第一章　随机事件的概率

1.1　随机事件与样本空间

题1　写出下列随机试验的样本空间：

（1）对同一目标射击三次，记录射击结果。

（2）投掷两颗匀称的骰子，记录点数之和。

（3）射击一目标，直至击中目标为止，记录射击次数。

（4）袋中装有4只白球、6只黑球，逐个取出，直至白球全部取出为止，记录取球次数；

（5）往数轴上任意投掷两个质点，观察它们之间的距离；

（6）将一尺之棰截成三段，观察各段之长。

解:（1）S={111,110,101,011,100,010,001,000}(其中1表示击中，0表示不中)

（2）S={2,3,$\cdots$,12}

（3）S={1,2,3,$\cdots$}

（4）S={4,5,$\cdots$,10}

（5）S={d$|d \geq 0$}

（6）S=$\{(x,y,z)|x>0,y>0,z>0,x+y+z=1\}$

题2　设袋内有10个编号为1～10的球，从中任取一个，观察其号码，

（1）写出这个试验的样本空间。

（2）若A表示“取得的球的号码是奇数”，B表示“取得的球的号码是偶数”，试表示A、B

解:$\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}, A=\{1,3,5,7,9\}, B=\{2,4,6,8,10\}$

题3　某人投篮2次，设事件$A_1=$“第1次投中”，$A_2=$“第2次投中”，试用A_1,A_2表示下列各事件：

（1）“两次都投中”　　　（2）“两次都未投中”

（3）“恰有一次投中”　　（4）“至少有一次投中”

解:$(1)A_1A_2, (2)\overline{A}_1\overline{A}_2, (3)A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2, (4)A_1+A_2,$

题4　设A,B,C为三个随机事件,试用A,B,C表示下列各事件:

(1) A,B,C中恰好A发生; (2) A,B,C恰有一个发生;

(3) A,B,C恰有两个发生; (4) A,B,C至少有一个发生;

(5) A,B,C至少有两个发生; (6) A,B,C不多于一个发生;

(7) A,B,C不多于两个发生; (8) A,B,C同时发生;

(9) A,B,C都不发生.

解:$(1)A\bar{B}\bar{C}, (2)A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C, (3)AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC, (4)A+B+C,$

$(5)AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC=AB+AC+BC,$

$(6)\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C=\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}=\overline{AB+AC+BC},$

$(7)\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC=\overline{ABC}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C},$

$(8)ABC, (9)\bar{A}\bar{B}\bar{C},$

题5　盒中装有10只晶体管.令$A_i=$“10只晶体管中恰有i只次品$(i=0,1,2,3)$”, $B=$“10只晶体管中不多于3只次品”,

$C=$“10 只晶体管中次品不少于4 只”.问事件A_i和B,C之间哪些有包含关系？哪些互不相容？哪些互逆？

解:$A_i\subset B(i=1,2,3)$; A_0,A_1,A_2,A_3,C两两互不相容; B与C互不相容, B与C 互逆.

题6 化简下列各式：

（1）$(A+B)(A+\overline{B})$；（2）$(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)$。

解:(1)原式 $=(A+B)A+(A+B)\overline{B}=A$, (2)原式 $=A(\overline{A}+B)=AB$

1.2 古典概率、几何概率、统计概率

题1 1、盒中有12只晶体管,其中8只正品,4只次品.从中任取两次, 每次取一只(不放回). 求:(1)取出两只正品管子的概率;(2)恰取出一只正品管子的概率.

解:(1)$\dfrac{C_8^2}{C_{12}^2}=\dfrac{14}{33}$, (2)$\dfrac{C_8^1C_4^1}{C_{12}^2}=\dfrac{16}{33}$

题2 2、设袋中有10个相同的球,上面依次编号为$1,2,\cdots,10$,每次从袋中任取一球,取后不放回,求第5次取到1号球的概率.

解:$\dfrac{9!}{10!}=\dfrac{1}{10}$

题3 3、设有n个球,每个球都能以同样的概率$\dfrac{1}{N}$落到N 个格子$(N\le n)$ 的每一个格子中,试求:（1）某指定的n个格子中各有一个球的概率;（2）恰有n 个格子中各有一个球的概率.

解:(2)$P(A)=\dfrac{n!}{N^n}$, (2)$P(B)=\dfrac{C_N^n n!}{N^n}$

题4 4、10个考签中有4个难签,3人参加抽签考试,不重复地抽取,每人一次,甲先抽取、乙第二个抽取、丙最后抽取,证明:3人抽到难签的概率相等.

解:$P(A_i)=\dfrac{A_4^1A_9^2}{A_{10}^3}=\dfrac{2}{5}, i=1,2,3$

题5 5、两封信任意地投向标号为1,2,3,4的4个邮筒投寄，求:（1）第3个邮筒恰好投入1封信的概率;（2）有2个邮筒各有1封信的概率。

解:(1)$\dfrac{C_2^1C_3^1}{4^2}=\dfrac{3}{8}$; $\dfrac{C_4^2 2!}{4^2}=\dfrac{3}{4}$

题6 6、设有r个人，$r\le 365$ ，并设每人的生日在一年365天中的每一天的可能性是均等的，问:此r个人生日都不相同的概率是多少?

解:$\dfrac{A_{365}^r}{365^r}=\dfrac{365!}{(365-r)!365^r}$

题7 7、设有k个袋子，每个袋子中装有n个球，分别编有自1到n的号码，今从每一个袋子中取出一个球，求所取得的k个球中最大号码为m的概率。

解:$\dfrac{m^k-(m-1)^k}{n^k}$

题8 8、有$n\ge 3$ 个人排队,求:(1)排成一行,其中甲、乙两人相邻的概率是多少？(2)排成一圈, 甲、乙两人相邻的概率是多少？

解:(1)$\dfrac{2(n-1)!}{n!}=\dfrac{2}{n}$, (2)$\dfrac{2}{n-1}$

题9 9、某公共汽车站每隔$10min$分钟有一辆汽车到达,乘客到达汽车站的时刻是任意的.求一个乘客候车时间不超过$6min$的概率.

解:$\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$

题10 10、在区间$(0,1)$内任取两个实数,求它们的乘积不大于$\dfrac{1}{4}$的概率.

解:$P(xy\le\dfrac{1}{4})=\dfrac{S(xy\le\frac{1}{4})}{S(0<x<1,0<y<1)}=1-\dfrac{\int_{\frac{1}{4}}^{1}\int_{\frac{1}{4x}}^{1}dydx}{1}=0.597$

题11 11、甲、乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头停泊,它们在一昼夜内到达的时刻是等可能的.如果甲船停泊的时间是3小时,乙船停泊的时间为2小时,求它们中任何一艘都不需等待码头空出的概率.

解:$P(x-y>3\text{或}y-x>2)=\dfrac{\frac{1}{2}(22^2+21^2)}{24^2}=0.803$

题12 12、从$(0,1)$中随机取出两个数，求两数之和小于$\dfrac{6}{5}$的概率。

解:$P(x+y<\dfrac{6}{5})=1-\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}}{1}=\dfrac{17}{25}$

1.3　概率的公理化定义

习题1.3

题1 1、袋中装有编号$1\sim 8$的八个球,从中任取3个,试求:(1)最小号码为偶数的概率;(2)至少有一奇数号码的概率.

解:(1)$\dfrac{C_6^2+C_4^2+C_2^2}{C_8^3}=\dfrac{11}{28}$; (2)$1-\dfrac{C_4^3}{C_8^3}=\dfrac{13}{14}$

题2 2、投掷四颗匀称的骰子,求:(1)不出现相同点数的概率;(2)奇数点与偶数点均出现的概率.

解:(1)$\dfrac{A_6^4}{6^4}=\dfrac{5}{18}$; (2)$1-\dfrac{3^4\cdot 2}{6^4}=\dfrac{7}{8}$

题3 3、500件产品中有50件次品,从中任取20件.试求:（1）恰取到10件次品的概率;（2）至少取到两件次品的概率.

解:(1)$\dfrac{C_{450}^{10}C_{50}^{10}}{C_{500}^{20}}$; (2)$1-\dfrac{C_{450}^{20}}{C_{500}^{20}}-\dfrac{C_{450}^{19}C_{50}^{1}}{C_{500}^{20}}$

题4 4、(1)某校一年级新生共1000人,设每人的生日是一年中的任何一天的可能性相同,问至少有一人的生日是元旦这一天的概率是多少？(一年以365天计).

解:$1-\dfrac{364^{1000}}{365^{1000}}$

题5 (2)某小组学生有5人是同一年出生的,设每人在一年中任何一个月出生是等可能的,求此5人的出生月份各不相同的概率.

解:$\dfrac{A_{12}^5}{12^5}$

1.4　条件概率与乘法公式

习题1.4

题1 1、从52张扑克牌中,不放回地抽取3次,每次取一张.求第三次才取到“黑桃”的概率.

解:$\dfrac{39\cdot 38\cdot 13}{52\cdot 51\cdot 50}=\dfrac{39\cdot 19}{5100}=0.1453$

题2 2、袋中有5只红球和3只白球.从中任取3只球,已知取出有红球时,求至多取到1只白球的概率.

解:$\dfrac{\frac{C_5^3+C_5^2C_3^1}{C_8^3}}{1-\frac{C_3^3}{C_8^3}}=\dfrac{8}{11}$

题3 3、已知$P(A)=\dfrac{1}{4}$，$P(B|A)=\dfrac{1}{3}$，$P(A|B)=\dfrac{1}{2}$，求$P(B),P(A\bigcup B)$和$P(A\overline{B})$

解:$P(AB)=P(A)P(B|A)=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{12},P(B)=\dfrac{P(AB)}{P(A|B)}=\dfrac{\dfrac{1}{12}}{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{6}$

$P(A\cup B)+P(A)+P(B)-P(AB)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{3}$

$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{6}$

题4　4、掷一颗骰子两次，以x,y分别表示先后掷出的点数，记$A=\{x+y<10\}, B=\{x>y\}$,求$P(B|A), P(B|A)$

解:$P(A)=\dfrac{30}{36}=\dfrac{5}{6}, P(B)=\dfrac{15}{36}=\dfrac{5}{12}, P(AB)=\dfrac{13}{36}$

$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{13}{30}, P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{13}{15}$

题5　5、设某种动物能活到10岁的概率是0.8，而能活到15岁的概率为0.5，求现为10岁的这种动物能活到15岁的概率是多少？

解:$P(X>15|X>10)=\dfrac{P(X>15)}{P(X>10)}=\dfrac{0.5}{0.8}=\dfrac{5}{8}$

1.5　全概率公式与贝叶斯公式

习题1.5

题1　1、甲袋中装有4只红球,2只白球,乙袋中装有2只红球,3只白球.从甲袋中任取2只球放入乙袋中,然后再从乙袋中任意取出一只是红球.试求甲袋中取出的2只全是红球的概率.

解:$$\frac{\dfrac{C_4^2}{C_6^2}\cdot\dfrac{C_4^1}{C_7^1}}{\dfrac{C_4^2}{C_6^2}\cdot\dfrac{C_4^1}{C_7^1}+\dfrac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}\cdot\dfrac{C_3^1}{C_7^1}+\dfrac{C_4^0C_2^2}{C_6^2}\cdot\dfrac{C_2^1}{C_7^1}}=\frac{12}{25}$$

题2　2、设工厂A和工厂B的产品次品率分别为1%和2%，现从由A和B的产品分别占60%和40%的一批产品中随机抽取一件，发现是次品，则该次品属A生产的概率是多少？

解:$\dfrac{1\%\cdot 60\%}{1\%\cdot 60\%+2\%\cdot 40\%}=\dfrac{3}{7}$

题3　3、有三个袋子，第一个袋子中有4个黑球1个白球，第二个袋子中有3个黑球3个白球，第三个袋子中有3个黑球5个白球，现随机地取一个袋子，再从中取出一个球，则此球是白球的概率是多少，已知取出的球是白球，则此球从第二个袋子中取出的概率是多少？

解:$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{6}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{5}{8}=\dfrac{53}{120},\quad \dfrac{\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{6}}{\dfrac{53}{120}}=\dfrac{20}{53}$

题4　4、某工厂生产的产品合格率是0.96.为确保出厂产品质量,需要进行检查,由于直接检查带有破坏性,因此使用一种非破坏性的但不完全准确的简化检查法.经试验知一个合格品用简化检查而获准出厂的概率是0.98, 而一个废品用简化检查而获准出厂的概率是0.05.求使用这种简化检查法时,获得出厂许可的产品是合格品的概率及未获得出厂许可的产品是废品的概率.

解:$\dfrac{0.96\cdot 0.98}{0.96\cdot 0.98+0.04\cdot 0.05}=0.9979; \dfrac{0.04\cdot 0.95}{0.96\cdot 0.02+0.04\cdot 0.95}=0.6643$

题5　5、（摸彩模型）设在n张彩票中有一张奖券，求第2个人摸到奖券的概率是多大？第$m(m\le n)$个人呢？

解:$\dfrac{1}{n}\cdot 0+\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{1}{n-1}=\dfrac{1}{n};\dfrac{1}{n}$

题6　6、有朋友自远方来访，他乘火车、轮船、汽车、飞机来的概率分别是0.3、0.2、0.1、0.4，如果他乘火车、轮船、汽车来的话，迟到的概率分别是$\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{12}$,而乘飞机不会迟到，结果是他迟到了，试问他乘火车来的概率是多大？

解:$$\frac{0.3\cdot\dfrac{1}{4}}{0.3\cdot\dfrac{1}{4}+0.2\cdot\dfrac{1}{3}+0.1\cdot\dfrac{1}{12}}=\frac{1}{2}$$

1.6　事件的独立性

习题1.6

题1 1、设事件A与B相互独立,且$P(A)=\dfrac{1}{3}, P(B)=\dfrac{1}{2}$.求$P(\overline{AB})$与$P(\overline{A+B})$.

解:$P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-P(A)P(B)=\dfrac{5}{6}$;

$P(\overline{A+B})=P(\bar{A}\bar{B})=(1-P(A))(1-P(B))=\dfrac{1}{3}$

题2 2、四人同时射击一目标,他们击中目标的概率分别是0.5, 0.3, 0.4, 0.2,试求目标被击中的概率.

解:$1-(1-0.5)(1-0.3)(1-0.4)(1-0.2)=0.832$

题3 3、某单位招工需经过四项考核，设能通过第一、二、三、四项考核的概率分别为0.6、0.8、0.91、0.95，且各项考核是独立的，只要有一项不通过即被淘汰，试求：(1)这项招工的淘汰率；（2）虽通过第一、三项考核，但仍被淘汰的概率。

解:$(1)1-0.6\cdot 0.8\cdot 0.91\cdot 0.95=0.585$; $(2)0.6\cdot 0.91\cdot(1-0.8\cdot 0.95)=0.131$

题4 4、一个袋子中有4只白球和2只黑球，另一袋子中有3只白球和5只黑球，如果从袋子中各摸一只球，求下列事件的概率：（1）两只球都是白球；（2）两只球都是黑球；（3）一只是白球一只是黑球。

解:$(1)\dfrac{4}{6}\cdot\dfrac{3}{8}=\dfrac{1}{4}$; $(2)\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{5}{8}=\dfrac{5}{24}$; $(3)\dfrac{4}{6}\cdot\dfrac{5}{8}+\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{3}{8}=\dfrac{13}{24}$;

题5 5、在一小时内甲、乙、丙三台机床需维修的概率分别是0.9、0.8和0.85，求一小时内（1）没有一台机床需要维修的概率；（2）至少有一台机床不需要维修的概率；（3）至多只有一台机床需要维修的概率。

解:$(1)(1-0.9)(1-0.8)(1-0.85)=0.003$; $(2)1-0.9\cdot 0.8\cdot 0.85=0.388$;

$(3)(1-0.9)(1-0.8)(1-0.85)+0.9\cdot(1-0.8)(1-0.85)+(1-0.9)\cdot 0.8\cdot(1-0.85)+(1-0.9)(1-0.8)\cdot 0.85=0.059$

题6 6、三人独立地破译一个密码，他们各自能破译的概率分别为0.5,0.6,0.8,求至少有两人能将密码译出的概率.

解:$0.5\cdot 0.6\cdot(1-0.8)+(1-0.5)\cdot 0.6\cdot 0.8+0.5\cdot(1-0.6)\cdot 0.8+0.5\cdot 0.6\cdot 0.8=0.7$

题7 7、已知事件A,B,C,D相互独立,且$P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}P(C)=\dfrac{1}{2}P(D), P(A+B+C+D)=\dfrac{481}{625}$,求$P(A)$

解:$P(A+B+C+D)=1-P(\overline{A+B+C+D})=1-P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D})$

$=1-(1-P(A))(1-P(B))(1-P(C))(1-P(D))=1-(1-P(A))(1-P(A))(1-2P(A))(1-2P(A))=\dfrac{481}{625}$;

$(1-P(A))(1-2P(A))=\dfrac{12}{25}$,故$P(A)=\dfrac{1}{5}$

第二章 随机变量及其分布

2.1 随机变量

习题2.1

题1 1、射击一目标,直到击中目标为止.记X 为射击的次数,试用随机变量X 的取值表示下列随机事件:(1)至少射击20次才击中目标;(2) 击中目标时至多射击了10次;(3)恰在奇数次射击击中目标.

解:(1) $\sum\limits_{k=20}^{+\infty}(X=k)$; (1) $\sum\limits_{k=1}^{10}(X=k)$; (1) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(X=2k-1)$;

题2 2、记X 为某微博公共账号1分钟内得到网民的访问次数，试用X 表示下列事件：（1）1分钟访问次数6次；（2）1分钟内访问次数不多于6次；（3）1分钟内访问次数多于6次

解:(1)$X=6; X\leq 6; X>6$

题3 3、一颗骰子抛两次，以X 表示两次所得点数之和，试确定X 的可能取值。

解:$\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

2.2 随机变量的分布函数

习题2.2

题1 1、将3个有区别的球随机地放入木制和纸制的两个盒子中,以X 表示木盒中的球数,试求随机变量X 的分布函数.

解:分布律为:

X	0	1	2	3
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

,分布函数为:
$$\begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{1}{8}, & 0\leq x<1 \\ \frac{4}{8}, & 0\leq x<1, \\ \frac{7}{8}, & 0\leq x<1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

题2 2、已知随机变量X 的分布函数为$F(x)=a+barctanx, -\infty<x<+\infty,$，（1）确定常数$a,b$;(2)求$-1<X\leq\sqrt{3}$；（3）求c,使得$P(X>c)=\frac{1}{4}$.

解:(1)$F(-\infty)=a-b\cdot\frac{\pi}{2}=0, F(+\infty)=a+b\cdot\frac{\pi}{2}=1,$得$a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{\pi}$;

(2) $-1<X\leq\sqrt{3}=F(\sqrt{3})-F(-1)=\frac{7}{12}$;

(3)$P(X>c)=1-F(c)=\frac{1}{4}, F(c)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctanc=\frac{3}{4}, arctanc=\frac{\pi}{4}, c=1$

题3 3、设$F_1(x)$ 和$F_2(x)$ 分别为随机变量X_1 和X_2 的分布函数，又$a>0, b>0, a, b$是两个常数，且$a+b=1$，证明$F(x)=F_1(x)+F_2(x)$也是某一随机变量的分布函数。

解:满足分布函数的基本性质.

2.3 离散型随机变量及其概率分布

习题2.3

题1 1、同时掷两颗匀称的骰子,观察它们出现的点数,求两颗骰子出现的最大点数X的分布律.

解:

X	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

题2 2、设随机变量X的分布函数是：$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 0.4, & 0\le x<1\\ 0.8, & 1\le x<2\\ 1, & \text{其他}\end{cases}$, 求随机变量$X$的概率分布律

解:

X	0	1	2
p	0.4	0.4	0.2

题3 3、已知离散型随机变量X的分布函数为$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 0.2, & 1\le x<3\\ 0.7, & 3\le x<4\\ 1, & \text{其他}\end{cases}$, 求$X$的分布律,并计算$P(X<4|X\neq 3)$.

解:

X	1	3	4
p	0.2	0.5	0.3

$$P(X<4|X\neq 3)=\frac{P(X<4,X\neq 3)}{P(X\neq 3)}=\frac{P(X=1)}{P(X=1)+P(X=4)}=\frac{2}{5}$$

题4 4、甲、乙两名篮球队员独立地轮流投篮,直至某人投中篮圈为止.今让甲先投,如果甲投中的概率为0.4,乙投中的概率为0.6.求各队员投篮次数的概率分布.

解:设甲投篮次数为X,乙投篮次数为Y,则:

$$P(X=k)=(1-0.4)^{k-1}\cdot(1-0.6)^{k-1}\cdot 0.4+(1-0.4)^{k-1}\cdot(1-0.6)^{k-1}\cdot(1-0.4)\cdot 0.6=0.76\times 0.24^{k-1}, k=1,2,3\cdots$$

$$P(Y=k)=(1-0.4)^{k}\cdot(1-0.6)^{k-1}\cdot 0.6+(1-0.4)^{k}\cdot(1-0.6)^{k}\cdot 0.4=0.456\times 0.24^{k-1}, k=1,2,3\cdots$$

题5 5、盒中有5个红球，3个白球，无放回地每次取一个球，直到取得红球为止。用X表示抽取次数，求X的分布律，并计算$P(1<X\le 3)$

解:

X	1	2	3	4
p	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}=\frac{15}{56}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{56}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{56}$

题6 6、盒中有8个晶体管，其中6个正品，2个次品（看上去无任何差别），现逐个进行测试，直到把2个次品测出来为止。以X表示需要测试的次数，求X的分布律。

解:

X	2	3	4	5
p	$\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{28}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}=\frac{15}{56}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{56}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{56}$

X	2	3	4	5
p	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}=\frac{15}{56}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{56}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{56}$

2.4 常用离散型随机变量的分布律

习题2.4

题1 1、某厂有同类机床60台.假设每台相互独立工作,故障率为0.02.要求机床发生故障时不能及时修理的概率小于0.01,问至少要配备几名工人共同维修?

解:设$X=$“发生故障的机床数”,则$X\sim B(60,0.02)$,

$P(X>n)=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}C_{60}^{k}0.02^{k}0.98^{n-k}\approx\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{1.2^{k}e^{-1.2}}{k!}\leq 0.01, n+1=5, n=4,$

题2 2、为了保证设备正常工作,需配备适量的维修工.现有同类型设备90台,各台工作是相互独立的,发生故障的概率为0.01,如果一台设备的故障可又一个维修工来处理,现配备3个维修工,试求每人包修30台与3人共同负责90台这两种方案下设备发生故障而不能及时维修的概率.

解:若每人包修30台,则设$X_i(i=1,2,3)$为第i个人保修的30台设备中发生故障的台数,

则X_i包修的设备不能及时维修的概率为$P(X_i>1)=\sum\limits_{k=2}^{+\infty}C_{30}^{k}0.01^{k}0.99^{30-k}\approx\sum\limits_{k=2}^{+\infty}\dfrac{0.3^{k}e^{-0.3}}{k!}=0.0369$

90台设备发生故障不能及时维修的概率$P(X_1>1或X_2>1或X_3>1)=1-P(X_1\leq 1,X_2\leq 1,X_3\leq 1)=1-(1-0.0369)^3=0.1067$

若三人共同负责90台,设$X=$发生故障的机床数$\sim B(90,0.01)$,则不能维修的概率为$P(X>3)=\sum\limits_{k=4}^{+\infty}C_{90}^{k}0.01^{k}0.99^{90-k}\approx$
$\sum\limits_{k=4}^{+\infty}\dfrac{0.9^{k}e^{-0.9}}{k!}=0.0135$

题3 3、设一女工照管800个纱锭,若每一纱锭单位时间内纱线被扯断的概率为0.005,试求单位时间内纱线的扯断次数不大于10的概率及最可能的被扯断次数.

解:设$X=$单位时间内纱线的扯断次数,则$X\sim B(800,0.05)$,

$P(X\leq 10)=\sum\limits_{k=0}^{10}C_{800}^{k}0.005^{k}0.995^{800-k}\approx\sum\limits_{k=0}^{10}\dfrac{4^{k}e^{-4}}{k!}=0.9972$

$k=[(800+1)\times 0.005]=4$, œ$V$, $P(X=4)=C_{800}^{4}0.005^{4}0.995^{800-4}=\dfrac{4^{4}e^{-4}}{4!}=0.1954$

题4 4、某电话交换台有300个用户,在任何时刻用户是否需要通话是相互独立的,且每个用户需要通话的概率为$\dfrac{1}{60}$,设该交换台只有8 条线路供用户同时使用.试求在任一给定时刻用户打不通电话的概率.

解:设X表示某一时刻需要通话的用户数,则$X\sim B(300,\dfrac{1}{60})$,

$$P(X>8)=\sum_{k=9}^{300}C_{300}^{k}\frac{1}{60}^{k}(\frac{99}{60})^{300-k}\approx\sum_{k=9}^{300}\frac{5^{k}e^{-5}}{k!}=0.068$$

题5 5、某车间有5台车床,调查表明,在任一时刻每台车床处于停车状态的概率为0.1,试求在同一时刻,

(1) 恰有2台车床处于停车状态的概率; (2) 至少有3台车床处于停车状态的概率; (3) 至多有3台车床处于停车状态的概率; (4) 至少有1台车床处于停车状态的概率.

