 5. Αν $X=\{X_t, t\geq 0\}\sim BM(\mu=1,\sigma^2=2)$, ποια κατανομή ακολουθούν οι τρείς τυχαίες μεταβλητές: X_2-X_0, $X_{3.5}-X_2$, $X_{2.5}-X_{1.5}$. Είναι κάποιες από αυτές ανεξάρτητες μεταξύ τους;

Λύση. Γνωρίζουμε ότι $X_{t+y}-X_y\sim N(\mu t,\sigma^2 t)$. Επομένως

$$\begin{aligned}&X_2-X_0\sim N(2\mu,2\sigma^2)=N(2,4),\\&X_{3.5}-X_2\sim N(1.5\mu,1.5\sigma^2)=N(1.5,3)\\&X_{2.5}-X_{1.5}\sim N(1\mu,1\sigma^2)=N(1,2)\end{aligned}$$

Επίσης οι δύο τ.μ. X_2-X_0 και $X_{3.5}-X_2$ είναι ανεξάρτητες διότι αποτελούν προσαυξήσεις της κίνησης Brown στα ξένα χρονικά διαστήματα (0,2] και (2,3.5].

Άσκηση 6. Αν $X=\{X_t, t\geq 0\}\sim BM(0,1), X_0=0$, να βρεθεί η $E(X_tX_s)$, και ο συντελεστής συσχέτισης $\rho(X_t,X_s)$ για $0\leq s<t$.

Λύση. Θα αξιοποιήσουμε το γεγονός ότι η BM έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις,

$$\begin{aligned}E(X_tX_s)&=E\big((X_t-X_s)X_s+X_s^2\big)=E\big((X_t-X_s)X_s\big)+E(X_s^2)\\&=E(X_t-X_s)E(X_s)+E(X_s^2)=0+E(X_s^2)=V(X_s)=s.\end{aligned}$$

Ο συντελεστής συσχέτισης θα είναι

$$\rho(X_t,X_s)=\frac{E(X_tX_s)-E(X_t)E(X_s)}{\sqrt{V(X_t)}\sqrt{V(X_s)}}=\frac{s-0}{\sqrt{t}\sqrt{s}}=\sqrt{\frac{s}{t}}\in[0,1).$$

Άσκηση 7. Η ανέλιξη της αξίας μιας μετοχής $\{S_t, t\in[0,T]\}$ περιγράφεται από μια GBM (με S_0 = 100). (α) Αν η αναμενόμενη αξία και η τυπική απόκλιση της αξίας της μετοχής στο χρόνο t = 1/12 είναι $\alpha=110$ και $\beta=10$ αντίστοιχα, να βρείτε τις παραμέτρους μ,σ^2 (β) Να βρείτε την $P(S_t>K), K=105$. (υπενθυμίζεται ότι η μέση τιμή και η διασπορά της $LN(\mu,\sigma^2)$ είναι $e^{\mu+\sigma^2/2}$ και $e^{2\mu+\sigma^2}\big(e^{\sigma^2}-1\big)$ αντίστοιχα).

Λύση. (α) Η τ.μ. $S_t/S_0\sim LN(\mu t,\sigma^2 t)$ και επομένως θα ισχύει ότι

$$V(S_t)=S_0^2\,V\left(\frac{S_t}{S_0}\right)=S_0^2 e^{2\mu t+\sigma^2 t}\big(e^{\sigma^2 t}-1\big)=\big(E(S_t)\big)^2\big(e^{\sigma^2 t}-1\big)=\beta^2$$

Επομένως

$$\alpha^2\left(e^{\sigma^2 t}-1\right)=\beta^2 \Rightarrow \sigma^2=\frac{1}{t}\ln\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}+1\right)\approx\ 0.098766$$

και

$$E(S_t)=S_0 e^{t\mu+\frac{1}{2}t\sigma^2}=\alpha \Rightarrow \mu=\frac{1}{t}\ln\frac{\alpha}{S_0}-\frac{1}{2}\sigma^2=\frac{1}{t}\ln\frac{\alpha^2}{S_0\sqrt{\beta^2+\alpha^2}}\approx\ 1.09434$$