解:设X表示某一时刻处于停车状态的车床数,则$X\sim B(5,0.1)$

(1)$P(X=2)=C_5^2 0.1^2 0.9^{5-2}=0.0729;$

(2)$P(X\leq 3)=\sum\limits_{k=3}^{5}C_5^k 0.1^k 0.9^{5-k}=0.00856;$

(3)$P(X\leq 3)=\sum\limits_{k=0}^{3}C_5^k 0.1^k 0.9^{5-k}=0.99954;$

(4)$P(X\leq 3)=\sum\limits_{k=1}^{5}C_5^k 0.1^k 0.9^{5-k}=0.40951;$

题6 6、假设某段时间内来百货公司的顾客数服从参数为λ 的Poisson分布，而在百货公司里每个顾客购买电视机的概率为p，且顾客之间是否购买电视机的事件相互独立，试求这段时间内百货公司出售k台电视机的概率。

解:设X表示这段时间内出售的电视台数,Y表示顾客数,则:

$P(X=k)=\sum\limits_{m=k}^{+\infty}P(Y=m)P(X=k|Y=m)=\sum\limits_{m=k}^{+\infty}\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}C_m^k p^k(1-p)^{m-k}=e^{-\lambda}\dfrac{(\lambda p)^k}{k!}\sum\limits_{m=k}^{+\infty}\dfrac{(\lambda)^{m-k}}{(m-k)!}=$
$e^{-\lambda}\dfrac{(\lambda p)^k}{k!}e^{\lambda(1-p)}=e^{-\lambda p}\dfrac{(\lambda p)^k}{k!}$, 即$X\sim\pi(\lambda p)$

2.5 连续型随机变量及其概率密度函数

习题2.5

题1 1、已知随机变量X 的概率密度为$f(x)=\begin{cases}a+bx, & 0\le x\le 2\\ 0, & 其他\end{cases}$, 且$P(X\ge 1)=\dfrac{1}{4}$.(1)确定常数$a,b$; (2)求$X$的分布函数.

解:(1)$\int_0^2 a+bxdx=1,\int_1^2 a+bxdx=\dfrac{1}{4}$,得$a=1,b=-\dfrac{1}{2}$;

(2)$F(x)=\int_{-\infty}^x f(t)dt=\begin{cases}0, & x<0\\ x-\dfrac{1}{4}x^2, & 0\le x<2\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$

题2 2、设随机变量的概率密度为$f(x)=\begin{cases}asinx, & 0\le x\le\pi\\ 0, & 其他\end{cases}$, (1)确定常数$a$; (2)求X 的分布函数.

解:(1)$\int_0^\pi asinxdx=1$,得$a=\dfrac{1}{2}$;

(2)$F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)dt=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{2}(1-cosx), & 0\le x<\pi\\ 1, & x\ge\pi\end{cases}$

题3 3、设随机变量的概率密度为$f(x)=\dfrac{a}{e^x+e-x}, -\infty<x<+\infty$, (1)确定常数a; (2)求X 的分布函数$F(x)$; (3)求$P(0<X<\sqrt{3})$.

解:(1)$\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{a}{e^x+e-x}dx=1$,得$a=\dfrac{1}{2}$;

(2)$F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)dt=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{2}(1-cosx), & 0\le x<\pi\\ 1, & x\ge\pi\end{cases}$

题4 4、已知随机变量X的概率密度函数$f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|}, -\infty<x<+\infty$
求X的概率分布函数

解:$x<0$时, $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^x\dfrac{1}{2}e^t dt=\dfrac{1}{2}e^x$

$x\ge 0$时, $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^0\dfrac{1}{2}e^t dt+\int_0^x\dfrac{1}{2}e^{-t}dt=1-\dfrac{1}{2}e^{-x}$

故, $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^x, & x<0\\ 1-\dfrac{1}{2}e^{-x}, & x\ge 0\end{cases}$

题5 5、设连续型随机变量X的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ A+Be^{-\frac{x^2}{2}}, & x\ge 0\end{cases}$,求:(1)$A,B$;(2)随机变量$X$的概率密度函数;(3)$P(\sqrt{ln4}<X<\sqrt{ln9})$

解:(1)$F(+\infty)=A=1; F(0^+)=A+B=F(0)=0, B=-1$

(2)$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ xe^{-\dfrac{x^2}{2}}, & x\geq 0\end{cases}$

(3)$P(\sqrt{ln4}<X<\sqrt{ln9})=F(\sqrt{ln9})-F(\sqrt{ln4})=\dfrac{1}{6}$

题6 6、设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$, 以Y表示对X的三次独立重复观察中事件$X\leq\dfrac{1}{2}$出现的次数，则求$P(Y=2)$

解:$P(X\leq\dfrac{1}{2})=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}2xdx=\dfrac{1}{4}, P(Y=2)=C_3^2(\dfrac{1}{4})^2\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{64}$

2.6 常用的连续型随机变量分布

习题2.6

题1 1、在数值计算中由于处理小数位数而四舍五入引起的舍入误差X，一般可认为是一个服从均匀分布的随机变量，如果小数点后面第5 位按四舍五入处理：求：（1）X的概率密度；（2）误差在0.00003与0.00006之间的概率。

解:(1)$X\sim U(-5\times10^{-5}, 5\times10^{-5})$,

$f(x)=\begin{cases}10000, & -5\times10^{-5}<x<5\times10^{-5}\\ 0, & 其他\end{cases}$,

(2)$P(0.00003<x<0.00006)=(0.00006-0.00003)\times10000=0.3$

题2 2、设随机变量X服从区间$(2,5)$上的均匀分布，求对X进行3次独立观测中，至少有2次的观测值大于3的概率。

解:$P(X>3)=\dfrac{1}{5-2}\times5-3=\dfrac{2}{3}, P(Y\geq2)=\displaystyle\sum_{k=2,3}C_3^k(\dfrac{2}{3})^k(1-\dfrac{2}{3})^{3-k}=\dfrac{20}{27}$

题3 3、某仪器装有三只独立工作的同型号电子元件,其寿星(单位:小时)都服从同一指数分布,概率密度为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{600}e^{-\dfrac{x}{600}}, & x\geq0\\ 0, & x<0\end{cases}$,试求在仪器使用的最初200小时以内,至少有一只电子元件损坏的概率.

解:$P(X<200)=\displaystyle\int_0^{200}\dfrac{1}{600}e^{-\dfrac{x}{600}}dx=1-e^{-\frac{1}{3}}$

$P(Y\geq1)=1-P(Y=0)=1-C_3^0(1-e^{-\frac{1}{3}})^0(e^{-\frac{1}{3}})^3=1-e^{-1}$

题4 4、某仪器装有三只相同型号的晶体管,且假定它们的工作是相互独立的.已知晶体管的寿命X(小时)的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{200}{x^2}, & x>200\\ 0, & x\leq200\end{cases}$,求该仪器在开始使用的400小时中,这三只晶体管至少有一只不需要更换的概率.

解:$P(X>400)=\displaystyle\int_{400}^{+\infty}\dfrac{200}{x^2}dx=\dfrac{1}{2}$

$P(Y\geq1)=1-P(Y=0)=1-C_3^0(\dfrac{1}{2})^0(1-\dfrac{1}{2})^3=\dfrac{7}{8}$

题5 5、设顾客在某银行的窗口等待服务的时间X（单位：分钟）服从指数分布，其密度函数为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}e^{-\dfrac{x}{5}}, & x\geq0\\ 0, & x<0\end{cases}$,
某顾客在窗口等待服务，若超过10分钟他就离开，他一个月要到银行5次，以Y表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数，试求：$P(Y\geq1)$

解:$P(X>10)=\int_{10}^{+\infty}\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}dx=e^{-2}$
$P(Y\geq 1)=1-P(Y=0)=1-C_5^0(e^{-2})^0(1-e^{-2})^3=0.5167$

2.7 正态分布

习题2.7

题1 1、计算积分$\int_{-\infty}^{+\infty}exp\{-2x^2+2x-\frac{1}{3}\}$.
解:$\int_{-\infty}^{+\infty}exp\{-2x^2+2x-\frac{1}{3}\}=e^{\frac{1}{6}}\int_{-\infty}^{+\infty}exp\left\{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right\}dx\xlongequal{\sqrt{2}(x-\frac{1}{2})=y}e^{\frac{1}{6}}\int_{-\infty}^{+\infty}exp\left\{-y^2\right\}\frac{1}{\sqrt{2}}dy=e^{\frac{1}{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\pi$

题2 2、设$X\sim N(1,4^2)$,(1)求$P(|x|>2)$;(2)确定常数a,使$P(X>a+1)=0.1056$.
解:(1)$P(|x|>2)=1-P(-2\leq X\leq 2)=1-[F(2)-F(-2)]=1-\left[\Phi\left(\frac{2-1}{4}\right)-\Phi\left(\frac{-2-1}{4}\right)\right]=1-[\Phi(0.25)-\Phi(-0.75)]=0.6279$;
(2)$P(X>a+1)=1-F(a+1)=1-\Phi\left(\frac{a+1-1}{4}\right)=1-\Phi\left(\frac{a}{4}\right)=0.1056,\Phi\left(\frac{a}{4}\right)=0.8944,\frac{a}{4}=1.25,a=5$

题3 3、已知随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,且$P(X<-1)=P(X\geq 3)=\Phi(-1)$,其中$\Phi(x)$是标准正态分布函数.求$\mu,\sigma$.
解:$P(X<-1)=F(-1)=\Phi\left(\frac{-1-\mu}{\sigma}\right)=\Phi(-1)$,
$P(X\geq 3)=1-F(3)=1-\Phi\left(\frac{3-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(-\frac{3-\mu}{\sigma}\right)=\Phi(-1)$,
$\frac{-1-\mu}{\sigma}=-\frac{3-\mu}{\sigma}=-1,\mu=1,\sigma=2$

题4 4、设测量到某一目标的距离时产生的随机误差$X(m)$具有概率密度$f(x)=\frac{1}{40\sqrt{2\pi}}exp\{-\frac{(x-20)^2}{3200}\}$,,求在四次独立测量中至少有一次误差的绝对值不超过20m的概率.
解:$X\sim N(20,40^2),P(|X|\leq 20)=F(20)-F(-20)=\Phi(0)-\Phi(-1)=0.3413$,
$P(Y\geq 1)=1-P(Y=0)=1-C_4^0 0.3413^0(1-0.3413)^4=0.8117$

题5 5、设某种产品的质量指标$X\sim N(200,\sigma^2)$.若要求$P(180<X<220)\geq 0.95$,问允许σ最大为多少?
解:$P(180<X<220)=F(220)-F(180)=\Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{20}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right)-1\geq 0.95,\Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right)\geq 0.975,\frac{20}{\sigma}\geq 1.96,\sigma\leq\frac{20}{1.96}=10.2$

题6 6、设电源电压$U\sim N(220,25^2)$(单位:V)通常考虑3种状态:(1)不超过200V;(2)在$200\sim 240$之间;(3)超过240V。在上述3种状态下,某电子元件损坏的概率分别为0.1,0.001,0.2,(1)求电子元件损坏的概率;(2)在电子元件已损坏的情况下,试分析电压分别处于上述3种状态的概率。
解:(1)$P(U\leq 200)=F(200)=P(U>240)=1-F(240)=0.2119$
$P(200<U\leq 240)=F(240)-F(200)=\Phi\left(\frac{240-220}{25}\right)-0.2119=\Phi(0.8)-0.5=0.5762$
$0.2119\times 0.1+0.5762\times 0.001+0.2119\times 0.2=0.6415$;
(2)$\frac{0.2119\times 0.1}{0.6415}=33,\frac{0.5762\times 0.001}{0.6415}=0.01,\frac{0.2119\times 0.2}{0.6415}=0.66$

题7 7、设一种竞赛的考试成绩服从$X\sim N(76,15^2)$正态分布。竞赛委员会决定其中15%的成绩优异者获一等奖,问分数线应划在什么地方,如果规定较差的10%没有任何奖励,问这个分数线又该划在何处?
解:$P(X>m)=1-\Phi\left(\frac{m-76}{15}\right)=0.15,\Phi\left(\frac{m-76}{15}\right)=0.85,\frac{m-76}{15}=1.04,m=91.6$
$P(X<n)=\Phi\left(\frac{n-76}{15}\right)=0.1,\frac{n-76}{15}=-1.28,n=56.8$

第三章　二维随机变量

3.1　随机向量与联合分布

习题3.1

题1　1、设二维随机变量的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}(a-e^{-2x})(b-e^{-y}), & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

(1)确定常数a,b；（2）求$P\{X>0,Y\le 2\}$.

解:(1)$F(+\infty,+\infty)=ab=1,F(0^+,y)=(a-1)(b-e^{-y})=F(0,0)=0,a=1,b=1$；

（2）$P\{X>0,Y\le 2\}=P\{0<X<+\infty,-\infty<Y\le 2\}=F(+\infty,2)-F(+\infty,-\infty)-F(0,2)+F(0,-\infty)=1-e^{-2}$

题2　2、设X随机地取$1\sim 5$之间的一个整数值,Y随机地取$1\sim X$之间的一个整数值,试求随机变量X与Y的联合分布律.

解:$P(X=i)=\dfrac{1}{5},i=1,\cdots,5,P(Y=j|X=i)=\dfrac{1}{i},j=1,\cdots,i,$

$$P(X=i,Y=j)=P(X=i)\cdot P(Y=j|X=i)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{i}, & j\le i\\ 0, & j>i\end{cases},i,j=1,2,\cdots,5$$

题3　3、已知二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}a(x+y), & 0\le x\le 1,0\le y\le x\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

试确定常数a .

解:$\displaystyle\int_0^1\int_0^x a(x+y)dydx=1,a=2$

题4　4、设二维随机变量的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6e^{-(3x+2y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

,（1）求(X,Y) 的分布函数$F(x,y)$;（2）求$P(2Y-X\le 0)$.

解:(1)$x>0,y>0$时,$F(x)=\displaystyle\int_0^x\int_0^y 6e^{-(3u+2v)}dvdu=(1-e^{-3x})(1-e^{-2y})$,其他,$F(x)=0$

$$F(x)=\begin{cases}(1-e^{-3x})(1-e^{-2y}), & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

(2)$\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{\frac{x}{2}}6e^{-(3x+2y)}dydx=\frac{1}{4}$

题5　5、已知二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}a(x+y), & 0\le x\le 1,0\le y\le 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

，（1）确定常数a；（2）求$P(X\le \frac{1}{2}, Y\ge 1)$ 和$P(X\ge Y)$.

解:（1）$\int_0^1\int_0^2 a(x+y)dydx=1, a=\frac{1}{3}$,

（2）$P(X\le \frac{1}{2}, Y\ge 1)=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_1^2 a(x+y)dydx=\frac{4}{27}, P(X\ge Y)\int_0^1\int_0^x a(x+y)dydx=\frac{1}{6}$

3.2 边沿分布函数

题1 1、已知(X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & X<-1\text{或}Y<0\\ 0.25(x+1)y, & -1\le x<1, 0\le y<2\\ 0.5y, & x\ge 1, 0\le y<2\\ 0.5(x+1), & -1\le x<1, y\ge 2\\ 1, & x\ge 1, y\ge 2\end{cases}$$

，（1）求(X,Y)关于X 和关于Y 的边沿分布函数；

（2）求$P(-1.5\le X<2.5, -0.5\le Y<1.5)$

（3）求$P(X<0.5, Y<1.5)$

解:（1）$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 0.5(x+1), & -1\le x<-1\\ 1, & \text{其他}\end{cases}$

$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}0, & y<0\\ 0.5y, & 0\le x<2\\ 1, & \text{其他}\end{cases}$

（2）$P(-1.5\le X<2.5, -0.5\le Y<1.5)=F(2.5,1.5)-F(2.5,-0.5)-F(-1.5,1.5)+F(-1.5,-0.5)=0.75$

（3）$P(X<0.5, Y<1.5)=F(0.5,1.5)=0.5625$

题2 2、如果二维随机变量(X,Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-\lambda_1 x}-e^{-\lambda_2 y}-e^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y-\lambda_{12}\{max(x,y)\}}, & x>0, y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}$为常数，试求$(X,Y)$关于$X$ 和关于Y 的边沿分布函数。

解:

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-e^{-\lambda_1 x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}1-e^{-\lambda_1 y}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

3.3 边沿分布律与条件分布律

题1 1、如果(X,Y) 的联合分布律为$P_{ij}=\frac{1}{21}(i+j), i=1,2, j=1,2,3$，试求$(X,Y)$ 关于X与Y的边沿分布律。

解:$P(X=i)=\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{21}(i+j)=\frac{2+i}{7}, i=1,2$

$P(Y=j)=\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{21}(i+j)=\frac{3+2j}{21}, j=1,2,3$

题2 2、已知随机变量X服从参数为0.4的两点分布,

X	0	1
p	0.6	0.4

在X=0和X=1的条件下，Y的条件分布律分别为：

Y	0	1	2
p	0.4	0.4	0.2

Y	0	1	2
p	0.3	0.3	0.4

求：(1) (X,Y) 的联合分布；(2) 在$Y=1$ 的条件下X 的条件分布律。

解:(1)$P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j|X=i)$得 :

X \ Y	0	1	2	$p(X=x_i)$
0	0.24	0.24	0.12	0.6
1	0.12	0.12	0.16	0.4
$p(Y=y_j)$	0.36	0.36	0.28	

(2)$P(X=0|Y=1)=\frac{P(X=0,Y=1)}{P(Y=1)}=\frac{0.24}{0.36}=\frac{2}{3}, P(X=1|Y=1)=\frac{P(X=1,Y=1)}{P(Y=1)}=\frac{0.12}{0.36}=\frac{1}{3}$

3.4 边沿概率密度与条件概率密度

习题3.4

题1 1、设二维随机变量(X,Y) 在区域$D:(x,y)|x^2\le y\le\sqrt{x}$ 内服从均匀分布,试求(X,Y) 的概率密度与边沿概率密度.

解:$S_D=\int_0^1\int_{x^2}^{x}dydx=\frac{1}{3}$, 故 : $f(x,y)=\begin{cases}3, & x^2\le y\le\sqrt{x}\\ 0, & 其他\end{cases}$

$f_X(x)=\begin{cases}\int_{x^2}^{\sqrt{x}}3dy=3(\sqrt{x}-x^2), & 0\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}\int_{y^2}^{\sqrt{y}}3dx=3(\sqrt{y}-y^2), & 0\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$

题2 2、设二维随机变量(X,Y) 的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}x^2+\frac{1}{3}xy, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2\\ 0, & 其他\end{cases}$, (1) 求$(X,Y)$关于$X$ 和关于Y 的边沿概率密度; (2) 求$P(X+Y\le 1)$.

解:(1)$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^2 x^2+\frac{1}{3}xydy=2x^2+\frac{2}{3}x, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^1 x^2+\frac{1}{3}xydx=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}y, & 0\le y\le 2\\ 0, & 其他\end{cases}$

(2)$P(X+Y\le 1)=\int_0^1\int_0^2 x^2+\frac{1}{3}xydydx=\frac{7}{72}$

题3 3、设二维随机变量的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}ae^{-(x+y)}, & 0<2x<y<+\infty\\ 0, & 其他\end{cases}$, (1)确定常数$a$; (2)求(X,Y)关于X 和关

于Y 的边沿概率密度; (3) 求$P(X\geq 1,Y\leq 2)$.

解:(1) $\int_0^{+\infty}\int_{2x}^{+\infty} ae^{-(x+y)}dydx=1$, 得$a=3$;

(2)$f_X(x)=\begin{cases}\int_{2x}^{+\infty}3e^{-(x+y)}dy=3e^{-3x}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$　　$f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^{\frac{y}{2}}3e^{-(x+y)}dx=3e^{-y}(1-e^{-\frac{y}{2}}), & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$

(3)$P(X\geq 1,Y\leq 2)=\int_1^{+\infty}\int_{2x}^{+\infty}3e^{-(x+y)}dydx=e^{-3}$

题4　4、设二维随机变量(X,Y) 在区域$\{D:(x,y)|0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 2x\}$ 内服从均匀分布, 求:(1)条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$和$f_{Y|X}(y|x)$; (2) $P(Y\geq 1|X=\frac{3}{4})$.

解:(1) $\int_0^1\int_0^{2x}dydx=1$, $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 2x\\ 0, & 其他\end{cases}$

$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^{2x}dy=2x, & 0\leq x\leq 1\\ 0, & 其他\end{cases}$　　$f_Y(y)=\begin{cases}\int_{\frac{y}{2}}^1 dx=1-\frac{y}{2}, & 0\leq y\leq 1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$0\leq y\leq 2$时, $f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{2}{2-y}, & \frac{y}{2}\leq x\leq 1\\ 0, & 其他\end{cases}$　　$0\leq x\leq 1$时, $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{1}{2x}, & 0\leq y\leq 2x\\ 0, & 其他\end{cases}$

(2)$f_{Y|X}(y|\frac{3}{4})=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{2}{3}, & 0\leq y\leq\frac{3}{2}\\ 0, & 其他\end{cases}$

$P(Y\geq 1|X=\frac{3}{4})=\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}dy=\frac{1}{3}$

题5　5、设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$ 试求条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$和$f_{Y|X}(y|x)$.

解:$f_X(x)=\begin{cases}\int_{-x}^{x}1dy=2x, & 0\leq x\leq 1\\ 0, & 其他\end{cases}$　　$f_Y(y)=\begin{cases}\int_y^1 dx=1-y, & 0\leq y\leq 1\\ \int_{-y}^1 dx=1+y, & -1\leq y\leq 0\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}1-|y|, & -1\leq y\leq 1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$-1\leq y\leq 1$时, $f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{1-|y|}, & |y|\leq x\leq 1\\ 0, & 其他x\end{cases}$

$0\leq x\leq 1$时, $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{1}{2x}, & -x\leq y\leq x\\ 0, & 其他y\end{cases}$

题6　6、设随机变量X在区间[0,1]上服从均匀分布，在$X=x(0\leq x\leq 1)$ 的条件下，随机变量Y在$(0,x)$上服从均匀分布，求：（1）随机变量X 和Y 的联合概率密度；（2）Y的概率密度；（3）概率$P(X+Y>1)$

解:(1)$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\leq x\leq 1\\ 0, & 其他\end{cases}$, $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0\leq y\leq x\\ 0, & 其他\end{cases}$,

$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0\leq y\leq x,0\leq x\leq 1\\ 0, & 其他\end{cases}$,

(2)$f_Y(y)=\begin{cases}\int_y^1\frac{1}{x}dx=-lny, & 0\leq y\leq 1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$(3)P(X+Y>1)=\int_{0.5}^{1}\int_{1-x}^{x}\frac{1}{x}dydx=1-ln2$

题7 7、设(X,Y)服从区域$\{D:(x,y)|0\le y\le 1-x^2\}$上的均匀分布,设区域$\{B:(x,y)|y\ge x^2\}$。（1）写出$(X,Y)$的联合密度函数;（2）求$X$和$Y$的边沿密度函数（3）求$X=-\frac{1}{2}$时$Y$的条件密度函数和$Y=\frac{1}{2}$时$X$的条件密度函数（4）求概率$P\{(X,Y)\in B\}$

解:$(1)S=\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}dydx=\frac{4}{3}, f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{4}, & 0\le y\le 1-x^2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$(2)f_X(x)=\int_{0}^{1-x^2}\frac{3}{4}dy=\begin{cases}\frac{3}{4}(1-x^2), & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$

$f_Y(y)=\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}\frac{3}{4}dx=\begin{cases}\frac{3}{4}\cdot 2\sqrt{1-y}=\frac{3}{2}\sqrt{1-y}, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$

$(3)-1\le x\le 1$时$, f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x^2}, & 0\le y\le 1-x^2\\ 0, & \text{其他y}\end{cases}, f_{Y|X}(y|-\frac{1}{2})=\begin{cases}\frac{4}{3}, & 0\le y\le \frac{3}{4}\\ 0, & \text{其他y}\end{cases}$

$0\le y\le 1$时$, f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{1-y}}, & -\sqrt{1-y}\le x\le\sqrt{1-y}\\ 0, & \text{其他x}\end{cases}, f_{Y|X}(y|\frac{1}{2})=\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}, & -\frac{\sqrt{2}}{2}\le x\le\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0, & \text{其他x}\end{cases}$

$(4)P\{(X,Y)\in B\}=\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\int_{0}^{1-x^2}\frac{3}{4}dydx=\frac{\sqrt{2}}{2}$

3.5 相互独立的随机变量

习题3.5

题1 1、设二维随机变量(X,Y) 服从区域$D=\{(X,Y)|a\le X\le b, c\le Y\le d\}$上的均匀分布，试证：$X$与$Y$相互独立。

证:$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{(b-a)(d-c)}, & a\le X\le b, c\le Y\le d\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\le X\le b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}, f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{d-c}, & c\le Y\le d\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$

$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

题2 2、设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x, 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$,试求：（1）边沿概率密度$f_X(x)$和$f_Y(y)$,（2）$X$与$Y$是否独立.

解:$f_X(x)=\begin{cases}\int_{-x}^{x}1dy=2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ $\quad f_Y(y)=\begin{cases}\int_{y}^{1}dx=1-y, & 0\le y\le 1\\ \int_{-y}^{1}dx=1+y, & -1\le y\le 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}1-|y|, & -1\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$

题3 3、设二维随机变量(X,Y) 的分布函数为$F(x,y)=\begin{cases}\frac{[1-(x+1)e^{-x}]y}{1+y}, & x>0, y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, (1)求边沿分布函数$F_X(x)$和$F_Y(y)$; (2) 求$(X,Y)$ 的概率密度$f(x,y)$,边沿概率密度$f_X(x)$ 和$f_Y(y)$; (3)验证随机变量X 与Y 相互独立.

解:(1)$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-(x+1)e^{-x}\frac{\quad}{1+y}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$, $F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}\frac{y}{1+y}, & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$,

(2)$f(x,y)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial x\partial y}=\begin{cases}\frac{xe^{-x}}{(1+y)^2}, & x>0,y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$

$f_X(x)=\frac{dF_X(x)}{dx}=\begin{cases}xe^{-x}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$, $f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\begin{cases}\frac{1}{(1+y)^2}, & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$

(3)$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$,独立.

题4 4、设随机变量X,Y相互独立，下表列出了二维随机变量(X,Y)联合分布律及关于X和关于Y的边沿分布律中的部分数值，试将其余数值填入表中的空白处。

Y \ X	x_1	x_2	x_3	$p(X=x_i)$
y_1		$\frac{1}{8}$		
y_2	$\frac{1}{8}$			
$p(Y=y_j)$	$\frac{1}{6}$			1

解:

Y \ X	x_1	x_2	x_3	$p(X=x_i)$
y_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
y_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$p(Y=y_j)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

题5 5、已知二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}a(x+y), & 0\le x\le 2, 0\le y\le \frac{x}{2}\\ 0, & 其他\end{cases}$, (1)确定常数$a$;(2)问X与Y是否相互独立？(3)求$P\left\{Y\ge\frac{3}{4}|X\ge 1\right\}$.

解:(1)$\int_0^2\int_0^{\frac{x}{2}}a(x+y)dydx=\frac{5}{3}a=1, a=\frac{3}{5}$

(2)$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^{\frac{x}{2}}\frac{3}{5}(x+y)dy=\frac{3}{8}x^2, & 0\le x\le 2\\ 0, & 其他\end{cases}$, $f_Y(y)=\begin{cases}\int_{2y}^2\frac{3}{5}(x+y)dy=\frac{3}{5}(2+2y-4y^2), & 0\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$不独立

(3)$P(X\ge 1)=\int_1^2\frac{3}{8}x^2dx=\frac{7}{8}, P(Y\ge\frac{3}{4},X\ge 1)=\int_{\frac{3}{2}}^2\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{x}{2}}\frac{3}{5}(x+y)dydx=\frac{1}{10}$

$P(Y\ge\frac{3}{4}|X\ge 1)=\frac{P(Y\ge\frac{3}{4},X\ge 1)}{P(X\ge 1)}=\frac{4}{35}$

题6 6、设三维随机变量(X,Y,Z)的概率密度函数为$f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{1}{8\pi^3}(1-sinxsinysinz), & 0\le x,y,z\le 2\pi\\ 0, & 其他\end{cases}$ 证明X，Y，Z两两独立，但不相互独立。

$$\text{证}:f_X(x)=\begin{cases}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{8\pi^3}(1-sinxsinysinz)dydz=\frac{1}{2\pi}, & 0\le x\le 2\pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$\text{同样地},f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & 0\le y\le 2\pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases},f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & 0\le z\le 2\pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}\int_0^{2\pi}\frac{1}{8\pi^3}(1-sinxsinysinz)dz=\frac{1}{4\pi^2}, & 0\le x,y\le 2\pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$\text{同样地},f_{(X,Z)}(x,z)=\begin{cases}\frac{1}{4\pi^2}, & 0\le x,z\le 2\pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases},f_{(Y,Z)}(y,z)=\begin{cases}\frac{1}{4\pi^2}, & 0\le y,z\le 2\pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$f_{(X,Y)}(x,y)=f_X(x)f_Y(y),f_{(X,Z)}(x,z)=f_X(x)f_Z(z),f_{(Y,Z)}(y,z)=f_Y(y)f_Z(z)$

但$f(x,y,z)\neq f_X(x)f_Y(y)f_Z(z)$

第四章　随机变量的函数的分布

4.1　离散型随机变量的函数的分布

习题4.1

题1　1、已知二维随机变量X_1, X_2的分布律为

X_1 \ X_2	-2	0	1	2
-1	0.1	0.2	0.1	0.2
1	0.1	0.1	0.1	0.1

试求: (1)$X = X_1X_2$;(2)$Y = max(X_1, X_2)$ 的分布律.

解:

(X_1, X_2)	(-1,-2)	(-1,0)	(-1,1)	(-1,2)	(1,-2)	(1,0)	(1,1)	(1,2)
p	0.1	0.2	0.1	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1
$X = X_1X_2$	2	0	-1	-2	-2	0	1	2
$Y = max(X_1, X_2)$	-1	0	1	2	1	1	1	2

题2　2、设相互独立的两个随机变量X, Y具有同一分布律，且X的分布律为

X	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

求随机变量$Z = max(X, Y)$ 的分布律

解:

X \ Y	0	1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

,

(X, Y)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$Y = max(X_1, X_2)$	0	1	1	2

,

$Y = max(X_1, X_2)$	0	1	2
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

题3　3、设随机变量X_1, X_2 相互独立,且$X_i \sim B(n_i, p), i = 1, 2$, 试证$X = X_1 + X_2 \sim B(n_1 + n_2, p)$.

证:$P(X_1 = i) = C_{n_1}^{i} p^i (1-p)^{n_1-i} (i = 0, 1, \cdots, n_1)$, $P(X_2 = j) = C_{n_2}^{i} p^i (1-p)^{n_2-j} (j = 0, 1, \cdots, n_2)$,

$P(X = k) = \sum\limits_{i=0}^{k} P(X_1 = i, X_2 = k-i) = \sum\limits_{i=0}^{k} P(X_1 = i)P(X_2 = k-i) = \sum\limits_{i=0}^{k} C_{n_1}^{i} p^i (1-p)^{n_1-i} C_{n_2}^{k-i} p^i (1-p)^{n_2-(k-i)}$

$$= \sum_{i=0}^{k} C_{n_1}^{i} C_{n_2}^{k-i} p^k (1-p)^{n-k} (k = 0, 1, \cdots, n_1+n_2)$$

题4 4、设随机变量X和Y的分布律分别为

X	-1	0	1
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

已知$P(XY=0)=1$，试求$Z=max(X,Y)$的分布律

解:

Y \ X	-1	0	1
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0

,

(X,Y)	(-1,0)	(-1,1)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
p	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
$Y=max(X_1,X_2)$	0	1	1	1	1	1

,

$Y=max(X_1,X_2)$	0	1
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

4.2 一维连续型随机变量的函数的分布

习题4.2

题1 1、已知随机变量X的概率密度$f(x)=\begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 2-x, & 1 \le x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，求$Y=ln(X+1)$的概率密度.

解:$F_Y(y)=P(Y \le y)=P(ln(x+1) \le y)=P(X \le e^y-1)=F(e^y-1)$

$$f_Y(y)=[F(e^y-1)]'=f(e^y-1)e^y=\begin{cases} (e^y-1)e^y, & 0 \le x < ln2 \\ (3-e^y)e^y, & ln2 \le x < ln3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

题2 2、设对球的直径进行测量，测量值R在区间$[x_0-\delta, x_0+\delta]$上服从均匀分布，试求球体体积$V=\frac{4}{3}\pi(\frac{3}{2})^3=\frac{1}{6}\pi R^3$的概率密度.

解:$f_R(x)=\begin{cases} \frac{1}{2\delta}, & x \in [x_0-\delta, x_0+\delta] \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$,

$$F_V(y)=P(V \le y)=P(\frac{1}{6}\pi R^3 \le y)=P\left\{\left(R \le \frac{6y}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}=F_R\left(\left(\frac{6y}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$f_V(y)=[F_V(y)]'=F_R'(x)\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{6y}{\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{6}{\pi}=\begin{cases} \frac{1}{2\delta}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{6y}{\pi}\right)^{-\frac{2}{3}} y^{-\frac{2}{3}}, & y \in [\frac{\pi}{6}(x_0-\delta)^3, \frac{\pi}{6}(x_0+\delta)^3] \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

题3 3、设随机变量X在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上服从均匀分布,试求$Y=sinX$的概率密度.

解:$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\pi}, & -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$,

$F_Y(y)=P(Y \le y)=P(sinX \le y), -1 \le x \le 1$时, $F_Y(y)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{a} rcsiny\frac{1}{\pi}dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+arcsiny\right)$,

$f(y)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$故$f(y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & -1\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$,

题4 4、已知随机变量X 的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi(1+x^2)}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, 试求$Y=lnX$ 的概率密度.

解:$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(lnX\le y)=P(X\le e^y)=F(e^y)$

$f_Y(y)=[F(e^y)]'=f(e^y)e^y=\frac{2e^y}{\pi(1+e^{2y})}$

题5 5、设随机变量X服从$(0,2)$上的均匀分布，求随机变量$Y=X^2$ 在$(0,4)$内的概率分布密度

解:$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\le x\le 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$0\le y\le 4$时,$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(0y\le X\le\sqrt{y})=\frac{\sqrt{y}}{2}, f_Y(y)=\frac{1}{4\sqrt{y}}$

题6 6、设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\ge 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, 求随机变量$Y=E^X$ 的概率密度$f_Y(y)$

解:$y\ge 1$时,$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^X\le y)=P(0\le X\le lny)=\int_0^{lny}e^{-x}dx=1-\frac{1}{y}, f_Y(y)=\frac{1}{y^2}$

题7 7、假设随机变量ξ 服从参数为2的指数分布，证明$\eta=1-e^{-2\xi}$ 在区间$(0,1)$内服从均匀分布

证:$f_\xi(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x\ge 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$0\le\eta\le 1$时,$F_Y(y)=P(\eta\le y)=P(1-e^{-2\xi}\le y)=P(0\le\xi\le-\frac{1}{2}ln(1-y))=\int_0^{-\frac{1}{2}ln(1-y)}2e^{-2x}dx=y, f_Y(y)=1$

题8 8、设随机变量X服从标准正态分布$N(0,1)$,试求:（1）$Y=e^X$ 的概率密度$f_Y(y)$;（2）$Z=2X^2+1$ 的概率密度$f_Z(z)$。

解:$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $(1)y\ge 0$时,$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^X\le y)=P(X\le lny)==\int_{-\infty}^{lny}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx, f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}y}e^{-\frac{(lny)^2}{2}}$,

$(2)Z\ge 1$时,$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(2X^2+1\le z)=P(-\sqrt{\frac{z-1}{2}}\le X\le\sqrt{\frac{z-1}{2}})=\int_{-\sqrt{\frac{z-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{z-1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx, f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(z-1)}}e^{-\frac{z-1}{4}}$,

4.3 二维连续型随机变量的函数的分布

习题4.3

题1 1、已知随机变量X 与Y 相互独立,其概率密度分别为$f_X(x)=\begin{cases}2, & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, $f_Y(y)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda y}, & y\ge 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, 试求$Z=X+Y$ 的概率密度.

解:$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}2\lambda e^{-\lambda y}, & 0\le x\le\frac{1}{2}, y\ge 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$z<0$时,$f_Z(z)=0$,

$0\le z\le\frac{1}{2}$时,$f_Z(z)=\int_0^z 2\lambda e^{-\lambda y}dx=2(1-e^{-\lambda z})$

$z>\dfrac{1}{2}$时, $f_Z(z)=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}2\lambda e^{-\lambda y}dx=2e^{-\lambda z}(e^{\frac{\lambda}{2}}-1)$

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z>\dfrac{1}{2}\\ 2(1-e^{-\lambda z}), & 0\le z\le\dfrac{1}{2}\\ 2e^{-\lambda z}(e^{\frac{\lambda}{2}}-1), & 其他\end{cases}$$

题2 2、设随机变量X 与Y 相互独立,X 在区间$[0,1]$ 上服从均匀分布, Y 在区间$[0,2]$ 上服从辛普生分布: $f(x)=\begin{cases}y, & 1\le y\le 2\\ 2-y, & 1<y\le 2\\ 0, & 其他\end{cases}$, 试求随机变量$Z=X+Y$ 的概率密度.

解:$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}y, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 2-y, & 0\le x\le 1, 1<y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$z<0$时, $f_Z(z)=0$,

$0\le z\le 1$时, $f_Z(z)=\displaystyle\int_0^z(z-x)dx=\frac{1}{2}z^2$

$1<z\le 2$时, $f_Z(z)=\displaystyle\int_0^{z-1}[2-(z-x)]dx+\int_{z-1}^1(z-x)dx=-z^2+3z-\frac{3}{2}$

$2<z\le 3$时, $f_Z(z)=\displaystyle\int_{z-2}^1[2-(z-x)]dx=\frac{1}{2}(3-z)^2$

$z>3$时, $f_Z(z)=0$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}z^2, & 0<z\le 1\\ -z^2+3z-\dfrac{3}{2}, & 1<z\le 2\\ \dfrac{1}{2}(3-z)^2, & 2<z\le 3\\ 0, & 其他\end{cases}$$

题3 3、设$(X,Y)\sim N(0,1;0,1;\rho)$,令$Z=X-Y$,求Z的概率密度.

解:由正态分布性质知,Z=X-Y服从正态分布, $E(X-Y)=0$,

$D(X-Y)=DX+DY-2cov(X,Y)=DX+DY-2\rho\sqrt{DX}\sqrt{DY}=2(1-\rho)$,

故$f_Z(z)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi(1-\rho)}}e^{-\frac{z^2}{4(1-\rho)}}$

题4 4、已知二维随机变量$(X,Y)\sim N(-1,2^2;1,3^2;0)$,求$Z=4X-2Y+5$ 的概率密度.

解:由正态分布性质知,Z=4X-2Y+5服从正态分布, $E(4X-2Y+5)=-1$,

$D(4X-2Y+5)=4^2DX+2^2DY=100$, 故$f_Z(z)=\dfrac{1}{10\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z+1)^2}{200}}$

题5 5、设X_1,X_2,X_3 相互独立, $X_i(i=1,2,3)$的概率密度为$f(x_i)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x_i}, & x_i>0\\ 0, & x_i\le 0\end{cases}$ $(\lambda>0)Y_1=max(X_1,X_2),Y_2=X_3,X=min(Y_1,Y_2)$, 求X 的概率密度.

解:$X_i(i=1,2,3)$的分布函数为$F_{X_i}(x_i)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x_i}f(t)dt=\begin{cases}1-e^{-\lambda x_i}, & x_i>0\\ 0, & x_i\le 0\end{cases}$

$Y_1=max(X_1,X_2)$的分布函数为$F_{Y_i}(Y_i)=F_{X_1}(y_1)F_{X_2}(y_1)=\begin{cases}(1-e^{-\lambda y_1})^2, & y_1>0\\ 0, & y_1\le 0\end{cases}$

Y_2的分布函数为$F_{Y_2}(y_2) = \int_{-\infty}^{y_2} f(t)dt = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda y_2}, & y_2 > 0 \\ 0, & y_2 \leq 0 \end{cases}$

$X = min(Y_1, Y_2)$的分布函数为$F_X(x) = 1 - F_{Y_1}(x)F_{Y_2}(x) = \begin{cases} 1 - 2e^{-2\lambda x} + e^{-3\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

密度为$f_X(x) = \begin{cases} 4\lambda e^{-2\lambda x} - 3\lambda e^{-3\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

题6 6、已知二维随机变量(X, Y) 的概率密度为$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq 2x \\ 0, & 其他 \end{cases}$, 求$Z = max(X, Y)$的概率密度.

解:$Z = min(X, Y)$的分布函数为$F_Z(z) = 1 - \iint\limits_{x>zy>z}$, $z < -1$时, $F_Z(z) = 0$,

$-1 \leq z \leq 0$时, $F_Z(z) = 1 - \left[\int_z^0 dy \int_{-y}^1 \frac{2}{3}dx + \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^1 \frac{2}{3}dx\right] = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}z^2$

$0 < z \leq 1$时, $F_Z(z) = 1 - \int_z^1 dx \int_z^{2x} \frac{2}{3}dy = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}z$

$z \geq 1$时, $F_Z(z) = 1$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < -1 \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}z^2, & -1 \leq z \leq 0 \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}z, & 0 < z \leq 1 \\ 1, & 其他 \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{2}{3}(z+1), & -1 \leq z \leq 0 \\ \frac{3}{2}, & 0 < z \leq 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

题7 7、设随机变量X 的分布函数为$F(x)$,随机变量Y 服从两点分布：$P(Y = a) = p, P(Y = b) = 1 - p, (0 < p < 1)$,并且$X$ 与Y相互独立，试求随机变量$Z = X + Y$ 的分布函数。

解:$F_Z(z) = P\{X + Y \leq z\} = P\{Y = a\}P\{X + Y \leq z|Y = a\} + P\{Y = b\}P\{X + Y \leq z|Y = b\}$
$= P\{Y = a\}P\{X \leq z - a\} + P\{Y = b\}P\{Y \leq z - b\} = pF(z - a) + (1 - p)F(z - b)$

题8 8、设随机变量X与Y相互独立，且均服从[0,1]上均匀分布，求$Z = |X - Y|$的分布函数和密度函数。

解:$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

$z < 0$时, $F_Z(z) = 0, z > 1$时, $F_Z(z) = 1$,

$0 \leq z \leq 1$时, $F_Z(z) = 1 - 2\int_z^1 dx \int_0^{x-z} 1dy = 1 - (1 - z)^2$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < -1 \\ 1 - (1 - z)^2, & 0 < z \leq 1 \\ 1, & 其他 \end{cases}, \quad f_Z(z) = \begin{cases} 2(z - 1), & 0 < z \leq 1 \\ 1, & 其他 \end{cases}$$

题9 9、设连续性二维随机向量的概率密度为$f(x, y) = \begin{cases} 3x, & 0 < y < x, 0 < x < 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$ 求$Z = X - Y$ 的概率密度

解:$F_Z(z) = \iint\limits_{x-y \leq z} f(x, y)dxdy$

$z<0$时$,F_Z(z)=0,z>1$时$,F_Z(z)=1,$
$0\le z\le 1$时$,F_Z(z)=\int_0^z\int_0^x 3xdydx+\int_1^z\int_{x-1}^x 3xdydx=\frac{3}{2}z-\frac{z^3}{2}$
密度函数为$,f_Z(z)=\begin{cases}\frac{3}{2}(1-z^2), & 0<z\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

题10 10、已知二维连续型随机变量(X,Y)的分布函数$F(x,y)=\begin{cases}0, & x\le 0\text{或}y\le 0\\ \frac{1}{3}xy(x+2y), & 0<x<1,0<y<1\\ \frac{x}{3}(x+2), & 0<x<1,y\ge 1\\ \frac{y}{3}(2y+1), & x\ge 1,0<y<1\\ 1, & x\ge 1,y\ge 1\end{cases}$ 试求：（1）$Z_1=max(X,Y)$ 的概率密度；（2）$Z_2=min(X,Y)$ 的概率密度。

解:(1)$F_{Z_1}(z_1)=F(z_1,z_1),z_1<0$时$,F_{Z_1}(z_1)=F(z_1,z_1)=0,z_1>1$时$,F_{Z_1}(z_1)=F(z_1,z_1)=1,$
$0\le z_1\le 1$时$,F_{Z_1}(z_1)=F(z_1,z_1)=z_1^3$

$$F_{Z_1}(z_1)=\begin{cases}0, & z<0\\ z_1^3, & 0\le z_1\le 1\\ 1, & z>1\end{cases},f_{Z_1}(z_1)=\begin{cases}3z_1^2, & 0\le z_1\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(2)$F_{Z_2}(z_2)=F(z_2,+\infty)+F(+\infty,z_2)-F(z_2,z_2)\},z_2<0$时$,F_{Z_2}(z_2)=0+0-0=0,z_2>1$时$,F_{Z_2}(z_2)=1+1-1=1,$
$0\le z_2\le 1$时$,F_{Z_2}(z_2)=\frac{z_2}{3}(z_2+2)+\frac{z_2}{3}(2z_2+1)-\frac{1}{3}z_2^2(z_2+2z_2)=z_2+z_2^2-z_2^3$

$$F_{Z_2}(z_2)=\begin{cases}0, & z<0\\ z_2+z_2^2-z_2^3, & 0\le z_2\le 1\\ 1, & z>1\end{cases},f_{Z_2}(z_2)=\begin{cases}1+2z_2-3z_2^2, & 0\le z_2\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

第五章　随机变量的数字特征

5.1　数学期望

题1　1、公共汽车起点站于每小时的10分，30分，55分发车，该顾客不知发车时间，在每小时内的任一时刻随机到达车站，求乘客候车时间的数学期望（准确到秒）。

解:设到达车站时间为X分,则等待时间T为$T=\begin{cases}X, & 0<X\le 10\\ X-10, & 10<X\le 30\\ X-30, & 30<X\le 55\\ 70-X, & 55<X\le 60\end{cases}$

$$ET=\int_0^{10}x\frac{1}{60}dx+\int_{10}^{30}(x-10)\frac{1}{60}dx+\int_{30}^{55}(x-30)\frac{1}{60}dx+\int_{55}^{60}(70-x)\frac{1}{60}dx=10\frac{25}{60}\text{分}=10\text{分}25\text{秒}$$

题2　2、某射手命中目标的概率为p，设X表示该射手首次命中目标时的射击次数，求随机变量X的数学期望

解:$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p^k, EX=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}k(1-p)^{k-1}\cdot p=p\sum\limits_{k=1}^{+\infty}[(1-x)^k]'\Big|_{x=p}$

$$=p\left[\sum_{k=1}^{+\infty}(1-x)^k\right]'\Bigg|_{x=p}=p\left(\frac{1-x}{x}\right)'\Bigg|_{x=p}=\frac{1}{p}$$

题3　3、若事件A在第i次试验中出现的概率为p_i,设X是事件A在起初n次独立重复试验中出现的次数,求$E(X)$.

解:设$X_i=\begin{cases}1, & \text{第i次出现}\\ 0, & \text{第i次不出现}\end{cases}$ $(i=1,\cdots,n)$,则$X=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i, EX_i=p_i, EX=\sum\limits_{i=1}^{n}p_i$

题4　4、将红、白、黑三只球随机地逐个放入编号为$1,2,3,4$的四个盒内（每盒容纳球的个数不限），以X表示有球盒子的最小号码，求随机变量X的分布律,并求EX.

解:

X	1	2	3	4
p	$\frac{37}{64}$	$\frac{19}{64}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{1}{64}$

$EX=\sum\limits_{k=1}^{4}kP(X=k)=1\times\frac{37}{64}+2\times\frac{19}{64}+3\times\frac{7}{64}+4\times\frac{1}{64}=\frac{25}{16}$

题5　5、设对某目标进行射击,每次击发一枚子弹，直到击中目标n次为止。设各次射击相互独立，且每次射击时击中目标的概率为$p(0<p<1)$,试求子弹的消耗量X的数学期望。

解:设$X_i=$第i-1次击中后起至第i次击中目标时所消耗的子弹数$,X_1=$第1次击中所消耗的子弹数,

则X_i的分布律为$P(X_i=k)=(1-p)^{k-1}p, k=1,2,\cdots, X=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i, EX_i=\frac{1}{p}, EX=\sum\limits_{i=1}^{n}EX_i=\frac{n}{p}$

题6　6、设随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<x<1, 0<y<x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$,求$E(X+Y)$及$E(XY)$.

解:$E(X+Y)=\int_0^1\int_0^x 2(X+Y)dydx=1, E(XY)=\int_0^1\int_0^x 2(XY)dydx=\frac{1}{4}$

题7　7、已知随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$,求(1) $Y=2X$的数学期望;(2)$Z=X^2+1$的数学期望.

解:$EY=E(2X)=\int_0^2 2x\frac{x}{2}dx=\frac{8}{3},EZ=E(X^2+1)=\int_0^2(x^2+1)\frac{x}{2}dx=3$

题8 8、设$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取正值的相互独立随机变量，且服从相同分布，密度函数为$f(x)$。试证$E(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_k}{X_1+X_2+\cdots+X_n})=\frac{k}{n}$.

证:$E(\frac{X_1}{X_1+X_2+\cdots+X_n})=E(\frac{X_2}{X_1+X_2+\cdots+X_n})=\cdots=E(\frac{X_n}{X_1+X_2+\cdots+X_n})$

$E(\frac{X_1}{X_1+X_2+\cdots+X_n})+E(\frac{X_2}{X_1+X_2+\cdots+X_n})+\cdots+E(\frac{X_n}{X_1+X_2+\cdots+X_n})=1$

$E(\frac{X_1}{X_1+X_2+\cdots+X_n})=E(\frac{X_2}{X_1+X_2+\cdots+X_n})=\cdots=E(\frac{X_n}{X_1+X_2+\cdots+X_n})=\frac{1}{n}$,可证.

5.2 方差

题1 1、盒中有7个球，其中4个白球，3个黑球，从中任抽3个球，求抽到白球数X 的数学期望EX 和方差DX 。

解:

X	0	1	2	3
p	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	435

$,EX=\sum_{k=0}^{3}kP(X=k)=0\times\frac{1}{35}+1\times\frac{12}{35}+2\times\frac{18}{35}+3\times\frac{4}{35}=\frac{12}{7}$

$EX^2=\sum_{k=0}^{3}kP(X=k)=0\times\frac{1}{35}+1\times\frac{12}{35}+4\times\frac{18}{35}+9\times\frac{4}{35}=\frac{24}{7},DX=EX^2-(EX)^2=\frac{24}{49}$

题2 2、设随机变量X的概率密度为$\varphi(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ ，且$EX=0.5,DX=0.15$，求常数a,b,c

解:$\int_0^1 ax^2+bx+cdx=1,EX=\int_0^1 x(ax^2+bx+cdx)=0.5,$

$EX^2=DX+(EX)^2=0.4=\int_0^1 x^2(ax^2+bx+cdx)$,得$a=12,b=-12,c=3$

题3 3、设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{3}(x+y), & 0<x<1,0<y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 求EX,DX

解:$EX=\int_0^1\int_0^2 x\frac{1}{3}(x+y)dydx=\frac{5}{9},EX^2=\int_0^1\int_0^2 x^2\frac{1}{3}(x+y)dydx=\frac{63}{162},DX=EX^2-(EX)^2=\frac{13}{162}$

题4 4、设随机变量$X\sim N(\mu,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu,\sigma_2^2)$,且$X$与$Y$ 独立,求$D(|X-Y|)$.