(β) Η πιθανότητα που ζητείται είναι

$$P(S_t>K)=P\left(\ln\frac{S_t}{S_0}>\ln\frac{K}{S_0}\right)$$

Και επειδή $\ln\frac{S_t}{S_0}=X_t-X_0\sim N(\mu t,\sigma^2 t)$ θα έχουμε ότι

$$P(S_t>K)=P\left(\frac{\ln(S_t/S_0)-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}>\frac{\ln(K/S_0)-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)=1-\Phi\left(\frac{\ln(K/S_0)-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$
$$\approx 1-\Phi\left(\frac{\ln(105/100)-\ 1.09434/12}{\sqrt{0.098766/12}}\right)\approx 1-\Phi(-0.4674)\approx 0.6799$$

4.3 Το Μοντέλο των Black – Scholes

Θεωρούμε μια χρηματοοικονομική αγορά εξεταζόμενη στο χρονικό διάστημα $[0,T]$ και συμβολίζουμε με Ω το σύνολο των δυνατών καταστάσεων της αγοράς στο $[0,T]$ και με $\mathcal{F}$ το σύνολο των ενδεχομένων του. Στον χώρο $(\Omega,\mathcal{F})$ το πραγματικό μέτρο πιθανότητας είναι P. θεωρούμε ότι στην αγορά διατίθενται οι παρακάτω τίτλοι :

Τίτλος 1 (*riskless asset*) Ένα *ομόλογο* με αξία $B_t=e^{rt}$ στο χρόνο t.

Τίτλος 2 (*risky asset*) Μια *μετοχή* με αξία S_t στο χρόνο t. Υποθέτουμε ότι η $S=\{S_t,t\in[0,T]\}$ ακολουθεί μια γεωμετρική κίνηση Brown ($GBM(\mu,\sigma^2)$) με αρχική τιμή S_0.

Τίτλος 3 (*derivative*). Ένα *παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν* (ΠΧΠ) με χρόνο λήξης T (επί του Τίτλου 2) και τελική αξία D_T. Θεωρούμε ότι η D_T είναι συνάρτηση της S_T, δηλαδή $D_T=g(S_T)$ (ή γενικότερα είναι συνάρτηση της διαδρομής $\{S_t,t\in[0,T]\}$).

Το ζητούμενο τώρα είναι η εύρεση της δίκαιης (NA) αξίας, D_t^*, του ΠΧΠ στο χρόνο $t\in[0,T]$ στο παραπάνω μοντέλο συνεχούς χρόνου. Στο διωνυμικό μοντέλο διακριτού χρόνου προσδιορίσαμε την δίκαιη τιμή οποιουδήποτε ΠΧΠ στο χρόνο t,

$$D_t^*=e^{-r(T-t)}E_Q(g(S_T)|S_t),\qquad t=0,h,\dots,T=nh.$$

όπου η παραπάνω μέση τιμή υπολογίζεται υπό το Q. Αν πάρουμε το όριο του διωνυμικού μοντέλου για $n\to\infty$, θα πρέπει να ισχύει το ίδιο αποτέλεσμα και σε συνεχή χρόνο. Αυτό που απομένει μόνο να βρούμε είναι η κίνηση της τιμής $S=\{S_t,t\in[0,T]\}$ σε συνεχή χρόνο υπό το μέτρο πιθανότητας Q. Για να το εξετάσουμε αυτό αρκεί να ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία με αυτήν που είχαμε υπό το P. Δηλαδή ξεκινάμε από το διωνυμικό μοντέλο και παίρνουμε το όριό του για $h\to 0$. Η μόνη διαφορά είναι ότι υπό το P (που βρήκαμε ότι $S\sim GBM(\mu,\sigma^2)$) είχαμε κίνηση σε κάθε βήμα της S άνω ή κάτω με πιθ. $p=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{h}\right)$ και $1-p$ ενώ υπό το Q η κίνηση αυτή είδαμε ότι γίνεται με πιθ. q και $1-q$ όπου

$$q=\frac{e^{rh}-a}{b-a}=\frac{e^{rh}-e^{-\sigma\sqrt{h}}}{e^{\sigma\sqrt{h}}-e^{-\sigma\sqrt{h}}}\in(0,1).$$