解:$Z=X-Y\sim N(0,\sigma_1^2+\sigma_2^2),E|Z|^2=EZ^2=DZ+(EZ)^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2$

$E|Z|=2\int_0^{+\infty}z\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}e^{-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}dz=\sqrt{\frac{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{\pi}},D|Z|=E|Z|^2-(E|Z|)^2=(1-\frac{2}{\pi})(\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

题5 5、点随机地落在中心在原点、半径为R的圆周上，并且对弧长是均匀分布的，求落点的横坐标的均值和方差。

解:$\theta\sim(0,2\pi),ERcos\theta=\int_0^{2\pi}Rcos\theta\frac{1}{2\pi}d\theta=0,E(Rcos\theta)^2=\int_0^{2\pi}(Rcos\theta)^2\frac{1}{2\pi}d\theta=\frac{1}{2}R^2$

$DRcos\theta=ERcos\theta-E(Rcos\theta)^2=\frac{1}{2}R^2$

题6 6、在长为l 的线段上任意选取两点，求两点间距离的数学期望及标准差。

解:$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{l^2}, & 0<x<l,0<y<l\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$E|X-Y|=\int_0^l\int_0^l|x-y|\frac{1}{l^2}dydx=2\int_0^l\int_0^x(x-y)\frac{1}{l^2}dydx=\frac{l}{3},$

$E|X-Y|^2=\int_0^l\int_0^l(x-y)^2\frac{1}{l^2}dydx=\frac{l^2}{6},D|X-Y|=E|X-Y|^2-(E|X-Y|)^2=\frac{l^2}{18},\sqrt{D|X-Y|}=\frac{l}{3\sqrt{2}}$

题7 7、从区间$[0,1]$中随机地抽取n个点$X_1,X_2,\cdots,X_n$设$Z_1=max(X_1,X_2,\cdots,X_n),Z_2=min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 试求：$EZ_1,EZ_2,DZ_1,DZ_2,E(Z_1-Z_2)$

解:$0\le z_1\le 1$时,$F_{Z_1}(z_1)=P(Z_1\le z_1)=P(X_1\le z_1,\cdots,X_n\le z_1,)=z_1^n,f_{Z_1}(z_1)=\begin{cases}nz_1^{n-1}, & 0\le z_1\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$EZ_1=\int_0^1 nz_1^n dz_1=\frac{n}{n+1}$

$0\le z_2\le 1$时,$F_{Z_2}(z_2)=P(Z_2\le z_2)=1-(1-P(X_1\le z_2),\cdots,(1-P(X_n\le z_2)=1-(1-z_2)^n$,

$f_{Z_2}(z_2)=\begin{cases}n(1-z_2)^{n-1}, & 0\le z_2\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$EZ_1^2=\int_0^1 nz_1^{n+1}dz_1=\frac{n}{n+2},DZ_1=EZ_1^2-(EZ_1)^2=\frac{2}{n+2}-\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=\frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$,

$EZ_2=\int_0^1 n(1-z_2)^{n-1}z_2dz_2=-n\int_0^1[(1-z_2)^{n-1}-(1-z_2)^n]d(1-z_2)=\frac{1}{n+1},DZ_1$,

$EZ_2^2=\int_0^1 n(1-z_2)^{n-1}z_2^2dz_2=-n\int_0^1[(1-z_2)^{n-1}-2(1-z_2)^n+(1-z_2)^{n+1}]d(1-z_2)=\frac{2}{(n+1)(n+2)}$,

$DZ_2=EZ_2^2-(EZ_2)^2=\frac{2}{(n+1)(n+2)}-\left(\frac{1}{n+1}\right)^2=\frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$,

$E(Z_1-Z_2)=E(Z_1)-E(Z_2)=\frac{n}{n+1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n-1}{n+1}$

题8 8、设连续型随机变量X的一切可能值在区间$[a,b]$内，其密度函数为$f(x)$，证明：

$(1)a\le EX\le b;(2)DX\le\frac{(b-a)^2}{4}$

解:$(1)a\le X\le b,a\le EX\le b$,

(2)令$Y=\frac{X-a}{b-a}$,则$0\le Y\le 1,Y^2\le Y,DY=\frac{1}{(b-a)^2}DX=EY^2-(EY)^2\le EY-(EY)^2\le\frac{1}{4}$,

$DX\le\frac{(b-a)^2}{4}$

5.3 常用随机变量的数学期望和方差

题1 1、设随机变量$X_i\sim N(-2,3^2)(i=1,2)$,且X_1 与X_2 相互独立. 给定常数a,b ,求$D(aX_1-bX_2),E(aX_1^2-bX_2^2)$.

解:$D(aX_1-bX_2)=a^2D(X_1)+b^2D(X_2)=9(a^2+b^2),E(aX_1^2-bX_2^2)=aE(X_1^2)-bE(X_2^2)=13(a-b)$

题2 2、设一次试验成功的概率是p，进行100次独立重复试验，当p为多少时，成功次数的标准差的值最大，最大值是多少？

解:$X\sim B(100,p),\sqrt{DX}=\sqrt{100p(1-p)},p=0.5,max_{\sqrt{DX}}=25$

题3 3、设随机变量X服从$[1,3]$上的均匀分布，求$\frac{1}{X}$ 的数学期望。

解:$EX=\int_1^3\frac{1}{x}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}ln3$

题4 4、设X表示10次独立重复射击命中目标的次数，每次射中目标的概率为0.4，求X^2 的数学期望EX^2

解:$X\sim B(10,0.4),EX^2=DX+(EX)^2=10\cdot 0.4\cdot 0.6+(10\cdot 0.4)^2=18.4$

题5 5、设随机变量X与Y独立，且X服从均值为1、标准差（均方差）为$\sqrt{2}$ 的正态分布，Y服从标准正态分布,试求随机变量$Z=2X-Y+3$ 的概率密度函数。

解:Z服从正态分布,且$EZ=2\times 1-1\times 0+3=5,DZ=2^2\times 2+1^2\times 1=9$,故$f_Z(z)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(x-5)^2}{18}}$

题6 6、设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}cos\frac{x}{2}, & 0\le x<\pi\\ 0, & 其他\end{cases}$ 对X独立地重复观察4次，用Y表示观测值大于$\frac{\pi}{3}$ 的次

数，求Y^2 的数学期望

解:$P(X>\frac{\pi}{3})=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}cos\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2},Y\sim B(4,\frac{1}{2}),EY^2=DY+(EY)^2=5$

题7 7、已知随机变量X的概率密度是$p(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$，求$X$的数学期望和方差

解:$X\sim N(0,\frac{1}{2}),EX=0,DX=\frac{1}{2}$

题8 8、对球的直径进行近似测量,设其值在$[a,b]$ 上服从均匀分布,求球的体积的均值.

解:$E\left[\frac{1}{6}\pi d^3\right]=\int_a^b\frac{1}{6}\pi x^3\frac{1}{b-a}dx=\frac{\pi(a+b)(a^2+b^2)}{24}$

题9 9、设随机变量X 的概率密度为$f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\0, & 其他\end{cases}$,求$E(X+e^{-X})$。

解:$E(X)=\frac{1}{2}E(e^{-X})=\int_0^{+\infty}e^{-x}\cdot 2e^{-2x}dx=\int_0^{+\infty}\cdot 2e^{-3x}dx=\frac{2}{3},E(X+e^{-X})=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}$

题10 10、100个产品中有5个次品，任取10个，求次品个数的数学期望和方差。

解:设$X_i=\begin{cases}1, & 第i次抽到次品\\0, & 第i次没抽到次品\end{cases}$ $i=1,2,\cdots,10$,则$DX_i=\frac{5}{100}\cdot\frac{95}{100}=\frac{19}{400},Cov(X_i,X_j)=EX_iX_j-EX_iX_j=$

$\frac{A_5^2 98!}{100!}=\frac{1}{99\cdot 5}-\frac{5}{100}\cdot\frac{5}{100},X=\sum_{i=1}^{10}X_i,DX=\sum_{i=1}^{10}DX_i+2\sum_{i\neq j}Cov(X_i,X_j)=10\cdot\frac{19}{400}+2\cdot 45\cdot(\frac{1}{99\cdot 5}-\frac{5}{100}\cdot\frac{5}{100})=\frac{19}{44}$

5.4 协方差和相关系数

习题5.4

题1 1、设随机变量(X,Y) 的联合概率密度是$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,0<x<1\\0, & 其他\end{cases}$,求$Cov(X,Y)$.

解:$EXY=\int_0^1\left[\int_{-x}^{x}xydy\right]dx=0,EX=\int_0^1\left[\int_{-x}^{x}xdy\right]dx=\frac{2}{3},EY=\int_0^1\left[\int_{-x}^{x}ydy\right]dx=0,$
$Cov(X,Y)=EXY-EXEY=0$

题2 2、已知$DX=25,DY=36,\rho_{XY}=0.4$,求$D(X+Y),D(X-Y)$.

解:$D(X+Y)=DX+DY+2\rho_{XY}\sqrt{DXDY}=85,D(X-Y)=DX+DY-2\rho_{XY}\sqrt{DXDY}=37$

题3 3、设随机变量(X,Y) 的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}asin(x+y), & 0\le x\le\frac{\pi}{2},0\le y\le\frac{\pi}{2}\\0, & 其他\end{cases}$,

求:(1)常数a ;(2)EX,DX,EY,DY ;(3)$E(XY),Cov(X,Y)$及ρ_{XY}.

解:(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}asin(x+y)dydx=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sinx+cosx)dx=a\left(sinx-cosx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=1,a=\frac{1}{2}$

$(2)EX=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin(x+y)xdxdy=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-xcos(x+y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+sin(x+y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)dy$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}siny+cosy-siny\right)dy=\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}cosy+siny+cosy\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4},$

$EX^2=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin(x+y)x^2dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-x^2cos(x+y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2xsin(x+y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2cos(x+y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)dy$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left((\frac{\pi}{2})^2siny+\pi cosy-2siny-2cosy\right)dy=\frac{1}{2}\left(-(\frac{\pi}{2})^2cosy+\pi siny+2cosy-2siny\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}-2,$

$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2,$

由对称性,$EY = \frac{\pi}{4}, DY = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2,$

$(3)EXY = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} y \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x sin(x+y) dx dy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} y[(\frac{\pi}{2}-1)siny + cosy]dy$

$= \frac{1}{2}\left\{ y\left[(\frac{\pi}{2}-1)(-cosy) + siny\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\left[(\frac{\pi}{2}-1)(-cosy) + siny\right] dy \right\}$

$= \frac{1}{2}\left\{ y\left[(\frac{\pi}{2}-1)(-cosy) + siny\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[(\frac{\pi}{2}-1)siny + cosy\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right\}$

$= \frac{1}{2}\left\{ \frac{\pi}{2} + [(\frac{\pi}{2}-1)-1] \right\} = \frac{\pi}{2} - 1$

$Cov(X,Y) = EXY - EXEY = \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{\pi^2}{16}, \rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DXDY}} = \frac{8\pi - 16 - \pi^2}{8\pi - 32 + \pi^2}$

题4 4、设ξ 在$(-\pi,\pi)$上服从均匀分布,$X = sin\xi, Y = cos\xi$, (1)求EX, EY ; (2)求EX^2, DX, EY^2, DY ;(3)求$Cov(X,Y)$; (4)求X与Y 的相关系数ρ , X与Y是否相关?

解:$f_\xi(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & -\pi \le \theta < \pi \\ 0, & 其他 \end{cases}$

$(1)EX = \int_{-\pi}^{\pi} sin\theta \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta = 0, EY = \int_{-\pi}^{\pi} cos\theta \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta = 0$

$(2)EX^2 = \int_{-\pi}^{\pi} sin^2\theta \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-cos2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2}, DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{1}{2}$

$EY^2 = \int_{-\pi}^{\pi} cos^2\theta \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+cos2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2}, DY = EY^2 - (EY)^2 = \frac{1}{2}$

$(3)EXY = \int_{-\pi}^{\pi} sin\theta cos\theta \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{sin2\theta}{2} d\theta = 0, Cov(X,Y) = EXY - EXEY = 0, \rho = 0,$不相关

题5 5、设A, B为随机事件，且$P(A) = \frac{1}{4}, P(B|A) = \frac{1}{3}, P(A|B) = \frac{1}{2}$ 令$X = \begin{cases} 1, & A发生 \\ 0, & A不发生 \end{cases}, Y = \begin{cases} 1, & B发生 \\ 0, & B不发生 \end{cases},$

求：（1）二维随机变量(X,Y) 的概率分布（2）X与Y 的相关系数ρ_{XY}

解:$(1)P(X=1,Y=1) = P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{12}, P(X=1,Y=0) = P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = \frac{1}{6},$

$P(B) = \frac{P(AB)}{P(A|B)} = \frac{1}{6},$

$P(X=0,Y=1) = P(B\overline{A}) = P(B) - P(AB) = \frac{1}{12}, P(X=0,Y=0) = P(\overline{B}) - P(A\overline{B}) = \frac{2}{3},$

X \ Y	0	1
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

$(2)EX = \frac{1}{4}, DX = \frac{1}{4}\frac{3}{4} = \frac{3}{16}, EY = \frac{1}{6}, DY = \frac{1}{6}\frac{5}{6} = \frac{5}{36},$

$EXY = \frac{1}{12}, Cov(X,Y) = EXY - EXEY = \frac{1}{24}, \rho_{XY} = \frac{\sqrt{15}}{15}$

题6 6、设$X_1, X_2, \cdots, X_{n+m}(n > m)$是独立同分布且方差存在的随机变量，又令$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, Z = X_{m+1} + X_{m+2} + \cdots + X_{m+n}$求$\rho_{YZ}$

解:记$EX_i = \mu, DX_i = \sigma^2$,则$EX_i^2 = \mu^2 + \sigma^2, i = 1, 2, \cdots, m+n$

$EYZ = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)(X_{m+1} + X_{m+2} + \cdots + X_{m+n}) = n^2\mu^2 + (n-m)\sigma^2, EY = n\mu, EZ = n\mu,$

$$Cov(Y,Z)=EYZ-EYEZ=(n-m)\sigma^2, DY=n\sigma^2, DZ=n\sigma^2, \rho_{XY}=\frac{(n-m)\sigma^2}{\sqrt{n\sigma^2 n\sigma^2}}=\frac{n-m}{n}$$

题7 7、设二维随机变量(X,Y)的密度函数$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y), & 0\le x\le 2, 0\le y\le 2\\ 0, & \text{不发生}\end{cases}$

求$EX, DX, EY, DY, Cov(X,Y), \rho_{XY}$

解:$EX=\int_0^2\int_0^2\frac{1}{8}(x+y)xdxdy=\frac{7}{6}, EX^2=\int_0^2\int_0^2\frac{1}{8}(x+y)x^2dxdy=\frac{5}{3}, DX=EX^2-(EX)^2=\frac{5}{3}-(\frac{7}{6})^2=\frac{11}{36}$

由对称性,$EY=\frac{7}{6}, DY=\frac{11}{36}, EXY=\int_0^2\int_0^2\frac{1}{8}(x+y)xydxdy=\frac{4}{3}, Cov(X,Y)=\frac{4}{3}-(\frac{7}{6})^2=-\frac{1}{36}$,

$\rho_{XY}=\frac{-1/36}{11/36}=-\frac{1}{11}$

题8 8、设连续型随机变量X的概率密度函数是偶函数，且$EX^2<+\infty$，试证X与$|X|$不相关。

证:$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=0, EX|X|=\int_{-\infty}^{+\infty}x|x|f(x)dx=0, Cov(X,|X|)=0$

5.5 矩、协方差矩阵

习题5.5

题1 1、设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,求$E|X-\mu|, D|X-\mu|$。

解: $E|X-\mu|=\int_{-\infty}^{+\infty}|x-\mu|\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=2\int_0^{+\infty}z\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz=\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\sigma^2(-e^{\frac{z^2}{2\sigma^2}})'dz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$,

$E|X-\mu|^2=DX=\sigma^2, D|X-\mu|=E|X-\mu|^2-(E|X-\mu|)^2=(1-\frac{2}{\pi})\sigma^2$

题2 2、设随机变量X 与Y 相互独立同服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$,求(1)$Z=|X-Y|$ 的概率密度$F_Z(z)$;(2) $E|X-Y|$

解:$X-Y\sim N(0,2\sigma^2), z\ge 0$时,$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(-z\le X-Y\le z)=\int_{-z}^{z}\frac{1}{\sqrt{2}\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{z^2}{4\sigma^2}}dz$,

$f_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{1}{\sqrt{2}\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{z^2}{4\sigma^2}}+\frac{1}{\sqrt{2}\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{z^2}{4\sigma^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{z^2}{4\sigma^2}}=\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}e^{\frac{z^2}{4\sigma^2}}$

$E|X-Y|=\int_0^{+\infty}z\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}e^{\frac{z^2}{4\sigma^2}}dz=\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}2\sigma^2(-e^{\frac{z^2}{4\sigma^2}})dz=\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}$

题3 3、在长为a的线段上任取两点，求两点间的距离的期望和方差。

解:$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{a^2}, & 0<x<a, 0<y<a\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$,

$E|X-Y|=\int_0^a\int_0^a|x-y|\frac{1}{a^2}dydx=2\int_0^a\int_0^x(x-y)\frac{1}{a^2}dydx=\frac{a}{3}$,

$E|X-Y|^2=\int_0^a\int_0^a|x-y|^2\frac{1}{a^2}dydx=2\int_0^a a\cdot\frac{x^3}{3}-a^2\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{a^3}{3}\cdot xdx=\frac{a^2}{6}$,

$D|X-Y|=E|X-Y|^2-(E|X-Y|)^2=\frac{a^2}{18}$

题4 4、设随机变量X 与Y的协方差矩阵为$\begin{pmatrix}25 & 12\\ 12 & 36\end{pmatrix}$，求$D[(X+Y)/2], D[(X-Y)/2]$

解:$D[(X+Y)/2]=\frac{1}{4}(DX+DY+2Cov(X,Y))=\frac{1}{4}(25+36+2\cdot 12)=\frac{85}{4}$,

$D[(X-Y)/2]=\frac{1}{4}(DX+DY-2Cov(X,Y))=\frac{1}{4}(25+36-2\cdot 12)=\frac{37}{4}$

第六章　大数定律和中心极限定理

6.1　马尔可夫不等式和契比雪夫不等式

习题6.1

题1　1、在每次试验中，事件A发生的概率为0.75，利用切比雪夫不等式：(1)在1000次独立事件中，事件A发生的次数在$700-800$之间的概率至少是多少；(2)n取多大时才能保证在n次重复独立试验中事件A出现的频率在$0.74\sim 0.76$之间的概率至少是0.90?

解:(1)$X\sim B(1000,0.75),EX=750,DX=187.5,P(|X-EX|<50)\geq 1-\dfrac{DX}{50^2}=0.925$

(2)$EX=0.75n,DX=0.1875n,P(0.74<\dfrac{X}{n})=P(|X-0.75n|<0.01n)\geq 1-\dfrac{0.1875n}{0.01n^2}=1-\dfrac{1875}{n}\geq 0.9,n\geq 18750$

题2　2、设随机变量X的数学期望$EX=\mu$，方差$DX=\sigma^2$，用切比雪夫不等式估计概率$P(|X-\mu|\geq 3\sigma)$。

解:$P(|X-\mu|\geq 3\sigma)\geq\dfrac{\sigma^2}{(3\sigma)^2}=\dfrac{1}{9}$

题3　3、设随机变量ξ 的概率密度$\rho(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$用切比雪夫不等式估计概率$P(0<\xi<6)$

解:$EX=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}x^3e^{-x}dx=3,EX^2=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}x^4e^{-x}dx=12,DX=12-3^2=3$

$P(|X-3|<3)\geq 1-\dfrac{3}{3^2}=\dfrac{2}{3}$

题4　4、假设某一年龄段女童的平均身高为130厘米，标准差是8厘米，现在从该年龄段女童中随机地选取五名儿童测其身高，试用切比雪夫不等式估计它们的平均身高$\overline{X}$ 在120到140厘米之间的概率

解:$P(|X-130|\leq 10)\geq 1-\dfrac{8^2}{5\cdot 10^2}=0.872$

题5　5、在区间$(0,1)$中任取100个数$X_i,i=1,2,\cdots,100$，则由切比雪夫估计概率$P(45\leq\sum\limits_{i=1}^{100}X_i\leq 55)$

解:$X_i\sim U(0,1),EX_i=0.5,DX_i=\dfrac{1}{12},E[\displaystyle\sum_{i=1}^{100}X_i]=50,D[\sum_{i=1}^{100}X_i]=\frac{25}{3},$

$P(|X-50|\leq 5)\geq 1-\dfrac{25}{3\cdot 5^2}=\dfrac{2}{3}$

题6　6、设$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是相互独立的随机变量序列,且其分布律为$P(X_n=-\sqrt{n})=\dfrac{1}{2^{n+1}},P(X_n=\sqrt{n})=\dfrac{1}{2^{n+1}},P(X_n=0)=1-\dfrac{1}{2^n},n=1,2,\cdots$ 记$Y_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i,n=1,2,\cdots,$。证明: 对任给$\varepsilon>0$,成立$\lim\limits_{n\to+\infty}P(|Y_n|<\varepsilon)=1$。

证:$EX_n=-\sqrt{n}\cdot\dfrac{1}{2^{n+1}}+\sqrt{n}\cdot\dfrac{1}{2^{n+1}}+0\cdot(1-\dfrac{1}{2^n})=0,EX_n^2=(-\sqrt{n})^2\cdot\dfrac{1}{2^{n+1}}+(\sqrt{n})^2\cdot\dfrac{1}{2^{n+1}}+0\cdot(1-\dfrac{1}{2^n})=\dfrac{n}{2^n},$
$DX_n=\dfrac{n}{2^n}\leq 1,E(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}X_k)=0,D(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}DX_k\leq\frac{1}{n^2}n=\frac{1}{n},P(|\sum_{k=1}^{n}X_k-E\sum_{k=1}^{n}X_k|<\varepsilon)\geq$
$1-\dfrac{D\sum\limits_{k=1}^{n}X_k}{\varepsilon^2}=1-\dfrac{1}{n\varepsilon^2}\to 1$

6.2 大数定律

习题6.2

题1 1、设随机变量序列$X_1, X_2, \cdots, X_n$独立同分布，X_i 分布列为

X	$-ia$	0	ia
P	$\frac{1}{2i^2}$	$1-\frac{1}{i^2}$	$\frac{1}{2i^2}$

用切比雪夫定理或不等式证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} P(|\sum\limits_{k=1}^{n} X_k| < \varepsilon) = 1$。

证:$EX_n = -ia\cdot\frac{1}{2i^2} + ia\cdot\frac{1}{2i^2} + 0\cdot(1-\frac{1}{i^2}) = 0, EX_n^2 = (-ia)^2\cdot\frac{1}{2i^2} + (ia)^2\cdot\frac{1}{2i^2} + 0\cdot(1-\frac{1}{i^2}) = a^2,$

$DX_n = a^2, E(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k) = 0, D(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} DX_k \le \frac{a^2}{n},$

$$P(|\sum_{k=1}^{n} X_k - E\sum_{k=1}^{n} X_k| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{D\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{a^2}{n\varepsilon^2} \to 1$$

题2 2、设$\{\xi_n\}$ 是独立随机变量序列，且$P(\xi_n = \pm\sqrt{lnn}) = \frac{1}{2}, n = 1, 2, \cdots$，验证$\{\xi_n\}$ 服从大数定律

证:$E\xi_k = 0, D\xi_k = E\xi_k^2 = lnk, D(\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} D\xi_k = \sum\limits_{k=1}^{n} lnk \le nlnn, \frac{1}{n^2}D(\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k) \le \frac{lnn}{n} \to 0(n\to+\infty)$, 由马尔科夫定律知服从大数定律.

题3 3、设$\{X_k\}$是独立随机变量序列，且$P\{X_k = \pm 2^k\} = \frac{1}{2^{2k+1}}, P\{X_k = 0\} = 1 - \frac{1}{2^{2k}}, k = 1, 2, \cdots$ 验证$\{X_k\}$ 服从大数定律

证:$E(X_k) = 2^k\cdot\frac{1}{2^{2k+1}} - 2^k\cdot\frac{1}{2^{2k+1}} + 0\cdot(1-\frac{1}{2^{2k}}) = 0, E(D_k) = 2^{2k}\cdot\frac{1}{2^{2k+1}} + 2^{2k}\cdot\frac{1}{2^{2k+1}} + 0\cdot(1-\frac{1}{2^{2k}}) = 1,$

$E[\sum\limits_{k=1}^{n} X_k] = 0, D[\sum\limits_{k=1}^{n} X_k] = \frac{1}{n}, P(|\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - E(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k)| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2} \to 1$

题4 4、设$\{X_n\}$是独立随机变量序列，其中X_n 服从参数为$\sqrt{n}$ 的泊松分布，试问$\{X_n\}$是否服从大数定律？

解:$E\xi_n = \sqrt{n}, D\xi_n = \sqrt{n}, \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{D\xi_n}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^{\frac{3}{2}}} < +\infty$

6.3 中心极限定理

习题6.3

题1 1、用契比雪夫不等式确定当投掷一枚均匀硬币时,需投多少次,才能使出现正面的频率在0.4至0.6之间的概率不小于90% .并用德莫弗-拉普拉斯定理计算同一问题,然后进行比较.

解:$X_n \sim B(n, \frac{1}{2}), EX_n = \frac{n}{2}, DX_n = \frac{n}{4},$

$P(0.4 < \frac{X_n}{n} < 0.6) = P(|X_n - EX_n| < 0.1n)$

由契比雪夫不等式,$P(|X_n - EX_n| < 0.1n) \ge 1 - \frac{DX_n}{(0.1n)^2} = 1 - \frac{0.25n}{0.01n^2} \ge 0.9, n \ge 250,$

由德莫弗-拉普拉斯定理,$P(|X_n - EX_n| < 0.1n) = P\left(\left|\frac{X_n - EX_n}{\sqrt{DX_n}}\right| < \frac{0.1n}{\sqrt{DX_n}}\right) = P\left(\left|\frac{X_n - EX_n}{\sqrt{DX_n}}\right| < 0.2\sqrt{n}\right) = 2\Phi(\sqrt{n}) - 1 \ge 0.9, n \ge 68,$

题2 2、作加法运算时,先对每个数取整(既四舍五进取作整数).设所有取整产生的误差是相互独立的,且都在区间$(-0.5, 0.5]$上服从均匀分布,求最多几个数相加,方能保证误差总和的绝对值小于15的概率大于0.90.

解:$X_i \sim U(0.5, 0.5], EX_i = 0, DX_i = \frac{1}{12},$

$$P\left(|\sum_{i=1}^{n}| \le 15\right) = P\left(\frac{-15}{\sqrt{n\cdot\frac{1}{12}}} \le \sum_{i=1}^{n} \le \frac{15}{\sqrt{n\cdot\frac{1}{12}}}\right) = \Phi\left(30\sqrt{\frac{3}{n}}\right) - \Phi\left(-30\sqrt{\frac{3}{n}}\right) = 2\Phi\left(30\sqrt{\frac{3}{n}}\right) - 1 > 0.9,$$

$$\Phi\left(30\sqrt{\frac{3}{n}}\right) > 0.95, 30\sqrt{\frac{3}{n}} > z_{0.95} = 1.65, n < 992$$

题3 3、设随机变量$X_n, n = 1, 2, \cdots$ 相互独立且都在$[-1,1]$上服从均匀分布，则求$\lim\limits_{n\to+\infty} P(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \le \sqrt{n})$

解:$X_i \sim U[-1,1], EX_i = 0, DX_i = \frac{1}{3}, D\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = \frac{n}{3}$

$$\lim_{n\to+\infty} P(\sum_{i=1}^{n} X_i \le \sqrt{n}) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{\frac{n}{3}}} \le \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{n}{3}}} = \sqrt{3}\right) = \Phi(\sqrt{3})$$

题4 4、将一枚硬币连掷100次，用中心极限定理求出现正面次数大于60的概率？

解:$P(X_i = 0) = \frac{1}{2}, P(X_i = 1) = \frac{1}{2}, EX_i = \frac{1}{2}, DX_i = \frac{1}{4}, E\sum\limits_{i=1}^{100} X_i = 50, D\sum\limits_{i=1}^{100} X_i = 25,$

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 60\right) = P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{100} X_i - 50}{\sqrt{25}} > \frac{60-50}{\sqrt{25}} = \right) \approx 0.0228$$

题5 5、假设某种型号的螺丝钉的重量是随机变量，期望值为50克，标准差是5克。求：（1）100个螺丝钉一袋的重量超过5.1千克的概率；（2）每箱螺丝钉装有500袋，500袋中最多有4%的重量超过5.1千克的概率。

解:$(1)EX_i = 50, DX_i = 25, E\sum\limits_{i=1}^{100} X_i = 5000, D\sum\limits_{i=1}^{100} X_i = 2500,$

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 5100\right) = P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{100} X_i - 5000}{\sqrt{25}} > \frac{5100-5000}{\sqrt{2500}} = \right) \approx 0.0228$$

$(2)Y \sim B(500, 0.028), P(\frac{Y}{500} \le 4\%) = P(Y \le 20)$

$$= \left(\frac{Y - 500\cdot 0.0228}{\sqrt{500\cdot 0.0228\cdot 0.9772}} \le \frac{20 - 500\cdot 0.0228}{\sqrt{500\cdot 0.0228\cdot 0.9772}}\right) = \Phi(2.577) = 0.995$$

题6 6、假设一条自动生产线生产的产品合格率是0.8.要使一批产品的合格率达到在76%与84%之间的概率不小于90%，问这批产品至少要生产多少件？

解:$X \sim B(n, 0.8), P(0.76 < \frac{X}{n} < 0.84) = P(\frac{0.76n - 0.8n}{\sqrt{0.8\cdot 0.2n}} < \frac{X - 0.8n}{\sqrt{0.8\cdot 0.2n}} < \frac{0.84n - 0.8n}{\sqrt{0.8\cdot 0.2n}})$

$\approx \Phi(0.1\sqrt{n}) - \Phi(-0.1\sqrt{n}) = 2\Phi(0.1\sqrt{n}) - 1 \ge 0.9, \Phi(0.1\sqrt{n}) \ge 0.95, 0.1\sqrt{n} \ge 1.645, n \ge 16.45^2 = 271$

题7 7、某校900名学生选修6名教师主讲的《高等数学》课，假定每名学生完全随意地选择一位教师，且学生之间选择教师是彼此独立的。问每个教师的上课教室应该设有多少个座位才能保证因缺少座位而使学生离去的概率小于1%？$(\Phi(2.33) = 0.9901, \Phi(2.4) = 0.9918, \Phi(2.43) = 0.9925)$

解:$X \sim B(900, \frac{1}{6}), P(X > n) = 1 - P\left(\frac{X - 900\cdot\frac{1}{6}}{\sqrt{900\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}} < \frac{n - 900\cdot\frac{1}{6}}{\sqrt{900\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{n - 900\cdot\frac{1}{6}}{\sqrt{900\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}}\right)$

$= 1 - \Phi(\frac{n-150}{5\sqrt{5}}) < 0.01, \Phi(\frac{n-150}{5\sqrt{5}}) > 0.99, \frac{n-150}{5\sqrt{5}} > 2.33, n > 176.05, n = 177$

题8 8、从装有9个白球和1个红球的箱子中，还原地取n个球，设随机变量ξ表示这n个抽球中白球出现的次数。问n需多大时才能使$P(|\frac{\xi}{n} - p| \le 0.01) = 0.9545$，其中$p$是每一次取球中取到白球的概率。

解:$p=\frac{9}{10}, P(|\frac{\xi}{n}-p| \leq 0.01)=P(|\frac{\xi-np}{\sqrt{np(1-p)}}| \leq \frac{0.01n}{\sqrt{np(1-p)}})=2\Phi(\frac{0.01n}{\sqrt{np(1-p)}})-1=2\Phi(\frac{\sqrt{n}}{30})=0.9545,$
$\frac{\sqrt{n}}{30}=2, n=3600$

题9 9、设在n次伯努利试验中，每次试验事件A出现的概率均为0.70，要使事件A出现的频率在0.68到0.72之间的概率至少为0.90，问至少要做多少次试验？（1）用切比雪夫不等式估计；（2）用中心极限定理计算。

解:$X \sim B(n, 0.7), EX=0.7n, DX=0.7\cdot 0.3n=0.21n,$

$(1) P(0.68 \leq \frac{X}{n} \leq 0.72)=P(0.68n \leq X \leq 0.72n)=P(|X-EX| \leq 0.02n) \geq 1-\frac{DX}{(0.02n)^2}=1-\frac{0.21n}{0.0004n^2}$
$=1-\frac{2100n}{4n^2} \geq 0.9, n \geq 5250$

$(2) P(0.68 \leq \frac{X}{n} \leq 0.72)=P\left(|\frac{X-0.7n}{\sqrt{0.21n}}| \leq \frac{0.02n}{\sqrt{0.21n}}=\frac{0.2\sqrt{n}}{\sqrt{21}}\right)=2\Phi(\frac{0.2\sqrt{n}}{\sqrt{21}})-1 \geq 0.9, \Phi(\frac{0.2\sqrt{n}}{\sqrt{21}}) \geq 0.95,$
$\frac{0.2\sqrt{n}}{\sqrt{21}} \geq 1.645, n \geq 1420.7, n=1421$

第七章　统计总体与样本

7.1　总体和样本

习题7.1

题1　1、某市要调查成年男子的吸烟率，特聘请50名统计专业本科生做街头随机调查，要求每位学生调查100名成年男子，问该项调查的总体和样本分别是什么，总体用什么分布描述为宜？

解:（1）总体是该市所有成年男子（的吸烟情况）；（2）个体是被调查的成年男子（的吸烟情况）；（3）总体分布为两点分布$B(1,p)$，其中p为该市成年男子的吸烟率.

题2　2、某厂大量生产某种产品，其不合格品率p未知，每m件产品包装为一盒，为了检查产品的质量，任意抽取n盒，查其中的不合格品数，试说明什么是总体，什么是样本，并指出样本的分布。

解:总体是该厂生产的每盒产品中的不合格品数，样本是任意抽取的n盒中每盒产品的不合格品数。样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$分布为$\prod\limits_{i=1}^{n}C_m^{X_i}p^{X_i}(1-p)^{m-X_i}$

题3　3、某厂生产的电容器的使用寿命服从指数分布，为了解其平均寿命，从中抽出n件产品测其实际使用寿命，试说明什么是总体，什么是样本，并指出样本的分布。

解:总体是该厂生产的电容器的寿命全体，样本是抽出的n个电容器的寿命，样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的分布为$\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda e^{-\lambda x_i}$

题4　4、设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为来自总体服从泊松分布$\pi(\lambda)$ 的一个样本, 求$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的分布律.

解:$\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda^{k_i}e^{-\lambda}}{k_i!}=\dfrac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}k_i}}{k_1!k_2!\cdots k_n!},k_i=0,1,2,\cdots,i=1,2,\cdots,n$

题5　5、设X_1,X_2是来自正态总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本, 证明X_1+X_2 与X_1-X_2相互独立.

解:$Cov(X_1+X_2)(X_1-X_2)=DX_1-DX_2=0,X_1+X_2,X_1-X_2$都服从正态分布,故相互独立

7.2　样本矩和统计量

习题7.2

题1　1、在一本书上随机的检查10页，发现每页上的错误数为$4,5,6,0,3,1,4,2,1,4$ 试计算出样本均值、样本方差、样本标准差

解:$\dfrac{4+5+6+0+3+1+4+2+1+4}{10}=3;$

$$\frac{(4-3)^2+(5-3)^2+(6-3)^2+(0-3)^2+(3-3)^2+(1-3)^2+(4-3)^2+(2-3)^2+(1-3)^2+(4-3)^2}{10-1}=3.78;$$

$\sqrt{3.78}=1.94$

题2　2、证明：样本容量为2的样本(X_1,X_2) 的样本方差为$\frac{1}{2}(X_1-X_2)^2$

证:$S^2=\dfrac{1}{2-1}[(X_1-\dfrac{X_1+X_2}{2})^2+(X_2-\dfrac{X_1+X_2}{2})^2]=\dfrac{1}{2}(X_1-X_2)^2$

题3 3、从同一总体中抽取两个容量分别为n,m的样本，样本均值分别为$\overline{X}_1,\overline{X}_2$，样本方差分别为$s_1^2,s_2^2$，将两组样本合并，其均值、方差分别为$\overline{X},s^2$，证明：$\overline{X}=\dfrac{n\overline{X}_1+m\overline{X}_2}{n+m}, s^2=\dfrac{(n-1)s_1^2+(m-1)s_2^2}{n+m-1}+\dfrac{nm(\overline{X}_1-\overline{X}_2)^2}{(n+m)(n+m-1)}$

证:$n\overline{X}_1+m\overline{X}_2=(n+m)\overline{X}$, 可得,

$$
\begin{aligned}
s^2 &= \frac{1}{n+m-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2\right)\\
&= \frac{1}{n+m-1}\left(\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\overline{X}_1)+(\overline{X}_1-\overline{X})]^2+\sum_{i=1}^{m}[(X_i-\overline{X}_2)+(\overline{X}_2-\overline{X})]^2\right)\\
&= \frac{1}{n+m-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_1)^2+n(\overline{X}_1-\overline{X})+\sum_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X}_2)^2+m(\overline{X}_2-\overline{X})\right)\\
&= \frac{1}{n+m-1}\left((n-1)s_1^2+n\frac{m^2(\overline{X}_1-\overline{X}_2)^2}{(m+n)^2}+(m-1)s_2^2+m\frac{n^2(\overline{X}_1-\overline{X}_2)^2}{(m+n)^2}\right)\\
&= \frac{(n-1)s_1^2+(m-1)s_2^2}{n+m-1}+\frac{nm(\overline{X}_1-\overline{X}_2)^2}{(n+m)(n+m-1)}
\end{aligned}
$$

题4 4、设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为(0-1)分布的一个样本,$\overline{X}$和S^2分别为样本均值和样本方差, 求$E\overline{X}$, $D\overline{X}$和ES^2 .

解:设$P(X_i=1)=p, EX_i=p, DX_i=p(1-p), E\overline{X}=EX_i=p, D\overline{X}=\dfrac{1}{n}DX_i=\dfrac{p(1-p)}{n}, ES^2=DX_i=p(1-p)$

题5 5、从装有1个白球和2个黑球的罐子里有放回地取球,令$X=0$表示取到白球, $X=1$表示取到黑球, $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为来自总体X 的样本,试求; (1)样本均值$\overline{X}$ 的数学期望和方差; (2)样本方差$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 的数学期望; (3) $X_1+X_2+\cdots+X_n$ 的分布律.

解:$P(X=0)=\dfrac{1}{3}, P(X=1)=\dfrac{2}{3}, EX=\dfrac{2}{3}, DX=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}, E\overline{X}=EX=\dfrac{2}{3}, D\overline{X}=EX=\dfrac{2}{3}$,

$X_1+X_2+\cdots+X_n\sim B(n,\dfrac{2}{3})$

题6 6、设$(X_1,X_2,\cdots,X_{18})$和$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_{18})$ 为来自总体$N(\mu,\sigma^2)$ 的独立样本,其样本均值分别记为$\overline{X}$和$\overline{Y}$, 试求$P(|\overline{X}-\overline{Y}|<\sigma)$.

解:$\overline{X}\sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{18}), \overline{Y}\sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{18}), Z=\overline{X}-\overline{Y}\sim N(0,\dfrac{\sigma^2}{9}), P(|Z|<\sigma)=P(|\dfrac{Z}{\frac{\sigma}{3}}|<3)=2\Phi(3)-1=0.9974$

题7 7、以下是某工厂通过抽样调查得到的10名工人一周内生产的产品数149，156, 160，138，149，153，153，169，156，156 试由这些数据构造经验分布函数并作图。

解:

X	(+∞,138]	[138,149)	[149,153)	[153,156)	[156,160)	[160,169)	[169,+∞)
p	0	0.1	0.2	0.2	0.3	0.1	0.1

$$
F_n(x)=\begin{cases}
0, & x<138\\
0.1, & 138\le x<149\\
0.3, & 149\le x<153\\
0.5, & 153\le x<156\\
0.8, & 156\le x<160\\
0.9, & 160\le x<169\\
0.1, & x\ge 169
\end{cases}
$$

7.3 常用统计量的分布

习题7.3

题1 1、设总体X服从正态分布$N(72,100)$，为使样本均值大于70的概率不小于90%，其样本容量至少取多少？

解:$X\sim N(72,100),\overline{X}\sim N(72,\dfrac{100}{n}),P(\overline{X}>70)=1-P(\overline{X}\le 70)=1-\Phi\left(\dfrac{70-72}{\sqrt{\frac{100}{n}}}\right)$

$=1-\Phi\left(-\dfrac{\sqrt{n}}{5}\right)\ge 0.9,\Phi\left(-\dfrac{\sqrt{n}}{5}\right)\le 0.1,-\dfrac{\sqrt{n}}{5}\le -1.282,n\ge 41.1,n=42$

题2 2、在总体$X\sim N(52,6.3^2)$ 中随机地抽取一容量为36的样本，求$\overline{X}$ 落在50.8到53.8之间的概率。

解:$\overline{X}\sim N(52,(\dfrac{6.3}{6})^2),P(50.8<\overline{X}<53.8)=\Phi\left(\dfrac{53.8-52}{\frac{6.3}{6}}\right)-\Phi\left(\dfrac{50.8-52}{\frac{6.3}{6}}\right)=\Phi(1.714)-\Phi(-1.143)=0.8293$

题3 3、设$(X_1,X_2,\cdots,X_{10})$ 为总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本,

试求(1) $P(0.27\sigma^2\le\dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2\le 2.36\sigma^2)$; (2) $P(0.27\sigma^2\le\dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(X_i-\mu)^2\le 2.36\sigma^2)$.

解:(1)$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1),P\left(0.27\sigma^2\le\dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2\le 2.36\sigma^2\right)=P\left(2.7\le\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2\le 23.6\right)=$
$P(\chi^2(9)\le 23.6)-P(\chi^2(9)\le 2.7)=0.97$

(2)$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n),P\left(0.27\sigma^2\le\dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(X_i-\mu)^2\le 2.36\sigma^2\right)=P\left(2.7\le\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{10}(X_i-\mu)^2\le 23.6\right)=$
$P(\chi^2(10)\le 23.6)-P(\chi^2(10)\le 2.7)=0.98$

题4 4、设$(X_1,X_2,\cdots,X_7)$ 为来自总体$X\sim N(0,0.5^2)$ 的一个样本, 求$P(\sum\limits_{i=1}^{7}X_i^2>4)$ 和$P(\sum\limits_{i=1}^{7}(X_i-\overline{X})^2>4)$.

解:$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{7}(X_i-\mu)^2=\dfrac{1}{0.5^2}\sum_{i=1}^{7}X_i^2=4\sum_{i=1}^{7}X_i^2\sim\chi^2(7),$

$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\dfrac{1}{0.5^2}\sum_{i=1}^{7}(X_i-\overline{X})^2=4\sum_{i=1}^{7}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(6),$

$P(\sum_{i=1}^{7}X_i^2>4)=P(4\sum_{i=1}^{7}X_i^2>16)=1-P(\chi^2(7)\le 16)=0.025,$

$P(\sum_{i=1}^{7}(X_i-\overline{X})^2>4)=P(4\sum_{i=1}^{6}(X_i-\overline{X})^2>16)=1-P(\chi^2(6)\le 16)=0.01$

题5 5、设$(X_1,X_2,\cdots,X_6)$为来自正态总体$X\sim N(0,5^2)$ 的一个样本,试确定常数C,使随机变量
$Y=C[(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2]$服从$\chi$分布,其自由度为多少？

解:$X_1+X_2+X_3\sim N(0,3\cdot 5^2),\dfrac{1}{5\sqrt{3}}(X_1+X_2+X_3)\sim N(0,1),\left[\dfrac{1}{5\sqrt{3}}(X_1+X_2+X_3)\right]^2\sim\chi^2(1),$

同理,$\left[\dfrac{1}{5\sqrt{3}}(X_4+X_5+X_6)\right]^2\sim\chi^2(1),$

$\left[\dfrac{1}{5\sqrt{3}}(X_1+X_2+X_3)\right]^2+\left[\dfrac{1}{5\sqrt{3}}(X_4+X_5+X_6)\right]^2\sim\chi^2(2),$

即,$\dfrac{1}{75}[(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2]\sim\chi^2(2)$

题6 6、设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自正态总体$N(0,1)$ 的样本,$1\le m<n$, (1)求$\sum\limits_{i=1}^{m}X_i$ 服从的分布;

(2)求$\dfrac{1}{\sqrt{n-m}}\sum_{i=m+1}^{n}X_i$ 服从的分布; (3)求统计量$Y=\dfrac{1}{m}(\sum_{i=1}^{m}X_i)^2+\dfrac{1}{n-m}(\sum_{i=m+1}^{n}X_i)^2$ 服从的分布.

解:(1) $\sum\limits_{i=1}^{m}X_i\sim N(0,m),\dfrac{1}{\sqrt{m}}\sum_{i=1}^{m}X_i\sim N(0,1);$

(2) $\sum_{i=m+1}^{n}X_i\sim N(0,n-m),\dfrac{1}{\sqrt{n-m}}\sum_{i=m+1}^{n}X_i\sim N(0,1);$

(3)$Y=\dfrac{1}{m}(\sum_{i=1}^{m}X_i)^2+\dfrac{1}{n-m}(\sum_{i=m+1}^{n}X_i)^2=\left(\dfrac{1}{\sqrt{m}}\sum_{i=1}^{m}X_i\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{n-m}}\sum_{i=m+1}^{n}X_i\right)^2\sim\chi^2(2)$

题7 7、设$(X_1, X_2, \cdots, X_{16})$是总体$N(10, 2^2)$ 的样本, (1)求样本均值$\overline{X}$ 落入区间[9.25, 10.75]的概率; (2)求$E[\sum\limits_{i=1}^{16}(X_i-\overline{X})^2]$;(3)求$D[\sum\limits_{i=1}^{16}(X_i-\overline{X})^2]$; (4)求$P(\sum\limits_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2 \geq 37.248)$.

解:(1)$\overline{X} \sim N(10, \frac{2^2}{16} = \frac{1}{2}^2)$,

$$P(9.25 \leq \overline{X}) \leq 10.75 = P\left(\frac{9.25-10}{1/2} \leq \frac{\overline{X}-10}{1/2} \leq \frac{10.75-10}{1/2}\right) = \Phi\left(\frac{10.75-10}{1/2}\right) - \Phi\left(\frac{9.25-10}{1/2}\right)$$
$$= 2\Phi(1.5) - 1 = 0.8664$$

$$(2) S^2 = \frac{1}{16-1}\sum_{i=1}^{16}(X_i-\overline{X})^2, \frac{(16-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{16}(X_i-\overline{X})^2 \sim \chi^2(15),$$

$$E\sum_{i=1}^{16}(X_i-\overline{X})^2 = 15ES^2 = 15\sigma^2 = 60,$$

$$(3) D\sum_{i=1}^{16}(X_i-\overline{X})^2 = D\left[\sigma^2 \cdot \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{16}(X_i-\overline{X})^2\right] = \sigma^4 \cdot 2(16-1) = 480;$$

$$(4) P\left(\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2 \geq 37.248\right) = P\left(4 \cdot \sum_{i=1}^{10}(\frac{X_i-\overline{X}}{2})^2 \geq 37.248\right)$$
$$= P(4\chi^{(}16) \geq 37.248) = P(\chi^{(}16) \geq 9.312) = 1 - P(\chi^{(}16) \leq 9.312) = 0.9$$

题8 9、设$(X_1, X_2, \cdots, X_n, X_{n+1})$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本, $\overline{X}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i, S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$, 试求统计量$Y = \frac{X_{n+1}-\overline{X}_n}{S_n}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ 服从的分布.

解:$X_{n+1}-\overline{X}_n \sim N(0, \frac{n+1}{n}\sigma^2), \frac{X_{n+1}-\overline{X}_n}{\sqrt{\frac{n+1}{n}\sigma^2}} \sim N(0,1), \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 且相互独立,故,

$$Y = \frac{X_{n+1}-\overline{X}_n}{S_n}\sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{\frac{X_{n+1}-\overline{X}_n}{\sqrt{\frac{n+1}{n}\sigma^2}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}} \sim t(n-1)$$

题9 10、设$(X_1, X_2, \cdots, X_m$ 和$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 分别是来自两个独立的正态总体$N(\mu_1, \sigma^2)$和$N(\mu_2, \sigma^2)$ 样本,$\overline{X}, S_1^2$ 和$\overline{Y}, S_2^2$ 分别是两个总体的样本均值和样本方差. α和β 是两个非零实数,试求统计量

$$Z = \frac{\alpha(\overline{X}-\mu_1)+\beta(\overline{Y}-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}} \cdot \sqrt{\frac{\alpha^2}{m}+\frac{\beta^2}{n}}}$$ 的分布.

解:$\alpha(\overline{X}-\mu_1)+\beta(\overline{Y}-\mu_2) \sim N\left(0, (\frac{\alpha^2}{m}+\frac{\beta^2}{n})\sigma^2\right), \frac{\alpha(\overline{X}-\mu_1)+\beta(\overline{Y}-\mu_2)}{\sqrt{(\frac{\alpha^2}{m}+\frac{\beta^2}{n})\sigma^2}} \sim N(0,1)$

$$\frac{(m-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m-1), \frac{(n-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \frac{(m-1)S_1^2}{\sigma^2} + \frac{(n-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m+n-2),$$

$$Z = \frac{\alpha(\overline{X}-\mu_1)+\beta(\overline{Y}-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}} \cdot \sqrt{\frac{\alpha^2}{m}+\frac{\beta^2}{n}}} \sim (m+n-2)$$

题10 11、设总体X 和Y 相互独立且都服从正态分布$N(0, \sigma^2)$,而$(X_1, X_2, \cdots, X_9$ 和$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_9$ 分别是来自总体X 和Y 的简单随机样本, 求统计量$U = \frac{\sum\limits_{i=1}^{9} X_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{9} Y_i^2}}$ 和U^2服从的分布.

解:$\frac{1}{3\sigma}\sum\limits_{i=1}^{9} X_i \sim N(0,1), \frac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{9} Y_i = \sum\limits_{i=1}^{9}(\frac{Y_i}{\sigma})^2 \sim \chi^2(9),$

$$U=\frac{\sum\limits_{i=1}^{9}X_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{9}Y_i^2}}=\frac{\frac{1}{3\sigma}\sum\limits_{i=1}^{9}X_i}{\sqrt{\frac{1}{9\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{9}Y_i^2}}\sim t(9);U^2=\frac{\left(\frac{1}{3\sigma}\sum\limits_{i=1}^{9}X_i\right)^2}{\frac{1}{9\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{9}Y_i^2}\sim F(1,9)$$

题11 13、设总体$X\sim N(0,\sigma^2)$, (X_1,X_2)为取自该总体的一个样本,求统计量$Y=\dfrac{(X_1+X_2)^2}{(X_1-X_2)^2}$服从的分布.

解:(X_1+X_2,X_1-X_2)服从二维正态分布,且$Cov(X_1+X_2,X_1-X_2)=0,X_1+X_2,X_1-X_2$相互独立,

$$\left(\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1),\left(\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1),Y=\frac{(X_1+X_2)^2}{(X_1-X_2)^2}=\frac{\left(\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\Big/1}{\left(\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\Big/1}\sim F(1,1)$$

题12 15、设$(X_1,X_2,\cdots,X_{10})$和$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_{10})$是来自总体$N(20,3)$ 的两个独立样本,求$|\overline{X}-\overline{Y}|>0.3$ 的概率

解:$\overline{X}\sim N(20\cdot 10,\frac{3}{10}),\overline{Y}\sim N(20\cdot 10,\frac{3}{10}),\overline{X}-\overline{Y}\sim N(0,\frac{3}{5})$,

$P(|\overline{X}-\overline{Y}|>0.3)=2(\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{0.6}}<-\frac{0.3}{\sqrt{0.6}})=0.697$

题13 16、设总体$X\sim N(0,\sigma^2),(X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体$X$的简单随机样本,其样本均值、样本方差分别为$\overline{X},S^2$。求$\dfrac{n\overline{X}^2}{S^2}$服从的分布。

解:$$\frac{1}{\sigma/\sqrt{n}}\overline{X}\sim N(0,1),\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),\frac{\left(\frac{\overline{X}}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2\Big/1}{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}=\frac{n\overline{X}^2}{S^2}\sim F(1,n-1)$$

第八章　参数估计

8.1　参数的点估计

习题8.1

题1　1、设总体密度函数如下，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为样本，试求未知参数的矩估计。

（1）$f(x;\theta)=\dfrac{2}{\theta^2}(\theta-x),0<x<\theta,\theta>0$

（2）$f(x;\theta)=\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}},x>\mu,\theta>0$

解:$(1)EX=\displaystyle\int_0^{\theta}x\cdot\frac{2}{\theta^2}(\theta-x)dx=\frac{x^2}{\theta}-\frac{2x^3}{3\theta^2}\Big|_0^{\theta}=\frac{\theta}{3},\hat{EX}=\frac{\hat{\theta}}{3}=\overline{X},\hat{\theta}=3\overline{X}$

$(2)EX=\displaystyle\int_{\mu}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}dx=\theta+\mu,DX=E(x-\theta-\mu)^2=\int_{\mu}^{+\infty}(x-\theta-\mu)^2\cdot\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}dx=\theta^2,\hat{EX}=\theta+\mu=$ $\overline{X},\hat{DX}=\theta^2=S^2,\theta=S,\mu=\overline{X}-S$

题2　2、设$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自于总体X 的样本.总体X 的概率密度为$f(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

求参数a,b 的矩估计量.