Θεωρούμε λοιπόν και πάλι την $X_t=\ln S_t$, $t\geq 0$ και όμοια βρίσκουμε ότι

$$X_t - X_0 = X_{kh} - X_0 = 2\sigma\sqrt{tq(1-q)}\frac{\sum_{i=1}^{k} Y_i - kq}{\sqrt{kq(1-q)}} + (2q-1)\sigma\sqrt{tk} = a_k Z_k + b_k$$

(είναι ο ίδιος τύπος μόνο που τώρα έχουμε q αντί p). Θεωρώντας και πάλι ότι $h \to 0,\ k = t/h \to \infty$ αποδεικνύεται τώρα ότι, κατά κατανομή,

$$a_k Z_k + b_k \to \sigma\sqrt{t}\,Z + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t \sim N(t\mu^*, t\sigma^2), \qquad \mu^* = r - \frac{\sigma^2}{2}.$$

Επομένως, υπό το Q, η κίνηση της S σε συνεχή χρόνο περιγράφεται και πάλι από μια GBM με παραμέτρους όμως $\mu^* = r - \frac{1}{2}\sigma^2$ και σ^2 (αντί για μ και σ^2 που ισχύει υπό το P). Συνεπώς σε συνεχή χρόνο και υπό το Q, η ποσοστιαία προσαύξηση $S_{y+t}/S_y \sim \mathrm{LN}(\mu^* t, \sigma^2 t)$ και άρα,

$$\frac{S_T}{S_0} \sim_Q \mathrm{LN}(\mu^* T, \sigma^2 T).$$

Επομένως,

$$E_Q(S_t) = S_0 E_Q\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = S_0 e^{t\mu^* + \frac{1}{2}t\sigma^2} = S_0 e^{t\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{1}{2}t\sigma^2} = S_0 e^{rt},$$

δηλαδή, ισχύει κάτι που ήταν αναμενόμενο υπό το *μέτρο πιθανότητας Ουδέτερου Κινδύνου Q*: η *αναμενόμενη απόδοση της μετοχής* (risky asset) είναι ίση με την *απόδοση του ομολόγου* (riskless asset).

Συνοψίζοντας, ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα (RNPF: Risk Neutral Pricing Formula). *Στο μοντέλο Black and Scholes, η δίκαιη (ή ΝΑ) αξία ενός ΠΧΠ με τελική απόδοση D_T στο χρόνο t είναι*

$$D_t^* = e^{-r(T-t)} E_Q(D_T | S_t),$$

όπου Q είναι το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου. Ειδικότερα, για $t = 0$,

$$C^* = D_0^* = e^{-rT} E_Q(D_T).$$

Υπό το Q, η διαδικασία $S = \{S_t, t \in [0, T]\}$ της τιμής της μετοχής είναι μια GBM με παραμέτρους $\mu^* = r - \frac{1}{2}\sigma^2$ και σ^2. Επομένως, η ΝΑ αξία ενός ΠΧΠ είναι ίση με την *παρούσα αξία της αναμενόμενης απόδοσής του υπό το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου*.

Άσκηση 8. Στο μοντέλο των Black and Scholes: Αν ένα ΠΧΠ αποδίδει στο χρόνο T ποσό $D_T = \ln(S_T / S_0)$, ποια θα πρέπει να είναι η δίκαιη (ΝΑ) αρχική του αξία;

Λύση. Από την RNPF η δίκαιη αξία του (στο χρόνο 0) θα είναι

$$C^* = e^{-rT} E_Q(D_T) = e^{-rT} E_Q(\ln(S_T / S_0))$$

όπου, υπό το Q, η τ.μ. $\ln(S_T / S_0) \sim N(T\mu^*, T\sigma^2)$ και επομένως

$$C^* = e^{-rT} T\mu^* = e^{-rT} T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right).$$

Άσκηση 9. Στο μοντέλο των Black and Scholes: Αν ένα digital call option αποδίδει στο χρόνο T ποσό $D_T = I(S_T > K)$ ($= 1$ *αν* $S_T > K$ και 0 αλλιώς), ποια θα πρέπει να είναι η δίκαιη (ΝΑ) αρχική του αξία;