解:$EX=\displaystyle\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{a+b}{2},EX^2=\int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{a^2+ab+b^2}{3},DX=EX^2-(EX)^2=\frac{(b-a)^2}{12},$

$\hat{EX}=\dfrac{\hat{a}+\hat{b}}{2}=\overline{X},\hat{DX}=\dfrac{(\hat{b}-\hat{a})^2}{12}=S^2,\hat{a}=\overline{X}-\sqrt{3}S,\hat{b}=\overline{X}+\sqrt{3}S$

题3　3、设总体X的分布律为$P(X=x)=(1-p)^{x-1}p,x=1,2,\cdots,$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自X 的样本,试求p 的矩估计量.

解:$EX=\displaystyle\sum_{x=1}^{+\infty}x\cdot(1-p)^{x-1}p=\frac{1}{p},\hat{EX}=\frac{1}{\hat{p}}=\overline{X},\hat{p}=\frac{1}{\overline{X}}$

题4　4、设总体X的密度函数为$f(x;\alpha)=\begin{cases}(\alpha+1)x^{\alpha}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

,其中$\alpha>-1$ 是未知参数, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自X的样本,试求α 的矩估计量.

解:$EX=\displaystyle\int_0^1 x\cdot(\alpha+1)x^{\alpha}dx=\frac{\alpha+1}{\alpha+2},\hat{EX}=\frac{\hat{\alpha}+1}{\hat{\alpha}+2}=\overline{X},\hat{\alpha}=\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$

题5　5、设总体X的概率密度为$f(x;\theta)=\begin{cases}e^{-(x-\theta)}, & x\ge\theta\\ 0, & x<\theta\end{cases}$

, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自于总体X的简单随机样本，求未知参数θ 的矩估计量。

解:$EX=\displaystyle\int_{\theta}^{+\infty}x\cdot e^{-(x-\theta)}dx=\theta-1,\hat{EX}=\hat{\theta}-1=\overline{X},\hat{\theta}=\overline{X}-1$

题6　6、设总体X 的分布密度为$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{2\theta^4}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$,$\theta>0$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自X 的样本,求参数θ 的矩估计和极大似然估计.

解:矩估计 : $EX=\int_0^{+\infty} x\cdot\frac{x^3}{2\theta^4}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}dx=\frac{3\sqrt{2\pi}}{4}\theta,\hat{EX}=\frac{3\sqrt{2\pi}}{4}\hat{\theta}=\overline{X},\hat{\theta}=\frac{4}{3\sqrt{2\pi}}\overline{X};$

极大似然估计 : $L=\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i^3}{2\theta^4}e^{-\frac{x_i^2}{2\theta^2}}=\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^3\cdot\frac{1}{2^n\theta^{4n}}e^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}{2\theta^2}},lnL=3ln\prod_{i=1}^{n}x_i-ln2^n-4nln\theta-\frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2,$

$\frac{d}{d\theta}lnL=-\frac{4n}{\theta}+\frac{1}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0,\hat{\theta}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$

题7 7、设总体X 的概率密度为$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{2x}{\theta^2}e^{-\frac{x^2}{\theta^2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$, $\theta>0$, $x_1,x_2,\cdots,x_n$为样本值,$(x_i>0,i=1,2,\cdots,n)$. 求参数θ^2 的极大似然估计$\hat{\theta}^2$.

解:$L=\prod_{i=1}^{n}\frac{2x_i}{\theta^2}e^{-\frac{x_i^2}{\theta^2}}=\prod_{i=1}^{n}2x_i\cdot\frac{1}{(\theta^2)^n}e^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}{\theta^2}},lnL=ln\prod_{i=1}^{n}2x_i-nln\theta^2-\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2,$

$\frac{d}{d(\theta^2)}lnL=-\frac{n}{\theta^2}+\frac{1}{(\theta^2)^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0,\hat{\theta}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$

题8 8、设总体概率函数如下,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是样本,试求未知参数的极大似然估计:

(1)$f(x;\theta)=\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}},-\infty<x<+\infty,\theta>0$

(2)$f(x;\theta_1,\theta_2)=\begin{cases}\frac{1}{\theta_2-\theta_1}, & \theta_1<x<\theta_2\\ 0, & 其他\end{cases}$,

解:(1)$L=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}}=\frac{1}{(2\theta)^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|},lnL=ln\prod_{i=1}^{n}2x_i-nln\theta^2-\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|,$

$\frac{d}{d\theta}lnL=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0,\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$

(2)$L=\begin{cases}\frac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n}, & \theta_1\le x_1\le\theta_2(i=1,2,\cdots,n),\\ 0, & 其他\end{cases}$,由增减性可知,

$\hat{\theta}_1=min(x_1,x_2,\cdots,x_n),\hat{\theta}_2=max(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

题9 9、一个罐子里装有黑球和白球,有放回地抽取一个容量为n的样本,其中有k个白球,求罐子里黑球数与白球数之比R的极大似然估计。

解:X服从两点分布,$P(X=m)=p^m(1-p)^{1-m},p=\frac{1}{1+R}L=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=m_i)=p^{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i}(1-p)^{n-\sum\limits_{i=1}^{n}m_i},$

$lnL=\sum_{i=1}^{n}m_ilnp+(n-\sum_{i=1}^{n}m_i)ln(1-p),\frac{d}{d\theta}lnL=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i}{p}-\frac{n-\sum\limits_{i=1}^{n}m_i}{1-p}=0,\hat{p}=\frac{k}{n}=\frac{1}{1+\hat{R}},\hat{R}\frac{n-k}{k},$

题10 10、假设随机变量X的概率密度为$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-\frac{(lnx-\mu)^2}{2\sigma^2}},x>0$(即对数正态分布),$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是样本,求参数μ,σ 的极大似然估计

解:$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x_i}e^{-\frac{(lnx_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=(\frac{1}{2\pi\sigma^2})^{\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(lnx_i-\mu)^2\right\},$

$lnL=-\frac{n}{2}ln\sigma^2-\sum_{i=1}^{n}ln(2\pi)-\sum_{i=1}^{n}lnx_i-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(lnx_i-\mu)^2,$

$\frac{\partial lnL}{\partial\mu}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(lnx_i-\mu)=0,\frac{\partial lnL}{\partial\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(lnx_i-\mu)^2=0,$

$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}lnx_i=\hat{lnx_i},\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(lnx_i-\hat{lnx_i})^2$

题11 11、一地质学家为研究某湖泊的湖滩地区的岩石成分，随机地从该地区取100个样品，每个样品有10块石子，记录了每个样本中属石灰石的石子数。假设这100次观察相互独立，并且由过去的经验可知，它们都服从参数为$n(=10),p$的二项分布，p为该地区一块石子是石灰石的概率。该地址学家所得的数据如下表：

样本中属石灰石的石子数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
观察到石灰石的样本个数	1	1	6	7	23	26	21	12	3	1	0

求p的极大似然估计值。

解:$X\sim B(10,p),P(X=k)=C_{10}^{k}p^k(1-p)^{10-k},k=0,1,2,\cdots,10,$

$L(p)=\prod_{i=1}^{100}C_{10}^{k_i}p^{k_i}(1-p)^{10-k_i}=\prod_{i=1}^{100}C_{10}^{k_i}\cdot p^{\sum_{i=1}^{100}k_i}(1-p)^{1000-\sum_{i=1}^{100}k_i},$

$lnL(p)=\sum_{i=1}^{100}k_ilnC_{10}^{k_i}+\sum_{i=1}^{100}k_ilnp+(1000-\sum_{i=1}^{100}k_i)ln(1-p)$

$\frac{\partial lnL}{\partial p}=\frac{\sum_{i=1}^{100}k_i}{p}-\frac{1000-\sum_{i=1}^{100}k_i}{1-p}=0$

$\hat{p}=\frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{100}k_i=0.499$

题12 12、已知某种灯泡的寿命服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$,从某日所生产的该种灯泡中随机抽取10只,测得其寿命(单位:h)为$1067,919,1196,785,1126,936,918,1156,920,948$,设总体参数均未知，试用极大似然估计法估计该日生产的灯泡能使用$1300(h)$ 以上的概率.

解:利用正态分布参数的极大似然估计结果知,$\hat{\mu}=\overline{x}=997.1,\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2=124.8,$

$P(X>1300)=1-P(X\le 1300)=1-\Phi(\frac{1300-997.1}{124.8})=0.008$

8.2 点估计量的优良性

习题8.2

题1 1、已知总体X 的分布密度为$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}, & 0<x<\theta,\\ 0, & 其他\end{cases}$,$\theta>0$，$X_1,X_2,X_3$是总体$X$的样本,求常数$c$,使$\hat{\theta}=cmin(X_1,X_2,X_3)$ 为θ 的无偏估计.

解:$F(x;\theta)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x}{\theta}, & 0\le x\le\theta\\ 1, & \theta\le x\end{cases}$,设$Y=min(X_1,X_2,X_3)$,

$F_Y(y)=P(min(X_1,X_2,X_3)\le y)=1-P(X_1>y,X_2>y,X_3>y)=1-[1-F(y,\theta)]^3,$

$f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=3[1-F(y,\theta)]^2\cdot f_Y(y)=\begin{cases}3\left(1-\frac{y}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{\theta}, & 0\le y\le\theta\\ 0, & 其他\end{cases},$

$EY=\int_0^{\theta}y\cdot 3\left(1-\frac{y}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{\theta}dy=\frac{1}{4}\theta,c=4$

题2 2、设X_1,X_2独立同分布，共同的密度函数为$f_X(x;\theta)=\begin{cases}\frac{3x^2}{\theta^3}, & 0<x<\theta,\\ 0, & 其他\end{cases}$,$\theta>0$,（1）证明：$T_1=\frac{2}{3}(X_1+X_2)$和$T_2=\frac{7}{6}max(X_1,X_2)$ 都是θ的无偏估计；（2）计算T_1,T_2 的方差并比较大小

解:$(1)EX=\int_0^\theta x\cdot\frac{3x^2}{\theta^3}dx=\frac{3}{4}\theta,ET_1=\frac{2}{3}\cdot 2EX=\theta,$

$F_X(x;\theta)=\int_0^x\frac{3u^2}{\theta^3}du=\left(\frac{x}{\theta}\right)^3,0<x<\theta,$

记$Y=max(X_1,X_2)$,则$f_Y(y;\theta)=2F_X(y;\theta)f_X(y;\theta)=\frac{6y^5}{\theta^6},0<y<\theta,$

$EY=\int_0^\theta y\cdot\frac{6y^6}{\theta^6}dy=\frac{6}{7}\theta,ET_2=\theta;$

$(2)EX^2=\int_0^\theta x^2\cdot\frac{3x^2}{\theta^3}dx=\frac{3}{5}\theta^2,DX=EX^2-(EX)^2=\frac{3}{80}\theta^2,D(T_1)=\frac{4}{9}\cdot 2DX=\frac{1}{30}\theta^2$

$EY^2=\int_0^\theta y^2\cdot\frac{6y^6}{\theta^6}dy=\frac{3}{4}\theta^2,DY=EY^2-(EY)^2=\frac{3}{196}\theta^2,D(T_2)=\frac{49}{36}\cdot DY=\frac{1}{48}\theta^2$

$D(T_2)<D(T_1)$

题3 3、设$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为泊松分布$\Pi(\lambda)$ 的一个样本,试证样本方差S^2 是λ 的无偏估计.

解:$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}(k=0,1,2,\cdots),EX=DX=\lambda,ES^2=DX=\lambda.$

题4 4、设$\hat{\theta}$ 是参数θ的无偏估计,且有$D\hat{\theta}>0$，试证$(\hat{\theta})^2$ 不是$(\theta)^2$ 的无偏估计.

解:$E(\hat{\theta})^2=D\hat{\theta}+(E(\hat{\theta}))^2=D\hat{\theta}+\theta^2>\theta^2$

题5 5、设$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 和$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 是分别来自总体$X\sim N(\mu,1)$ 和$Y\sim N(\mu,4)$ 的两个样本，μ 的一个无偏估计形式为$Z=a\sum\limits_{i=1}^n X_i+b\sum\limits_{j=1}^m Y_i$,求$a,b$应满足的条件，并求$a,b$为何值时，$Z$ 最有效？

解:$EZ=a\sum\limits_{i=1}^n EX_i+b\sum\limits_{j=1}^m EY_i=(na+mb)\mu=\mu,na+mb=1,$

$DZ=a^2\sum\limits_{i=1}^n DX_i+b^2\sum\limits_{j=1}^m DY_i=na^2+4mb^2,$

$f(a,b,\lambda)=na^2+4mb^2+\lambda(na+mb-1),\frac{\partial f}{\partial a}=0,\frac{\partial f}{\partial b}=0,\frac{\partial f}{\partial\lambda}=0,a=\frac{4}{4n+m},b=\frac{1}{4n+m}$

题6 6、设$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体$N(\mu_0,\sigma^2)$ 的样本.

解: (1)验证σ^2 的极大似然估计量$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n(X_i-\mu_0)^2$ 是σ^2的无偏估计和一致性估计;

(2) 令$\hat{\sigma}_1^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2,\hat{\sigma}_2^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2,\hat{\sigma}_3^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^n(X_i-\mu_0)^2,\hat{\sigma}_4^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n(X_i-\mu_0)^2,$

判断$\hat{\sigma}_i^2,i=1,2,3,4$ 作为σ^2 的估计量时,哪些是无偏估计量,并确定哪一个估计量更佳？

解:$(1)E\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n E(X_i-\mu_0)^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n DX_i=\sigma^2;$

$D\hat{\sigma}^2=D\frac{\sigma^2}{n}\sum\limits_{i=1}^n\left(\frac{X_i-\mu_0}{\sigma}\right)^2=\frac{\sigma^4}{n^2}D\chi^2(n)=\frac{2\sigma^4}{n},$

$\forall\varepsilon>0,1\geq P(|\hat{\sigma}^2-\sigma^2|<\varepsilon)=P(|\hat{\sigma}^2-E\hat{\sigma}^2|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D\hat{\sigma}^2}{\varepsilon^2}=1-\frac{2\sigma^4}{n\varepsilon^2},\lim\limits_{n\to+\infty}=1$

$(2)E\hat{\sigma}_1^2=ES^2=\sigma^2,E\hat{\sigma}_2^2=E\left(\frac{n-1}{n}S^2\right)=\frac{n-1}{n}\sigma^2,E\hat{\sigma}_3^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^n DX_i=\frac{n}{n-1}\sigma^2,E\hat{\sigma}_4^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n DX_i=\sigma^2,$

$D\hat{\sigma}_1^2=DS^2=D\left[\frac{\sigma^2}{n-1}\cdot\frac{n-1}{\sigma^2}S^2\right]=\left(\frac{\sigma^2}{n-1}\right)^2D\chi^2(n-1)=\frac{2\sigma^4}{n-1},$

$D\hat{\sigma}_4^2=\left(\frac{\sigma^2}{n}\right)^2D\chi^2(n)=\frac{2\sigma^4}{n}<D\hat{\sigma}_1^2$

8.3 区间估计与置信区间

8.4 正态分布均值和方差的区间估计

习题8.4

题1 1、某车间生产滚珠，从长期实践中知道滚珠直径X可以认为是服从正态分布，且滚珠直径的方差是0.05，某天生产的产品中随机抽取6个，量得直径如下（单位：mm）：14.6，15.1，14.9，14.8，15.2，15.1 试对α，找出滚珠平均直径的区间估计。

解:略

题2 2、某种零件的重量服从正态分布，现从中抽得容量为16的样本，其观察到的重量（单位：kg）分别是：4.8, 4.7，5.0，5.2, 4.7，4.9, 5.0, 5.0,4.6, 4.7，5.0，5.1, 4.7，4.5, 4.9, 4.9 求平均重量的区间估计，置信度是0.95

解:$n = 16, \overline{x} = 4.856, s = 0.1931, \alpha = 0.05, t_{1-\frac{\alpha}{2}}(16-1) = 2.1315,$

得$[\overline{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(16-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(16-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}] = [4.75, 4.96]$

题3 3、设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$。现从总体取得容量为4的样本值：1.2, 3.4,0.6, 5.6.（1）若已知$\sigma = 3$, 试求μ 的置信度为99% 的置信区间。（2）若σ^2 未知，试求μ 的置信度为95%的置信区间。

解:$n = 4, \overline{x} = 2.7, s = 2.277, z_{1-\frac{0.01}{2}} = 2.575, t_{1-\frac{0.05}{2}}(4-1) = 3.1824,$

$(1)[\overline{x} - z_{1-\frac{0.01}{2}}\cdot\frac{3}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\frac{0.01}{2}}\cdot\frac{3}{\sqrt{n}}] = [-1.16, 6.56]$

$(2)[\overline{x} - t_{1-\frac{0.05}{2}}(4-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{1-\frac{0.05}{2}}(4-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}] = [-0.923, 6.324]$

题4 4、某自动包装机包装洗衣粉，其重量服从正态分布，今随机抽查12袋测得其重量（单位：g）分别为1001、1004、1003、1000、997、999、1004、1000、996、1002、998、999。（1）求平均袋重μ 的点估计值;（2）求方差σ^2 的点估计值;（3）求μ 的置信度为95%的置信区间;（4）求σ^2 的置信度为95%的置信区间;（5）若已知$\sigma^2 = 9$,求μ 的置信度为95%的置信区间

解:$(1)\overline{x} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} x_i = 1000.25; (2)s^2 = \frac{1}{12-1}\sum_{i=1}^{12}(x_i - \overline{x})^2 = 6.93;$

$(3)n = 12, t_{1-\frac{0.05}{2}}(12-1) = 2.201, [\overline{x} - t_{1-\frac{0.05}{2}}(4-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{1-\frac{0.05}{2}}(4-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}] = [998.577, 1001.923];$

$(4)\chi^2_{\frac{0.05}{2}}(12-1) = 3.816, \chi^2_{1-\frac{0.05}{2}}(12-1) = 21.920, \left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{0.05}{2}}(12-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{0.05}{2}}(12-1)}\right] = [3.479, 19.982];$

$(5)z_{1-\frac{0.05}{2}} = 1.96, \left[\overline{x} - z_{1-\frac{0.05}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\frac{0.05}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = [998.553, 1001.947].$

题5 5、某车间生产铜丝，设铜丝折断力服从正态分布，现随机抽取10根，检查折断力，得数据如下（单位：N）：578, 572，570，568，572, 570, 570，572, 596，584,求铜丝折断力方差的置信度为0.95的置信区间。

解:$n = 10, s^2 = \frac{1}{10-1}\sum_{i=1}^{12}(x_i - \overline{x})^2 = 75.73, \chi^2_{\frac{0.05}{2}}(10-1) = 2.70, \chi^2_{1-\frac{0.05}{2}}(10-1) = 19.023, \left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{0.05}{2}}(10-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{0.05}{2}}(10-1}\right.$

$[35.83, 252.44]$

题6 6、设$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体$N(\mu, \sigma_0^2)$ 的样本，μ 未知，σ_0^2 已知。对给定置信水平$1-\alpha(0 < \alpha < 1)$,满足$P\left(a \leq \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\sigma_0^2/n}} \leq b\right) = 1 - \alpha$, 即, $P\left(\overline{X} - \frac{\sigma_0}{n}b \leq \mu \leq \overline{X} - \frac{\sigma_0}{n}a\right) = 1 - \alpha$

的实数$a, b(a < b)$ 有无穷多组，试求a, b，使得μ 的置信水平为$1-\alpha$ 的置信区间$\left[\overline{X} - \frac{\sigma_0}{n}b, \overline{X} - \frac{\sigma_0}{n}a\right]$ 的长度最短。（用标准正态分布的分布函数$\Phi(x)$ 的反函数表示出所求的$\Phi^{-1}(x)$ 即可。）

解:即求$min g(a, b) = b - a, s.t. P\left(a \leq \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\sigma_0^2/n}} \leq b\right) = \Phi(b) - \Phi(a) = 1 - \alpha,$

设$\varphi(a,b,\lambda)=b-a+\lambda(\Phi(b)-\Phi(a)-(1-\alpha)),\dfrac{\partial\varphi}{\partial a}=-1-\dfrac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}=0,$
$\dfrac{\partial\varphi}{\partial b}=1+\dfrac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}}=0,\dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda}=\Phi(b)-\Phi(a)-(1-\alpha)=0,$得$|b|=|a|,b=-a>0,P\left(-b\le\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\sigma_0^2/n}}\le b\right)=1-\alpha,$
$2\Phi(b)-1=1-\alpha,\Phi(b)=1-\dfrac{\alpha}{2},b=Z_{1-\frac{\alpha}{2}},a=-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

8.5 二正态总体均值差和方差比的区间估计

习题8.5

题1 1、随机地从A组导线中抽取4根，从B组导线中抽取5根，测得其电阻(Ω)为：A组导线：0.143，0.142，0.143，0.137 B组导线：0.140，0.142，0.136，0.138，0.140 若测试数据分别服从正态分布$N(\mu_1,\sigma^2),N(\mu_2,\sigma^2)$且他们相互独立，又$\mu_1,\mu_2,\sigma^2$ 均未知，试求μ_1,μ_2的95%的置信区间。

解:$t=\dfrac{\overline{x}-\overline{y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{1/n_1+1/n_2}},n_1=4,n_2=5,S_1=0.00287,S_2=0.00228,$

$S_\omega=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}=0.004045,t_{0.975}(4+5-2)=2.365,\overline{x}=0.1413,\overline{y}=0.1392,$

代入$\left[\overline{x}-\overline{y}-t_{0.975}(4+5-2)S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}},\overline{x}-\overline{y}-t_{0.975}(4+5-2)S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right]$

$=\left[0.1413-0.1392-2.365\cdot0.004045\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}},0.1413-0.1392+2.365\cdot0.004045\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}}\right]$

$=[-0.00194,0.00615]$

题2 2、某厂利用两条自动化流水线灌装番茄酱，分别从两条流水线上抽取样本：$X_1,X_2,\cdots,X_{12}$ 和$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{17}$，算出$\overline{X}=10.6,\overline{Y}=9.5,S_1^2=2.4,S_2^2=4.7$假设这两条流水线上灌装番茄酱的重量服从正态分布，其均值分别为μ_1和μ_2,且有相同的方差。试求均值差$\mu_1-\mu_2$ 的区间估计置信度为0.95.

解:$n_1=12,n_2=17,S_1^2=2.4,S_2^2=4.7,S_\omega=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}=1.939,$
$t_{0.975}(12+17-2)=2.0518,\overline{x}=10.6,\overline{y}=9.5,$

代入$\left[\overline{x}-\overline{y}-t_{0.975}(n_1+n_2-2)S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}},\overline{x}-\overline{y}-t_{0.975}(n_1+n_2-2)S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right]$

$=\left[10.6-9.5-2.0518\cdot1.939\sqrt{\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{17}},10.6-9.5+2.0518\cdot1.939\sqrt{\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{17}}\right]$

$=[-0.4002,2.6000]$

题3 3、从某一学校中随机抽查30名男学生和15名女学生的身高，以估计男女学生平均身高之差。经测量，男学生身高的平均数为1.73m，标准差为0.35m；女学生身高的平均数为1.66m，标准差为0.036m。试求男女学生身高期望之差的置信水平为95% 的置信区间。假定男、女学生身高都服从方差相同的正态分布。

解:$n_1=30,n_2=15,S_1^2=0.035^2=0.001225,S_2^2=0.001296,S_\omega=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}=0.03533,$
$t_{0.975}(30+15-2)=2.0167,\overline{x}=1.73,\overline{y}=1.66,$

代入$\left[\overline{x}-\overline{y}-t_{0.975}(n_1+n_2-2)S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}},\overline{x}-\overline{y}-t_{0.975}(n_1+n_2-2)S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right]$

$=\left[1.73-1.66-2.0167\cdot0.03533\sqrt{\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{15}},1.73-1.66+2.0167\cdot0.03533\sqrt{\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{15}}\right]$

$=[0.0475,0.0925]$

题4 4、设两位化验员A,B独立地对某种聚合物含氯量用相同的方法各做10次测定，其测定值的样本方差依次为$S_A^2=0.5419,S_B^2=0.6065$, 设$\sigma_A^2,\sigma_B^2$ 分别为A,B所测定的测定值总体的方差，总体均为正态分布，求方差比σ_A^2/σ_B^2 的置信度为0.95的置信区间。

解:$n_A=n_A=10,S_A^2=0.5419,S_B^2=0.6065,F_{1-\frac{\alpha}{2}}(10-1,10-1)=F_{0.975}(10-1,10-1)=4.03,F_{\frac{\alpha}{2}}(10-1,10-1)=$

$F_{0.025}(10-1,10-1)=0.248$
代入 $\left[\frac{S_A^2}{S_B^2 F_{1-\frac{\alpha}{2}}(10-1,10-1)}, \frac{S_A^2}{S_B^2 F_{\frac{\alpha}{2}}(10-1,10-1)}\right]=[0.2217,3.6028]$

第九章　假设检验

9.1　假设检验的提出以及基本思想

习题9.1

题1　1、某县教委统计报告指出：该县学龄儿童入学率为97%，现从该县学龄儿童中任抽5名，发现2名没有入学，利用小概率事件原理，说明该县的统计是否准确？

解:$p = C_5^2 0.03^2 \times 0.97^3 = 0.08$,不准确.