Λύση. Από την RNPF η δίκαιη αξία του (στο χρόνο 0) θα είναι

$$C^* = e^{-rT} E_Q(D_T) = e^{-rT} E_Q\big(I(S_T > K)\big) = e^{-rT} Q(S_T > K).$$

Θα πρέπει να εμφανίσουμε μέσα στην πιθανότητα Q την τ.μ. $Y = \ln(S_T / S_0)$ διότι είναι γνωστό ότι, υπό το Q, αυτή ακολουθεί $N(T(r - \sigma^2/2), T\sigma^2)$. Θα είναι

$$C^* = e^{-rT}Q(S_T > K) = e^{-rT}Q\left(\ln\frac{S_T}{S_0} > \ln\frac{K}{S_0}\right) = e^{-rT}Q\left(Y > \ln\frac{K}{S_0}\right)$$

και τυποποιώντας την Y θα έχουμε τελικά ότι,

$$C^* = e^{-rT}Q\left(\frac{Y-T\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}} > \frac{\ln\frac{K}{S_0}-T\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right) = e^{-rT}\Phi\left(\frac{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T-\ln\frac{K}{S_0}}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

(διότι αν $Z \sim N(0,1)$ τότε $P(Z > x) = 1 - \Phi(x) = \Phi(-x)$).

Άσκηση 10. Στο μοντέλο των Black and Scholes: Αν ένα call option έχει τιμή παράδοσης $K = 0$, ποια θα πρέπει να είναι η δίκαιη (ΝΑ) αρχική του αξία;

Λύση. Η απόδοση του συγκεκριμένου ΠΧΠ θα είναι $D_T = (S_T - K)_+ = S_T$. Από την RNPF η δίκαιη αξία του (στο χρόνο 0) θα είναι

$$C^* = e^{-rT}E_Q(D_T) = e^{-rT}E_Q(S_T) \;\; = e^{-rT}e^{rT}S_0 = S_0.$$

Ουσιαστικά το συγκεκριμένο ΠΧΠ ισοδυναμεί με μία μετοχή που θα λάβουμε στο χρόνο T.

Άσκηση 11. Μία εταιρία σκοπεύει να εκδώσει ένα ΠΧΠ επί μιας μετοχής ΑΑΑ το οποίο μετά από χρόνο T αποδίδει ποσό $D_T = (S_T/S_0)^2$. Ποια θα πρέπει να είναι η δίκαιη (ΝΑ) αξία του συγκεκριμένου ΠΧΠ στο χρόνο 0; (Υπενθυμίζεται ότι η ροπογεννήτρια μιας τ.μ. $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ είναι $E(e^{wZ}) = e^{w\mu + w^2\sigma^2/2}$).

Λύση. Από την RNPF η δίκαιη αξία του (στο χρόνο 0) θα είναι

$$C^* = e^{-rT}E_Q(D_T) = e^{-rT}E_Q((S_T/S_0)^2).$$

Θα πρέπει να εμφανίσουμε μέσα στην μέση τιμή την τ.μ. $Y = \ln(S_T\,/S_0)$ διότι είναι γνωστό ότι, υπό το Q, αυτή ακολουθεί $N(T(r - \sigma^2/2), T\sigma^2)$. Θα είναι

$$C^* = e^{-rT}E_Q\left(e^{2\ln(S_T/S_0)}\right) = e^{-rT}E_Q(e^{2Y}) = e^{-rT}e^{2T\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)+\frac{4(T\sigma^2)}{2}} = e^{(r+\sigma^2)T}.$$

4.4 Ο τύπος των Black and Scholes

Θεωρούμε ένα δικαίωμα αγοράς για το οποίο, ως γνωστόν, $D_T = (S_T - K)_+$. Η δίκαιη (ΝΑ) αξία του στο χρόνο $t = 0$ από την RNPF θα είναι,

$$D_0^* = e^{-rT}E_Q((S_T - K)_+).$$

Η παραπάνω μέση τιμή μπορεί να εκφραστεί μέσω ενός κλειστού τύπου που είναι γνωστός ως τύπος των Black and Scholes. Ειδικότερα έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3 (***Ο τύπος των Black and Scholes για δικαίωμα αγοράς***). *Η δίκαιη (ΝΑ) αξία ενός δικαιώματος αγοράς (με χρόνο λήξης T, τιμή εξάσκησης K) στο χρόνο $t = 0$ είναι*

$$D_0^* = S_0\Phi(d_1) - e^{-rT}K\Phi(d_2)$$

όπου

$$d_1 = \frac{rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T + \ln(S_0/K)}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