题2　2、某工作人员在某一个星期里，曾经接见过访问者12次，所有这12次的访问恰巧都在星期二或者星期四，试求该事件的概率。是否可断定他只在星期二或星期四接见访问者？若12次没有一次是在星期日，是否可以断言星期日他根本不会客？

解:星期二或星期四的概率$p = \dfrac{2^{12}}{7^{12}} \approx 0.0000003$,可断定他只在星期二或星期四接见,没有一次在星期日的概率$p = \dfrac{6^{12}}{7^{12}} \approx 0.0167$,不能断言星期日他根本不会客

题3　3、设$x_1, x_2, \cdots, x_n$为来自$N(\mu, 1)$ 的样本.考虑如下的假设检验问题$H_0 : \mu = 2, H_1 : \mu = 3$ 若检验的拒绝域为$W = \{\overline{x} \geq 2.6\}$ 确定（1）$n = 20$时求检验犯两类错误的概率;（2）如果要使得检验犯第二类错误的概率$\beta \leq 0.01$, n 最小应取多少?（3）证明：当$n \to \infty$ 时,$\alpha \to \infty, \beta \to \infty$。

解:(1)第一类错误的概率 :

$$n = 20, \mu = 2, \overline{x} \sim N(2, \frac{1}{20}), 1 - P\{\overline{x} \geq 2.6\} = 1 - \Phi\left(\frac{2.6-2}{\sqrt{1/20}}\right) = 1 - \Phi(2.6833) = 0.0037,$$

第二类错误的概率 :

$$n = 20, \mu = 3, \overline{x} \sim N(3, \frac{1}{20}), P\{\overline{x} < 2.6\} = \Phi\left(\frac{2.6-3}{\sqrt{1/20}}\right) = \Phi(-1.7888) = 0.0367;$$

$$(2)\mu = 3, \overline{x} \sim N(3, \frac{1}{n}), P\{\overline{x} < 2.6\} = \Phi\left(\frac{2.6-3}{\sqrt{1/n}}\right) \leq 0.01, \frac{2.6-3}{\sqrt{1/n}} < -2.33, n > \left(\frac{2.33}{0.4}\right)^2 = 33.9, n = 34;$$

$$(3)n \to 0\text{时}, 1 - \Phi\left(\frac{2.6-2}{\sqrt{1/n}}\right) = 1 - \Phi(+\infty) = 0, \frac{2.6-3}{\sqrt{1/n}} = \Phi(-\infty) = 0$$

题4　4、设x_1, x_2, x_3, x_4为来自$N(\mu, 1)$ 的样本.考虑检验问题：$H_0 : \mu = 6, H_1 : \mu \neq 6$, 拒绝域取为$W = \{|\overline{x} - 6| \geq c\}$,试求c使得检验的显著性水平为0.05，并求该检验在$\mu = 6.5$ 处犯第二类错误的概率。

解:$\overline{x} \sim N(6, \frac{1}{4}), P\{|\overline{x} - 6| \geq c\} = P\{|\frac{\overline{x}-6}{\sqrt{\frac{1}{4}}}| \geq \frac{c}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\} = 0.05, P\{\frac{\overline{x}-6}{\sqrt{\frac{1}{4}}} \geq \frac{c}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\} = 0.025, P\{\frac{\overline{x}-6}{\sqrt{\frac{1}{4}}} < \frac{c}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\} =$

$$0.975, \Phi\left(\frac{c}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\right) = 0.975, \frac{c}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = 1.96, c = 0.98$$

$$\overline{x} \sim N(6.5, \frac{1}{4}), P\{|\overline{x} - 6| < 0.98\} = P\{5.02 < \overline{x} < 6.98\} = P\{\frac{5.02-6.5}{\sqrt{\frac{1}{4}}} < \frac{\overline{x}-6.5}{\sqrt{\frac{1}{4}}} < \frac{6.98-6.5}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\}$$

$$= \Phi\left(\frac{6.98-6.5}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\right) - \Phi\left(\frac{5.02-6.5}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\right) = \Phi(0.96) - \Phi(-2.96) = 0.83$$

9.2 正态总体均值和方差的假设检验

习题9.2

题1 1、设某次考试的学生成绩服从正态分布，从中随机地抽取36位考生的成绩，算得平均成绩为66.5分，标准差为15分，问在显著性水平0.05下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为70分？并给出检验过程。

解:$H_0: \mu = 70, H_1: \mu \neq 70, n = 36, \overline{x} = 66.5, \sigma = 15, \alpha = 0.05, \mu = 70,$

拒绝域$\left|\dfrac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > Z_{0.975}, \dfrac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = -1.4, Z_{0.975} = 1.96,$接受

题2 2、正常人的脉搏平均为72次/分钟，现某医生从铅中毒的患者中抽取10个人，测得其脉搏为：63,69,58,54, 67, 68, 78, 70, 65, 69 次/分钟，设脉搏服从正态分布，问在检验水平$\alpha = 0.05$ 下，铅中毒患者和正常人的脉搏是否有显著性差异？

解:$H_0: \mu = 72, H_1: \mu \neq 72, n = 10, \overline{x} = 66.1, s = 6.33, \alpha = 0.05, \mu = 72,$

拒绝域$\left|\dfrac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > t_{0.975}(9), \dfrac{\overline{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} = -2.95, t_{0.975}(9) = 2.26,$拒绝

题3 3、某厂生产的显像管寿命$Y \sim (5000, 300^2)$，进行工艺改革后测试寿命有否提高。任取36只进行测试，若$\overline{x} = \dfrac{1}{36}\sum_{i=1}^{36} x_i > 5100$，则认为寿命有提高；否则，没有提高。待检验假设为$H_0: \mu = 5000, H_1: \mu > 5000$ 试给出以下内容：（1）总体及分布形式；（2）样本容量；（3）拒绝域；（4）犯第一类错误的概率。

解:(1)$X \sim (\mu, 300^2)$; (2)36; (3)$C = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : \dfrac{1}{36}\sum_{i=1}^{36} x_i > 5100\}$; (4)第一类错误的概率 :

$$n = 36, \mu = 5000, \overline{x} \sim N(5000, \frac{300^2}{36}) = N(5000, 50^2), 1-P\{\overline{x} \geq 5100\} = 1-\Phi\left(\frac{5100-5000}{50}\right) = 1-\Phi(2) = 0.0228$$

题4 4、设总体$X \sim (\mu, 1), (x_1, x_2, \cdots, x_{10})$ 是X 的一组样本观测值，要在$\alpha = 0.05$ 的水平下检验假设$H_0: \mu = 0, H_1: \mu \neq 0$。拒绝域为$R = \{|\overline{x}| > c\}$。（1）求$c$的值；（2）若已知$\overline{x} = 1$，是否可据此样本推断$\mu = 0$；（3）若以$\{|\overline{x}| > 1.15\}$ 作为检验$H_0: \mu = 0$ 的拒绝域，求试验的显著性水平

解:(1)$\overline{x} \sim N(\mu, \dfrac{1}{10}), P\{|\overline{x}| > c\} = P\{\dfrac{|\overline{x}|}{\sqrt{\frac{1}{10}}} > \dfrac{c}{\sqrt{\frac{1}{10}}}\} = 2P\{\dfrac{\overline{x}}{\sqrt{\frac{1}{10}}} > \dfrac{c}{\sqrt{\frac{1}{10}}}\} = 0.05, P\{\dfrac{\overline{x}}{\sqrt{\frac{1}{10}}} > \dfrac{c}{\sqrt{\frac{1}{10}}}\} = 0.025,$

$P\{\dfrac{\overline{x}}{\sqrt{\frac{1}{10}}} < \dfrac{c}{\sqrt{\frac{1}{10}}}\} = 0.975 = \Phi(1.96), \dfrac{c}{\sqrt{\frac{1}{10}}} = 1.96, c = 0.62;$

(2)拒绝域$R = \{|\overline{x}| > 0.62\}, \overline{x} = 1,$拒绝;

$$(3)P\{|\overline{x}| > 1.15\} = P\{\frac{|\overline{x}|}{\sqrt{\frac{1}{10}}} > \frac{1.15}{\sqrt{\frac{1}{10}}}\} = 2P\{\frac{\overline{x}}{\sqrt{\frac{1}{10}}} > \frac{1.15}{\sqrt{\frac{1}{10}}}\} = 2\left(1-\Phi(\frac{1.15}{\sqrt{\frac{1}{10}}})\right) = 2(1-\Phi(3.6366)) = 0.0003$$

题5 5、某厂生产的电子管的使用寿命服从正态分布$N(15, 2^2)$，今从一批产品中抽出100只检查，测得使用寿命的均值为14.8（万小时），问这批电子管的使用寿命的均值是否如常？（$\alpha = 0.05$ ）

解:$H_0: \mu = 15, H_1: \mu < 15, n = 100, \overline{x} = 14.8, \sigma = 2, \alpha = 0.05, \mu = 15,$

拒绝域$\dfrac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < Z_{0.05}, \dfrac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = -1, Z_{0.975} = -1.645,$接受

题6 6、从已知方差为$\sigma^2 = 5.2^2$的正态总体中，抽取容量为$n = 16$的一个样本，计算得样本均值为$\overline{x} = 28.75$,试分别在（1）显著性水平$\alpha = 0.05$；（2）$\alpha = 0.01$ 两种情况下检验假设$H_0: \mu = 26, H_1: \mu \neq 26$

解:(1)$\alpha = 0.05,$拒绝域$\left|\dfrac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > Z_{0.975}, \dfrac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = 2.115, Z_{0.975} = 1.96,$拒绝

(2)$\alpha = 0.01,$拒绝域 : $\left|\dfrac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > Z_{0.995}, \dfrac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = 2.115, Z_{0.995} = 2.345,$接受

题7 7、某工厂生产的铜丝折断力（单位：千克）服从正态分布$N(\mu, 8^2)$。某日随机抽取了10根进行折断力测验，其折断力$x_1, x_2, \cdots, x_{10}$。经计算得$\overline{x} = \dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i, s^2 = \dfrac{1}{10-1}\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})^2 = 68.16$,试在显著性水平$\alpha = 0.05$ 之下检验

假设$H_0:\sigma^2=8^2, H_1:\sigma^2\neq 8^2$。

解:拒绝域 : $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}>\chi^2_{0.975}(n-1)$或$\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}<\chi^2_{0.025}(n-1)$, $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}=9.585, \chi^2_{0.975}(10-1)=19.023, \chi^2_{0.025}(10-1)=2.7$, 接受

题8 8、在正常的生产条件下，某产品的测试指标总体$X\sim N(\mu_0,\sigma_0^2)$，其中$\sigma_0=0.23$。后来改变了工艺，出了新产品，假设新产品的测试指标仍为X，且$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，从新产品中随机地抽取10 件，测得样本值$x_1,x_2,\cdots,x_{10}$，算得样本标准差$s=0.33$,试在检验水平$\alpha=0.05$的情况下检验：（1）方差σ^2有没有显著变化？（2）方差σ^2 是否变大？

解:(1)$H_0:\sigma^2=0.23^2, H_1:\sigma^2\neq 0.23^2$, 拒绝域 : $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}>\chi^2_{0.975}(n-1)$或$\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}<\chi^2_{0.025}(n-1)$,
$\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}=18.53, \chi^2_{0.975}(10-1)=19.023, \chi^2_{0.025}(10-1)=2.7$, 接受;
(2)$H_0:\sigma^2=0.23^2, H_1:\sigma^2>0.23^2$拒绝域 : $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}>\chi^2_{0.95}(n-1)$, $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}=18.53, \chi^2_{0.95}(10-1)=16.919$, 拒绝;

第十章　随机过程的基本概念

10.1　随机过程的定义及分类

题1　1、写出下列随机过程的参数空间和状态空间

（1）为描述某生物群体的发展过程，每天对该群体的个数进行一次观测，并以X_t 表示在第t天群体的个数。

（2）某淘宝店主在时间段$[0,t]$接受的购买咨询人数，并以X_t 表示。

（3）为了研究雾霾的变化规律，某检测站记录了空气中$PM2.5$每天的最高浓度，并以X_t 表示。

解:$(1)t\in\{1,2,\cdots\},\omega\in\{0,1,2,\cdots\};(2)t\in[0,+\infty),\omega\in\{0,1,2,\cdots\};(3)t\in\{0,1,2,\cdots\},\omega\in[0,+\infty);$

题2　2、设随机过程$X(t)=(V+1)t+b,t\in(0,+\infty)$，其中$b$为常数，$V$服从标准正态分布，写出$V=0$时的样本函数及$t=2$对应的随机变量。

解:$X(t)=t+b,t\in(0,+\infty);X(2)=2V+2+b,t\in(0,+\infty)$

10.2　随机过程的概率分布

题1　1、设随机相位正弦波$X(t)=acos(t+\Theta),-\infty<t<+\infty$ 其中a是正常数,Θ是在区间$(0,2\pi)$上服从均匀分布的随机变量。（1）当Θ 取值$\theta=\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\pi$时，相应的样本函数是什么？（2）求$X(t)$ 在$t=\frac{\pi}{4}$时的一维概率密度。

解:$(1)x_1=acos(t+\frac{\pi}{4}),-\infty<t<+\infty;x_2=acos(t+\frac{\pi}{2}),-\infty<t<+\infty;x_3=acos(t+\pi),-\infty<t<+\infty;$

$(2)X(\frac{\pi}{4})$的分布函数为$:F(x)=P(acos(t+\frac{\pi}{4})\leq x),$

$x<-a$时$,F(x)=0;$

$x\geq a$时$,F(x)=1;$

$-a\leq x<\frac{\sqrt{2}}{2}a$时$,acrcos\frac{x}{a}\leq\frac{\pi}{4}+\theta\leq 2\pi-acrcos\frac{x}{a},acrcos\frac{x}{a}-\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{7}{4}\pi-acrcos\frac{x}{a},$

$$F(x)=\int_{acrcos\frac{x}{a}-\frac{\pi}{4}}^{\frac{7}{4}\pi-acrcos\frac{x}{a}}\frac{1}{2\pi}d\theta=\frac{1}{\pi}(\pi-acrcos\frac{x}{a});$$

$\frac{\sqrt{2}}{2}a\leq x<a$时$,2\pi+acrcos\frac{x}{a}\leq\frac{\pi}{4}+\theta\leq 4\pi-acrcos\frac{x}{a},$

$$F(x)=\int_{0}^{\frac{7}{4}\pi-acrcos\frac{x}{a}}\frac{1}{2\pi}d\theta+\int_{\frac{7}{4}\pi+acrcos\frac{x}{a}}^{2\pi}\frac{1}{2\pi}d\theta=\frac{1}{\pi}(\pi-acrcos\frac{x}{a});$$

$$f_1(x;\frac{\pi}{4})=\frac{d}{dx}F(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, & |x|<a\\ 0, & |x|\geq a\end{cases}$$

题2　2、依据独立重复抛掷硬币的试验定义随机过程$X(t)=\begin{cases}-t, & \text{第t次出现花面}\\ t, & \text{第t次出现字面}\end{cases}$$,t=1,2,3\cdots$,每次试验各以$\frac{1}{2}$ 的概率出现花面或者出现字面。试求$X(t)$的一维分布函数$F_1(x;1)$和二维分布函数$F_2(x_1,x_2;1,2)$。

解:

$X(1)$	-1	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$X(2)$	-2	2
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

一维分布分别为: $F(x;1)=P(X(1)\le x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{1}{2}, & -1\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$,

$F(x;2)=P(X(2)\le x)=\begin{cases}0, & x<-2\\ \frac{1}{2}, & -2\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$,

$X(1)$与$X(2)$相互独立,二维分布为:

$$F(x_1,x_2;1,2)=F(x;1)F(x;2)=\begin{cases}0, & x_1<-1\text{或}x_2<-2\\ \frac{1}{4}, & -1\le x_1<1\text{或}-2\le x_2<2\\ \frac{1}{2}, & \begin{cases}-1\le x_1<1\\ x_2\ge 2\end{cases}\quad\text{或}\begin{cases}x_1\ge 1\\ -2\le x_2<2\end{cases}\\ 1, & x_1\ge 1,x_2\ge 2\end{cases}$$

题3 3、设随机过程$Y(t)=Xsim\omega t$，式中ω是常数，X是服从$N(\mu,\sigma^2)$分布的随机变量，求$Y(t)$的一维概率密度。

解:$sim\omega t\ne 0$时,$Y(t)\sim N(sim\omega t\mu, sim\omega t^2\sigma^2)$, 一维密度为:

$f(y,t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma|sim\omega t|}exp\{-\dfrac{(y-\mu sim\omega t)^2}{2\sigma^2 sim^2\omega t}\},-\infty<y<+\infty$

$sim\omega t=0$时,$Y(t)\equiv 0$

题4 4、设随机过程$Z(t)=X+Yt,t>1,X,Y$是相互独立的随机变量，且同在$(0,1)$上服从均匀分布，求$Z(t)$的一维分布函数。

解:X,Y联合分布密度: $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$Z(t)$的一维分布函数为: $F(z;t)=P(Z(t)\le z)=P(X+tY\le z)=\iint_{x+ty\le z}f(x,y)dxdy$

$z\le 0$时,$F(z;t)=0$;

$0<z\le 1$时,$F(z;t)=\int_0^z dx\int_0^{\frac{z-x}{t}}dy=\dfrac{z^2}{2t}$;

$1<z\le t$时,$F(z;t)=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{z-x}{t}}dy=\dfrac{z}{t}-\dfrac{1}{2t}$;

$t<z\le t+1$时,$F(z;t)=\int_0^{z-t}dx\int_0^1 dy+\int_{z-t}^1 dx\int_0^{\frac{z-x}{t}}dy=z-\dfrac{t}{2}-\dfrac{(z-1)^2}{2t}$;

$z>t+1$时,$F(z;t)=1$, 即:

$$F(z;t)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ \frac{z^2}{2t}, & 0<z\le 1\\ \frac{z}{t}-\frac{1}{2t}, & 1<z\le t\\ z-\frac{t}{2}-\frac{(z-1)^2}{2t}, & t<z\le t+1\\ 1, & z>t+1\end{cases}.$$

题5 5、利用抛掷硬币的试验定义一个随机过程$X(t)=\begin{cases}cos\pi t, & \text{出现正面}\\ 2t, & \text{出现反面}\end{cases}$,$t\in R$ 设出现正反面的概率是相同

的。（1）写出$X(t)$ 的所有样本函数。（2）写出$X(t)$ 的一维分布函数$F_1(x;\frac{1}{2})$ 和$F_1(x;1)$ （3）写出$X(t)$的二维分布函数$F_2(x_1,x_2;\frac{1}{2},1)$ （4）试求该过程的期望和相关函数

解:(1)记$\omega_0=\{出现正面\},\omega_1=\{出现反面\}$,所有样本函数为:$X(\omega_0,t)=cos\pi t, X(\omega_1,t)=2t$;

(2)$t=\frac{1}{2}$时,

$X(\frac{1}{2})$	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$,F_1(x,\frac{1}{2})=\begin{cases}0, & x<0\\ 0.5, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge\end{cases}$

$t=1$时,

$X(1)$	-1	2
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$,F_1(x,1)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 0.5, & -1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$

(3)

X(1) \ $X(\frac{1}{2})$	0	1
-1	0.5	0
2	0	0.5

$,F_2(x_1,x_2;0,1)=\begin{cases}0, & x_1<0或x_2<-1\\ 0.5, & \{0\le x_1<1且x_2\ge -1\}或\{x_1\ge 0且-1\le x_2<2\}\\ 1, & x_1\ge 1且x_2\ge 2\end{cases}$

(4)$EX(t)=\frac{1}{2}\times cos\pi t+\frac{1}{2}\times 2t=\frac{1}{2}cos\pi t+t$

$R_X(s,t)=EX(s)X(t)=\frac{1}{2}\times cos\pi s\times cos\pi t+\frac{1}{2}\times 2s\times 2t=\frac{1}{2}cos\pi s cos\pi t+2st$

题6 6、设随机过程$X(t)=Vcos\omega t$,，其中ω 是常数，V服从$[0,1]$上的均匀分布。（1）写出$X(t)$ 的任意两个样本函数；（2）试求$t=0,\frac{\pi}{4\omega},\frac{3\pi}{4\omega},\frac{\pi}{\omega}$ 时$X(t_k)$的概率分布；（3）试求$t=\frac{\pi}{2\omega}$ 时$X(t)$ 的概率密度

解:(1)如:$X(t)=\frac{1}{2}cos\omega t, X(t)=\frac{1}{3}cos\omega t$

(2)$t=0$时$,X(t)=V,f_X(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\\ 0, & 其他\end{cases}$

$t=\frac{\pi}{4\omega}$时$,X(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}V,f_X(x)=\begin{cases}\sqrt{2}, & x\in[0,\frac{\sqrt{2}}{2}]\\ 0, & 其他\end{cases}$

$t=\frac{3\pi}{4\omega}$时$,X(t)=-\frac{\sqrt{2}}{2}V,f_X(x)=\begin{cases}\sqrt{2}, & x\in[-\frac{\sqrt{2}}{2},0]\\ 0, & 其他\end{cases}$

$t=\frac{\pi}{\omega}$时$,X(t)=-V,f_X(x)=\begin{cases}1, & x\in[-1,0]\\ 0, & 其他\end{cases}$

(3)$t=\frac{\pi}{2\omega}$时$,X(t)=0,P\{X(t)=0\}=1$

10.3 随机过程的数字特征

题1 1、设随机过程$Z(t)=Xcos\omega t+Ysin\omega t$,，式中$\omega$是常数，$X$ 和Y 是相互独立的标准正态随机变量，求$Z(t)$ 的均值函数、自相关函数。

解:$EX=0,DX=1,EX^2=1,EY=0,DY=1,EY^2=1,EXY=0$,

$E[Z(t)]=E[Xcos\omega t+Ysin\omega t]=0$,

$R_Z(t_1,t_2)=E[Z(t_1)Z(t_2)]=E[(Xcos\omega t_1+Ysin\omega t_1)(Xcos\omega t_2+Ysin\omega t_2)]=cos\omega(t_2-t_1)$

题2 2、设随机过程$Y(t)=e^{-tX},t\in(-\infty,+\infty)$，其中$X$ 是在$(0,1)$ 上服从均匀分布的随机变量，求$Y(t)$ 的均值函数、

自相关函数。

解:X的密度函数$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$E[Y(t)]=\int_0^1 e^{-tx}dx=\dfrac{1-e^{-t}}{t}$;

$R_Y(t_1,t_2)=E[Y(t_1)Y(t_2)]=E[e^{-(t_1+t_2)X}]=\int_0^1 e^{-(t_1+t_2)x}dx=\dfrac{1-e^{-(t_1+t_2)}}{t_1+t_2}$

题3 3、设随机过程$Z(t)=X+Yt$,,式中X 和Y 都是随机变量，已知X 与Y 的协方差矩阵$C=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & r\\ r & \sigma_2^2\end{pmatrix}$，求$Z(t)$ 的自协方差函数。

解:$DX=Cov(X,X)=\sigma_1^2, DY=Cov(Y,Y)=\sigma_2^2, Cov(X,Y)=r,$

$C_Z(t_1,t_2)=Cov(Z(t_1),Z(t_2))=Cov(X+Yt_1,X+Yt_2)=Cov(X,X)+(t_1+t_2)Cov(X,Y)+t_1t_2Cov(Y,Y)=\sigma_1^2+(t_1+t_2)r+t_1t_2\sigma_2^2$

题4 4、给定随机过程$X(t)$ 和常数a，设$Y(t)=X(t+a)-X(t)$，试以$X(t)$的自相关函数表示$Y(t)$的自相关函数。

解:$R_Y(t_1,t_2)=E[(X(t_1+a)-X(t_1))(X(t_2+a)-X(t_2))]$

$=E[X(t_1+a)X(t_2+a)]-E[X(t_1+a)X(t_2)]-E[X(t_1)X(t_2+a)]+E[X(t_1)X(t_2)]$

$=R_X(t_1+a,t_2+a)-R_X(t_1+a,t_2)-R_X(t_1,t_2+a)+R_X(t_1,t_2)$

题5 5、给定随机过程$X(t)$，定义另一个随机过程$Y(t)=Y(e;t,x)=\begin{cases}1, & X(t)\le x\\ 2t, & X(t)>x\end{cases}$,$t\in R$，$x$ 是任意实数。试证：$Y(t)$ 的均值函数和自相关函数分别是$X(t)$ 的一维分布函数和二维分布函数。

解:$P(Y(t)=1)=P(X(t)\le x)=F_1(x;t),$

$E[Y(t)]=1\times P(Y(t)=1)+0\times P(Y(t)=0)=P(Y(t)=1)=F_1(x;t),$

$R_Y(t_1,t_2;x_1,x_2)=1\times1\times P(Y(t_1)=1,Y(t_2)=1)+1\times0\times P(Y(t_1)=1,Y(t_2)=0)+0\times1\times P(Y(t_1)=0,Y(t_2)=1)+0\times0\times P(Y(t_1)=0,Y(t_2)=0)=P(X(t_1)\le x_1,X(t_2)\le x_2)=F_2(x_1,x_2;t_1,t_2)$

题6 6、设$X(t)$ 是独立随机过程，且均值$\mu_X(t)=\mu$ 是一个常数。又随机过程$Y(t)=X(t)+\varphi(t)$，式中$\varphi(t)$是普通实函数。（1）求$Y(t)$的自相关函数；（2）求$X(t)$ 和$Y(t)$的互相关函数、互协方差函数。

解:(1)$R_Y(t_1,t_2)=E[Y(t_1)Y(t_2)]=E[(X(t_1)+\varphi(t_1))(X(t_2)+\varphi(t_2))]$

$=E[X(t_1)X(t_2)]+E[X(t_1)\varphi(t_2)]+E[\varphi(t_1)X(t_2)]+E[\varphi(t_1)\varphi(t_2)]$