και

Φ είναι η συνάρτηση κατανομής της $N(0,1)$,
σ η μεταβλητότητα (volatility) της τιμής της υποκείμενης μετοχής και
r το επιτόκιο των ομολόγων της αγοράς.

Απόδειξη. Ισχύει ότι

$$D_0^* = e^{-rT}E_Q((S_T - K)_+) = e^{-rT}E_Q((S_0e^X - K)_+),$$

όπου, υπό το Q, η τ.μ. $X = \ln(S_T/S_0) \sim N(T\mu^*, T\sigma^2)$, με $\mu^* = (r - \sigma^2/2)$. Επομένως, αν θεωρήσουμε μια τ.μ. $Z \sim N(0,1)$, η παραπάνω μέση τιμή είναι ίση με

$$D_0^* = e^{-rT}E\left(\left(S_0e^{\sqrt{T}\sigma Z + T\mu^*} - K\right)_+\right),$$

διότι η τ.μ. $\sqrt{T}\sigma Z + T\mu^*$ έχει την ίδια κατανομή με την X. Άρα, αν θέσουμε $\beta = T\mu^* + \ln S_0$, $\alpha = \sqrt{T}\sigma$ θα είναι

$$D_0^* = e^{-rT}E\left(\left(e^{\alpha Z+\beta} - K\right)_+\right)$$

Είναι τώρα σχετικά εύκολο να διαπιστωθεί ότι, για οποιαδήποτε α, β ισχύει ότι

$$E\left(\left(e^{\alpha Z+\beta} - K\right)_+\right) = e^{\beta}e^{\frac{\alpha^2}{2}}\Phi\left(\alpha - \frac{\ln K - \beta}{\alpha}\right) - K \cdot \Phi\left(\frac{\beta - \ln K}{\alpha}\right).$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} E\left(\left(e^{\alpha Z+\beta} - K\right)_+\right) &= E\left(\left(e^{\alpha Z+\beta} - K\right) \cdot I\left(e^{\alpha Z+\beta} > K\right)\right) \\ &= e^{\beta}E\left(e^{\alpha Z} \cdot I\left(e^{\alpha Z+\beta} > K\right)\right) - K \cdot E\left(I\left(e^{\alpha Z+\beta} > K\right)\right) \\ &= e^{\beta}E\left(e^{\alpha Z} \cdot I(Z > \gamma)\right) - K \cdot P(Z > \gamma), \end{aligned}$$

όπου $\gamma = \frac{\ln K - \beta}{\alpha}$. Επίσης,

$$\begin{aligned} E\left(e^{\alpha Z} \cdot I(Z > \gamma)\right) &= \int_{\gamma}^{\infty} e^{\alpha z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz = \frac{e^{\frac{\alpha^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\gamma}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z-\alpha)^2}dz \\ &= \frac{e^{\alpha^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\gamma-\alpha}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = e^{\frac{\alpha^2}{2}}\left(1 - \Phi(\gamma - \alpha)\right) = e^{\frac{\alpha^2}{2}}\Phi(\alpha - \gamma) \end{aligned}$$

Από όπου προκύπτει η παραπάνω σχέση για την $E\left(\left(e^{\alpha Z+\beta} - K\right)_+\right)$.

Αντικαθιστώντας τώρα τα β, α με τις παραπάνω τιμές $\beta = \ln S_0 + T\mu^*, \alpha = \sigma\sqrt{T}$ θα έχουμε τελικά ότι

$$D_0^* = S_0\Phi\left(\sigma\sqrt{T} - \frac{\ln K - \ln S_0 - T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{-rT}K \cdot \Phi\left(\frac{\ln S_0 + T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \ln K}{\sigma\sqrt{T}}\right),$$

αποτέλεσμα που συμπίπτει με το ζητούμενο τύπο του θεωρήματος. □

Άσκηση 12. Αν $S_0 = 100, K = 105, \sigma = 0.4, r = 0.2, T = 6/12$, να υπολογίσετε τη δίκαιη αξία ενός δικαιώματος αγοράς.

Λύση. Πρόκειται για απλή αντικατάσταση στον τύπο των B-S:

$$d_1 = \frac{rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T + \ln(S_0/K)}{\sigma\sqrt{T}} \approx 0.322475,\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \approx 0.0396328$$

$$C^* = D_0^* = S_0\Phi(d_1) - e^{-rT}K\Phi(d_2) \approx 13.6396$$

Άσκηση 13. Χρησιμοποιείστε την ταυτότητα $(K - S_T)_+ = (S_T - K)_+ + K - S_T$ για να εκφράσετε την δίκαιη τιμή ενός put option μέσω της δίκαιης τιμής ενός call option.

Λύση. Από την RNPF, η δίκαια αξία του δικαιώματος πώλησης θα είναι

$$C_{put}^* = e^{-rT}E_Q((K - S_T)_+),$$

και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $(K - S_T)_+ = (S_T - K)_+ + K - S_T$ θα είναι

$$\begin{aligned} C^*_{put} &= e^{-rT} E_Q((S_T - K)_+) + e^{-rT} E_Q(K - S_T) \\ &= C^*_{call} + e^{-rT}K - e^{-rT}E_Q(S_T) = C^*_{call} + e^{-rT}K - S_0 \end{aligned}$$

όπου C^*_{call} η δίκαιη τιμή ενός call option από τον τύπο των B-S (ο παραπάνω τύπος είναι γνωστός και ως *put-call parity*).

Άσκηση 14. (α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος (συμβολίζεται με Δ) της δίκαιης τιμής D_0^* ενός δικαιώματος αγοράς (T, K) ως προς την τιμή S του υποκείμενου αγαθού (μετοχή Μ) δίνεται από τον τύπο

$$\Delta = \Phi(d_1) = \Phi\left(\frac{rT + \sigma^2 T/2 + \ln(S_0/K)}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

(β) Θεωρείστε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο έχει n δικαιώματα αγοράς ως writer (δηλαδή θέση short call) όπως το παραπάνω call στο (α) και επίσης περιέχει k μετοχές Μ.

(i) Πόσο περίπου θα μεταβληθεί η αξία του χαρτοφυλακίου αυτού αν αυξηθεί η αξία της μετοχής Μ κατά μία χρηματική μονάδα;

(ii) Να βρείτε το πλήθος k των μετοχών Μ που πρέπει να έχει το χαρτοφυλάκιο (συναρτήσει του πλήθους n των short call) ώστε, για μικρή μεταβολή της τιμής της μετοχής Μ, η συνολική αξία του χαρτοφυλακίου να παραμείνει σχεδόν αμετάβλητη (είναι γνωστή ως τεχνική Delta hedging).

Λύση. (α) Αν φ είναι η σ.π.π. της τυπικής κανονικής, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial}{\partial S} D_0^* = \Phi(d_1) + S\frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial S} - e^{-rT}K\frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial S} \\ &= \Phi(d_1) + S\varphi(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} - e^{-rT}K\varphi(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S} \\ &= \Phi(d_1) + S\frac{e^{-\frac{1}{2}d_1^2}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{S\sigma\sqrt{T}} - e^{-rT}K\frac{e^{-\frac{1}{2}d_2^2}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{S\sigma\sqrt{T}} = \Phi(d_1) \end{aligned}$$

διότι είναι εύκολο να επαληθευτεί ότι $Se^{-\frac{1}{2}d_1^2} = e^{-rT}Ke^{-\frac{1}{2}d_2^2}$, το οποίο προκύπτει άμεσα από το ότι

$$d_1^2 - d_2^2 = (d_1 - d_2)(d_1 + d_2) = \sigma\sqrt{T}\big(2d_1 - \sigma\sqrt{T}\big) = 2rT + 2\ln\frac{S}{K}.$$

(β) (i) Αν $D_0^*(S)$ είναι η αξία ενός long call (από τον τύπο των Black and Scholes, θεωρούμενη ως συνάρτηση του S), τότε η αξία του χαρτοφυλακίου αυτού θα είναι

$$V(S) = -nD_0^*(S) + kS$$

Και επομένως η μεταβολή της αξίας του όταν το S γίνεται $S + h$ θα είναι

$$V(S+h) - V(S) = -n\frac{D_0^*(S+h) - D_0^*(S)}{h}h + k\big((S+h) - S\big) \approx -n\Delta h + kh$$

Αν η αξία του S αυξηθεί κατά 1 χ.μ., ο παραπάνω τύπος δίνει μεταβολή $(h = 1)$

$$V(S+1) - V(S) \approx -n\Delta + k$$

(ii) Η αξία του χαρτοφυλακίου παραμένει (σχεδόν) αμετάβλητη προφανώς όταν

$$-n\Delta h + kh = 0 \Leftrightarrow k = n\Delta$$

(δηλαδή η κατοχή $n\Delta = n\Phi(d_1)$ μετοχών κάνει το χαρτοφυλάκιο Delta neutral).

Ερωτήσεις Ανακεφαλαίωσης 4ου Κεφαλαίου

Ερώτηση 10. Τι ιδιότητες πρέπει να έχει μια συλλογή $X = \{X_t, t \geq 0\}$ τυχαίων μεταβλητών για να καλείται κίνηση Brown με παραμέτρους (μ, σ^2). Τι εκφράζουν οι δύο παράμετροι;

Ερώτηση 11. Τι ιδιότητες πρέπει να έχει μια συλλογή $S = \{S_t, t \geq 0\}$ τυχαίων μεταβλητών για να καλείται *γεωμετρική κίνηση Brown* με παραμέτρους (μ, σ^2). Για συγκεκριμένα $t > 0, y \geq 0$, ποιά κατανομή ακολουθεί η τ.μ. $\ln(S_{y+t}/S_y)$;

Ερώτηση 12. Ποια κίνηση μπορεί να θεωρηθεί ως το συνεχές ανάλογο του διωνυμικού μοντέλου n περιόδων; (όταν $n \to \infty$)

Ερώτηση 13. Ποιες είναι οι βασικές υποθέσεις του μοντέλου Black and Scholes;

Ερώτηση 14. Ποια είναι η κίνηση της τιμής μιας μετοχής στο μοντέλο των Black and Scholes υπό το πραγματικό μέτρο P και υπό το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου Q;

Ερώτηση 15. Στο μοντέλο των Black and Scholes: Ποιος ο γενικός τύπος (RNPF) της δίκαιης αξίας ενός ΠΧΠ στο $t = 0$ το οποίο έχει τελική απόδοση $D_T = g(S_T)$;

Ερώτηση 16. Τι εκφράζει ο τύπος των Black and Scholes (για call option) και ποιές οι ποσότητες που εμφανίζονται σε αυτόν;

5 Ενδεικτική βιβλιογραφία

Προπτυχιακή

Ross Sheldon M. (2011) *An Elementary Introduction to Mathematical Finance*. Cambridge University Press.

Buchanan Robert (2012) *An Undergraduate Introduction to Financial Mathematics*. World Scientific.

Capinski M. and Zastawniak T. (2010) *Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering*. Springer

Hull John C. (2016) *Options, futures and other derivatives*. Prentice Hall.

Μεταπτυχιακή

Shreve Steven E. (2005) *Stochastic calculus for finance* I (*the binomial asset pricing model*), (2013) *Stochastic calculus for finance* II (*continuous-time models*). Springer.

Etheridge A. (2002) *A course in financial calculus*. Cambridge University Press.

Elliot H.R. and Kopp P.E. (2004) *Mathematics of financial markets*. Springer.

Karatzas I., Shreve S. E. (2016) *Methods of mathematical finance*. Springer.

Klebaner F. C. (2012) *Introduction to stochastic calculus with applications*. Imperial College Press.

Lamberton D. and Lapeyre B. (2007) *Introduction to stochastic calculus applied to finance* (translated), Chapman and Hall.

Mikosch Thomas (2010) *Elementary Stochastic Calculus, with finance in view*. World Scientific Publishing.