$=\mu^2+\varphi(t_2)\mu+\varphi(t_1)\mu+\varphi(t_1)\varphi(t_2)$

(2)$R_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1)Y(t_2)]=E[X(t_1)(X(t_2)+\varphi(t_2))]$

$=E[X(t_1)X(t_2)]+E[X(t_1)\varphi(t_2)]$

$=\mu^2+\varphi(t_2)\mu$

$C_{XY}(t_1,t_2)=Cov(X(t_1)X(t_2))=E[(X(t_1)-\mu)(X(t_2)-\mu)]=0$

第十一章 平稳过程

11.1 严平稳过程

习题11.1

题1 1、设$\{X_n, n \geq 0\}$是独立同分布的随机变量序列，且$X_n \sim U(0,1), n = 0,1,2,\cdots$，讨论$\{X_n, n \geq 0\}$是否为严平稳过程，并求其一维和二维分布。

解:严平稳.$F_1(x;n) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{其他} \end{cases}$；

$$F_2(x_1,x_2;n_1,n_2) = F_1(x_1;n_1)F_1(x_2;n_2) = \begin{cases} 0, & x_1 < 0\text{或}x_2 < 0 \\ x_1x_2, & 0 \leq x_1 < 1\text{且}0 \leq x_2 < 1 \\ x_1, & 0 \leq x_1 < 1\text{且}x_2 \geq 1 \\ x_2, & x_1 \geq 0\text{且}0 \leq x_2 < 1 \\ 1, & x_1 \geq 1\text{且}x_2 \geq 1 \end{cases}$$

题2 2、设η是概率空间(Ω, F, P)上的一个随机变量，其密度为$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq 2 \\ \dfrac{c}{x^2log|x|}, & |x| > 2 \end{cases}$,其中$c$为常数，由$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$决定，取$X(t) = \eta$，试说明$X(t), t \in T$是严平稳过程，但其均值函数不存在。

解:严平稳:$f_1(x;t) = \begin{cases} 0, & |x| \leq 2 \\ \dfrac{c}{x^2log|x|}, & |x| > 2 \end{cases}$;

$$EX(t) = \int_{|x|>2} \frac{cx}{x^2log|x|}dx = \int_2^{+\infty} \frac{cx}{x^2log|x|}dx + \int_{-\infty}^{-2} \frac{cx}{x^2log|x|}dx$$

而$\int_2^{+\infty} \frac{cx}{x^2log|x|}dx = log(logx)\big|_2^{+\infty} \to +\infty$

11.2 广义平稳过程

习题11.2

题1 1、设$Y(t) = sinXt, X$是在$[0,2\pi]$上服从均匀分布的随机变量。试证：（1）$\{Y(n), n = 1,2,\cdots\}$是平稳序列；（2）$\{Y(t), t \in (-\infty,+\infty)\}$不是平稳过程。

解:$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, & 0 \leq x \leq 2\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$,

$$(1)E[Y(n)] = E[sinnX] = \int_0^{2\pi} sinnx\frac{1}{2\pi}dx = 0, (n = 1,2,\cdots)$$

$E[Y^2(n)] = E[sin^2 nX] = \int_0^{2\pi} sin^2 nx \frac{1}{2\pi} dx = \int_0^{2\pi} \frac{1-cos2nx}{2}\frac{1}{2\pi}dx = \frac{1}{2}, (n=1,2,\cdots)$

$\forall \tau \in N, E[Y(n)Y(n+\tau)] = E[sinnX] = \int_0^{2\pi} sinnxsin(n+\tau)x\frac{1}{2\pi}dx$

$= \int_0^{2\pi} \frac{cos\tau x - cos(2n+\tau)x}{2}\frac{1}{2\pi}dx = 0, (n=1,2,\cdots);$

$(2)E[Y(t)] = E[sintX] = \int_0^{2\pi} sintx\frac{1}{2\pi}dx = \frac{1-cos2\pi t}{2\pi t}$

题2 2、设随机过程$X(t)$ 的均值函数$\mu_X(t) = at+b, (a\neq 0)$,自协方差函数$C_X(t_1,t_2) = e^{-\lambda|t_1-t_2|}, \lambda > 0$,给定$l > 0$,令$Y(t) = X(t+l) - X(t)$, (1)求$Y(t)$ 均值函数,自相关函数,均方值函数; (2)判定$Y(t)$是否是广义平稳过程?

解:$E[Y(t)] = E[X(t+l) - X(t)] = (a(t+l)+b) - (at+b) = al,$

$R_Y(t,t+\tau) = E[Y(t)Y(t+\tau)] = E[X(t+l) - X(t)]E[X(t+\tau+l) - X(t+\tau)]$

$= R_X(t+l,t+\tau+l) - R_X(t+l,t+\tau) - R_X(t,t+l+\tau) + R_X(t,t+\tau)$

$= [C_X(t+l,t+\tau+l) + \mu_X(t+l)\mu_X(t+\tau+l)] - [C_X(t+l,t+\tau) + \mu_X(t+l)\mu_X(t+\tau)]$

$\quad -[C_X(t,t+l+\tau) + \mu_X(t)\mu_X(t+l+\tau)] + [C_X(t,t+\tau) + \mu_X(t)\mu_X(t+\tau)]$

$= [e^{-\lambda|\tau|} + (a(t+l)+b)(a(t+\tau+l)+b)] - [e^{-\lambda|\tau-l|} + (a(t+l)+b)(a(t+\tau)+b)]$

$\quad -[e^{-\lambda|\tau+l|} + (at+b)(a(t+\tau+l)+b)] + [e^{-\lambda|\tau|} + (at+b)(a(t+\tau)+b)]$

$= 2e^{-\lambda|\tau|} - e^{-\lambda|\tau-l|} - e^{-\lambda|\tau+l|} + a^2l^2$

$\Psi_Y^2(t) = R_Y(t,t) = 2 - 2e^{-\lambda\tau} + a^2l^2$

(2)由(1)知,$Y(t)$是广义平稳过程

题3 3、(通讯系统中的加密序列)设$\{\xi_0,\eta_0,\xi_1,\eta_1,\cdots,\xi_2,\eta_2,\cdots\}$ 是相互独立的随机变量序列. $\xi_n(n=0,1,2,\cdots,)$同分布, $\eta_n(n=0,1,2,\cdots,)$ 同分布, $E\xi_n = E\eta_n = 0, D\xi_n = D\eta_n = \sigma^2 \neq= 0$,.设$X_n = \xi_n + \eta_n + (-1)(\xi_n - \eta_n)$,则加密序列$X_n(n=0,1,2,\cdots,)$ 是平稳序列.

解:$X_n = [1+(-1)^n]\xi_n + [1+(-1)^{n+1}]\eta_n,$

$(1)EX_n = 0; (2)EX_n^2 = DX_n + (EX_n)^2 = DX_n = [1+(-1)^n]^2D\xi_n + [1+(-1)^{n+1}]^2D\eta_n = 4\sigma^2,$

$(3)E[X_nX_{n+\tau}] = EX_n\cdot EX_{n+\tau} = 0, E[X_nX_n] = 4\sigma^2,$

平稳序列.

题4 4、设$Y(t) = Xsin(\omega t+\Theta), -\infty < t < +\infty$, ,其中ω 是常数, X与Θ 是相互独立的随机变量, 且$X\sim N(0,1), \Theta\sim U[0,2\pi]$。求$Y(t)$ 的均值函数,自相关函数;问:$Y(t)$ 是不是平稳过程。

解:$EX = 0, EX^2 = 1, f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0\leq\theta\leq 2\pi \\ 0, & 其他 \end{cases},$

$(1)EY(t) = EX\cdot Esin(\omega t+\Theta) = 0,$

$R_Y(t_1,t_2) = E[Y(t_1)Y(t_2)] = EX^2\cdot Esin(\omega t_1+\Theta)sin(\omega t_2+\Theta) = \frac{1}{2}cos\omega(t_2-t_1);$

(2)由(1), $EY(t) = 0, R_Y(t,\tau) = \frac{1}{2}cos\omega\tau, EY^2(t) = \frac{1}{2}$,平稳过程.

题5 5、设$Z(t) = Xsin\omega t + Ycos\omega t$, ,其中$\omega$ 是常数, X与Y 是相互独立的随机变量,且$X\sim N(0,1), \Theta\sim U[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$, 试证: $Z(t)$是广义平稳过程.

解:$EX = 0, DX = 1, EX^2 = 1, EY = 0, DY = 1, EY^2 = 1, EXY = EX\cdot EY = 0,$

$E[Z(t)] = sin\omega t\cdot EX + cos\omega t\cdot EY = 0,$

$E[Z(t)Z(t+\tau)] = sin\omega t\cdot sin\omega(t+\tau)\cdot EX^2 + cos\omega t\cdot cos\omega(t+\tau)\cdot EY^2 + [sin\omega t\cdot cos\omega(t+\tau) + sin\omega(t+\tau)\cdot cos\omega t]E[XY] = sin\omega t\cdot sin\omega(t+\tau) + cos\omega t\cdot cos\omega(t+\tau) = cos\omega\tau,$

$E[Z^2(t)] = 1$

11.3 正态平稳过程

习题11.3

题1 1、设随机过程$X(t)=Ucos\omega t+Vsin\omega t, t\geq 0$，其中$\omega$ 为常数$EU=EV=0, DU=DV=\sigma^2$,且U 和V 是相互独立的正态变量，试证$\{X(t),t\geq 0\}$ 为正态过程，并求其一维概率密度和二维概率密度。

解:$f(x;t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$;

$$f(x_1,x_2;t_1,t_2)=\frac{1}{2\pi|C|^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}x'C^{-1}x},\text{其中}x=(x_1,x_2)',C=\begin{pmatrix}\sigma^2 & \sigma^2Cos\omega(t_2-t_1)\\ \sigma^2Cos\omega(t_2-t_1) & \sigma^2\end{pmatrix};$$

题2 2、已知A,B相互独立同服从$N(0,\sigma^2)$ 分布，α为一实常数，求$X(t)=Acos\alpha t+Bsin\alpha t, t\geq 0$ 的均值函数、协方差函数和有限维分布。

解:$m_X(t)=0, C_X(s,t)=\sigma^2Cos(t-s)\alpha, s,t\geq 0,(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))\sim N(0,D)$,

$$\text{其中}D=\begin{bmatrix}1 & Cos(t_1-t_2) & \cdots & Cos(t_1-t_n)\\ Cos(t_2-t_1) & 1 & \cdots & Cos(t_2-t_n)\\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots\\ Cos(t_n-t_1) & Cos(t_n-t_2) & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

题3 3、已知随机变量R,Θ 相互独立，R 服从Rayleigh分布，即其概率密度函数为$P_R(r)=\begin{cases}\frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r}{2\sigma^2}}, & r\geq 0\\ 0, & r<0\end{cases}$,$\Theta$ 服从区间$(0,2\pi)$上的均匀分布，对$-\infty<t<+\infty$，令$X(t)=acos(\omega t+\theta)$，其中$\omega$ 是常数。求证$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$ 是一正态过程。

解:利用$X(t)=acos(\omega t+\theta)$求出$X(t)$的分布

11.4 遍历过程

习题11.4

题1 1、随机振幅正弦波$Z(t)=Xcos2\pi t+Ysin2\pi t$,其中X和Y 都是随机变量,且$EX=EY=0, DX=DY=1, EXY=0$.（1）求平稳过程$Z(t)$的时间均值,（2）$Z(t)$ 的时间均值是否具有遍历性.

解:$E[Z(t)]=E[Xcos2\pi t+Ysin2\pi t]=0$;

$\overline{Z(t)}=\overline{Z(e,t)}=\lim\limits_{l\to+\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}Z(e,t)dt$

$=\lim\limits_{l\to+\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}[Xcos2\pi t+Ysin2\pi t]dt=\lim\limits_{l\to+\infty}\frac{1}{2l}\cdot\frac{1}{2\pi}[Xsin2\pi t-Ycos2\pi t]|_{-l}^{l}=0$,

$E[Z(t)]=\overline{Z(t)}$,时间均值具有遍历性.

题2 2、设有随机过程$X(t)=Asin\lambda t+Bcos\lambda t$，其中$A,B$ 是均值为0，方差为σ^2 的相互独立的正态随机变量，试问:（1）$X(t)$ 的均值是否具有遍历性?（2）$X(t)$ 的均方值$E[X(t)]^2$ 是否具有遍历性?（3）若$A=-\sqrt{2}\sigma sin\Phi, B=-\sqrt{2}\sigma cos\Phi$, Φ 是$(0,2\pi)$ 上服从均匀分布的随机变量，此时$E[X(t)]^2$ 是否具有遍历性?

解:（1）具有;（2）不具有;（3）具有

题3 3、随机过程$X(t)$ 的均值和相关函数为$E[X(t)]=0, R_X(\tau)=e^{-|\tau|}$, 讨论$X(t)$ 均值的遍历性。

解:具有遍历性。

11.5 平稳过程的相关函数与谱密度

习题11.5

题1 1、下列函数中哪些是谱密度的正确表达式，为什么(1)$S_X(\omega)=\dfrac{\omega^2+9}{(\omega^2+4)(\omega^2+1)}$; (2)$S_X(\omega)=\dfrac{\omega^2+2}{(\omega^4+5\omega^2+6)}$;
(3)$S_X(\omega)=\dfrac{\omega^2+4}{(\omega^4-4\omega^2+3)}$; (4)$S_X(\omega)=\dfrac{\omega^2}{(\omega^4+3\omega^2+2)}$;
(5)$S_X(\omega)=\dfrac{e^{-i\omega}}{(\omega^2+2)}$;

解:（1）（2）（4）是。（3）分母有实根（5）不是实函数

题2 2、已知平稳过程$X(t)$ 的相关函数为$R_X(\tau)=4e^{-|\tau|}cos\pi\tau+cos3\pi\tau$,求谱密度$S_X(\omega)$

解:$S_X(\omega)=4[\dfrac{1}{(\omega-\pi)^2+1}+\dfrac{1}{(\omega+\pi)^2+1}]+\pi[\delta(\omega-3\pi)+\delta(\omega+3\pi)]$

题3 3、设平稳过程$X(t)$ 的谱密度$S_X(\omega)=\dfrac{1}{(1+\omega^2)^2}$，求相关函数$R_X(\tau)$

解:留数公式得$R_X(\tau)=\dfrac{|\tau|+1}{4}e^{-|\tau|}$

题4 4、设平稳过程$X(t)$ 的谱密度$S_X(\omega)=\begin{cases}0, & 0\le|\omega|<\omega_0\\ c^2, & \omega_0\le|\omega|<2\omega_0\\ 0, & |\omega|\ge 2\omega_0\end{cases}$，求相关函数$R_X(\tau)$。

解:$R_X(\tau)=\dfrac{C^2}{\pi\tau}[sin(2\omega_0\tau)-sin(\omega_0\tau)]$

第十二章　马尔可夫链引论

12.1　马尔可夫链的概念

题1　1、生灭链。观察某种生物群体，以X_n表示时刻n群体的数目，设为i个数量单位，如在时刻$n+1$增生到$i+1$个数量单位的概率为b_i，减灭到i-1个数量单位的概率为a_i，保持不变的概率为$r_i=1-(a_i+b_i)$。试证$\{X_n,n=1,2,\cdots\}$为齐次马尔可夫链，并求其转移概率。

解:$P\{X_{n+1}=j|X_n=i,X_{n-1}=k\}=P\{X_{n+1}=j|X_n=i\},j=i+1,i,i-1,$

$$P_{ij}=\begin{cases}a_i, & j=i+1\\ r_i, & j=i\\ b_i, & j=i-1\end{cases}$$

题2　2、独立地重复抛掷一枚硬币，每次抛掷出现正面的概率为p，对于$n\geq 2$，令$X_n=0,1,2,3$，这些值分别对应于第$n-1$次和第n次抛掷的结果为（正，正），（正，反），（反，正），（反，反），试证$\{X_n,n=1,2,\cdots\}$为马尔可夫链，并求转移概率$p_{00},p_{01},p_{11},p_{12},p_{13}$。

解:$p_{00}=P\{X_n=0|X_{n-1}=0\}=p,p_{01}=P\{X_n=1|X_{n-1}=0\}=1-p,$

$p_{02}=P\{X_n=2|X_{n-1}=0\}=0,p_{03}=P\{X_n=3|X_{n-1}=0\}=0,$

$p_{11}=P\{X_n=1|X_{n-1}=1\}=0,p_{12}=P\{X_n=2|X_{n-1}=1\}=p,p_{13}=P\{X_n=3|X_{n-1}=1\}=1-p$

题3　3、设$\{X_t,t\in\{t_1,t_2,\cdots,t_n,\cdots\}\}$为随机过程，且$X_1=X(t_1),X_2=X(t_2),cdots,X_n=X(t_n),\cdots$为独立同分布随机变量序列，令$Y_0=0,Y_1=X_1,Y_n+cY_{n-1}=X_n,n\geq 2,c$为常数，试证$Y_n,n\geq 0$为马尔可夫链。

解:Y_n是$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的函数,X_{n+1}与$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$独立，故：

$P\{Y_{n+1}=i_{n+1}|Y_0=i_0,Y_1=i_1,\cdots,Y_n=i_n\}$

$=P\{X_{n+1}=i_{n+1}+ci_n|Y_0=i_0,Y_1=i_1,\cdots,Y_n=i_n\}$

$=P\{X_{n+1}=i_{n+1}+ci_n\}$

$=P\{X_{n+1}=i_{n+1}+ci_n|Y_n=i_n\}$

12.2　参数离散的齐次马尔可夫链

题1　1、已知齐次马尔可夫链的转移概率矩阵$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$，问此马尔可夫链有几个状态？求二步转移概率矩阵.

解:三个状态，

$$P^{(2)}=P^2=\begin{pmatrix}\frac{3}{9}&\frac{4}{9}&\frac{2}{9}\\ \frac{2}{9}&\frac{5}{9}&\frac{2}{9}\\ \frac{2}{9}&\frac{4}{9}&\frac{3}{9}\end{pmatrix}$$

题2 2、从次品率$p(0<p<1)$ 的一批产品中,每次随机抽查一个产品,以X_n 表示前n 次抽查出的次品数, (1) $\{X_n,n=1,2,\cdots,\}$ 是否齐次马尔可夫链? (2) 写出状态空间和转移概率矩阵; (3)如果这批产品共有100个,其中混杂了3个次品,作有放回抽样,求在抽查出2个次品的条件下,再抽查2次, 共查出3个次品的概率.

解:(1)$P\{X_{n+1}=i_{n+1}|X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n\}=\begin{cases}p, & i_{n+1}=i_n+1\\ 1-p, & i_{n+1}=i_n\end{cases}=P\{X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n\}$

故为马尔可夫链

(2)$S=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\},P_{ij}==\begin{cases}0, & j<i\\ 1-p, & j=i\\ p, & j=i+1\\ 0, & j>i+1\end{cases}$

(3)$p=0.03$,
$P\{X_{n+2}=3|X_n=2\}$
$=P\{X_{n+2}=3,X_{n+1}=2|X_n=2\}+P\{X_{n+2}=3,X_{n+1}=3|X_n=2\}$
$=P\{X_{n+1}=2|X_n=2\}\cdot P\{X_{n+2}=3|X_{n+1}=2\}+P\{X_{n+1}=3|X_n=2\}\cdot P\{X_{n+2}=3|X_{n+1}=3\}$
$=(1-p)p+p(1-p)=0.0582$

题3 3、独立重复地掷一颗匀称的骰子, 以X_n表示前n 次掷出的最小点数, (1) $\{X_n,n=1,2,\cdots,\}$ 是否齐次马尔可夫链? (2) 写出状态空间和转移概率矩阵; (3)求$P\{X_{n+1}=3,X_{n+2}=3|X_n=3,\}$;(4)求$P\{X_2=1\},$.

解:(1)$P\{X_{n+1}=i_{n+1}|X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n\}=\begin{cases}0, & i_{n+1}>i_n\\ \frac{7}{6}-\frac{i_n}{6}, & i_{n+1}=i_n\\ \frac{1}{6}, & i_{n+1}=1,\cdots,i_n-1\end{cases}$

$=P\{X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n\}$
故为马尔可夫链

(2)$S=\{1,2,3,4,5,6\},P_{ij}==\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\ \frac{1}{6}&\frac{5}{6}&0&0&0&0\\ \frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{4}{6}&0&0&0\\ \frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{3}{6}&0&0\\ \frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{2}{6}&0\\ \frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$

(3)$P\{X_{n+1}=3,X_{n+2}=3|X_n=3,\}=P\{X_{n+1}=3|X_n=3,\}\cdot P\{X_{n+2}=3|X_{n+1}=3\}=\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{4}{9}$;

(4)$P\{X_2=1\}=\sum_{i=1}^{6}P\{X_1=i\}P\{X_2=1|X_1=i\}=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)\left(1,\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)'=\frac{11}{36}$

题4 4、具有三状态:0,1,2的一维随机游动,以$X(t)=j$ 表示时刻t 粒子处在状态$j(j=0,1,2)$, 过程$X(t),t=t_0,t_1,t_2,\cdots$

的一步转移概率矩阵$P=\begin{pmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{pmatrix}$, (1) 求粒子从状态1 经二步、经三步转移回到状态1的转移概率; (2) 求过程的平稳分布.

解:(1)$P^2=\begin{pmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q & qp & p^2 \\ q^2 & 2qp & p^2 \\ q^2 & qp & p \end{pmatrix}$

$p_{11}^2=2qp,$

$p_{11}^3=(q,0,p)\,(qp,2qp,qp)'=qp$

(2) $(p_1,p_2,p_3)\begin{pmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{pmatrix}=(p_1,p_2,p_3)$

$p_1+p_2+p_3=1$

即$\begin{cases} p_1=p_1q+p_2p \\ p_2=p_1q+p_3p \\ p_3=p_2q+p_3p \\ p_1+p_2+p_3=1 \end{cases}$ 得 : $p_1=\dfrac{q^2}{1-qp},p_2=\dfrac{qp}{1-qp},p_3=\dfrac{p^2}{1-qp}$

题5 5、设同型产品装在两个盒内,盒1内有8个一等品和2个二等品,盒2内有6个一等品和4个二等品. 作有放回地随机抽查,每次抽查一个,第一次在盒1内取.取到一等品,继续在盒1内取;取到二等品,继续在盒2内取. 以X_n表示第n 次取到产品的等级数,则$\{X_n,n=1,2,\cdots,\}$ 是齐次马尔可夫链. (1)写出状态空间和转移概率矩阵;（2）恰第3、5、8次取到一等品的概率为多少? (3)求过程的平稳分布。

解:(1)$S=\{1,2\},P=\begin{pmatrix} \frac{8}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{6}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$;

(2)$P^2=\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{19}{25} & \frac{6}{25} \\ \frac{18}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix}$,

$P^3=\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{19}{25} & \frac{6}{25} \\ \frac{18}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{94}{125} & \frac{31}{125} \\ \frac{93}{125} & \frac{32}{125} \end{pmatrix}$,

$P\{X_3=1,X_5=1,X_8=1\}=\sum\limits_{i=1}^{2}P\{X_1=i\}p_{i1}^2p_{11}^2p_{11}^2=(0.8\times0.76+0.2\times0.72)\cdot0.76\cdot0.752=0.429783,$

(3) $(p_1,p_2)\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}=(p_1,p_2)$

$p_1+p_2=1$

即$\begin{cases} p_1=p_1\frac{4}{5}+p_2\frac{3}{5} \\ p_2=p_1\frac{1}{5}+p_2\frac{2}{5} \\ p_1+p_2=1 \end{cases}$ 得 : $p_1=\dfrac{3}{4},p_2=\dfrac{1}{4}$

题6 6、四个位置:1,2,3,4在圆周上逆时针排列.粒子在这四个位置上随机游动.粒子从任何一个位置, 以概率$\frac{2}{3}$ 逆时针游动

到相邻位置; 以概率$\frac{1}{3}$ 顺时针游动到相邻位置;以$X(n)=j$ 表示时刻n粒子处在位置$j(j=1,2,3,4)$,(1) 求齐次马尔可夫链$\{X(n),n=1,2,\cdots,\}$ 的状态空间和一步转移概率矩阵; (2) 求条件概率$P\{X_{n+3}=3,X_{n+1}=1|X_n=2,\}$; (3)求平稳分布.

解:(1)$S=\{1,2,3,4\},P=\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$

(2)$P\{X_{n+3}=3,X_{n+1}=1|X_n=2,\}=P\{X_{n+1}=1|X_n=2,\}\cdot P\{X_{n+3}=3|X_{n+1}=1,X_n=2\}$

$=P\{X_{n+1}=1|X_n=2,\}\cdot P\{X_{n+3}=3|X_{n+1}=1\}=p_{21}p_{13}^{(2)}=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}p_{1k}p_{k3}$

$=\frac{1}{3}(0\times 0+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+0\times 0+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3})=\frac{5}{27}$

(3) $(p_1,p_2,p_3,p_4)\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}=(p_1,p_2,p_3,p_4)$

$p_1+p_2+p_3+p_4=1$

即 $\begin{cases} p_1=p_2\frac{1}{3}+p_4\frac{2}{3} \\ p_2=p_1\frac{2}{3}+p_3\frac{1}{3} \\ p_3=p_2\frac{2}{3}+p_4\frac{1}{3} \\ p_4=p_1\frac{1}{3}+p_3\frac{2}{3} \\ p_1+p_2+p_3+p_4=1 \end{cases}$ 得 : $p_1=p_2=p_3=p_4=\frac{1}{4}$

题7 7、独立重复地掷一颗匀称的骰子, 以$X_n=j$ 表示前n 次投掷中出现的最大点数为j ,则$\{X_n,n=1,2,\cdots,\}$为齐次马尔可夫链. (1)写出状态空间和一步转移概率矩阵; (2)求$P\{X_{n+3}=4|X_n=3\}$; (3)求$P\{X_2=3,X_3=3,X_5=3\}$.

解:(1)$S=\{1,2,3,4,5,6\},P=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2)$P\{X_{n+3}=4|X_n=3\}=p_{34}^{(3)}=\sum_{i=1}^{6}p_{3k}p_{k4}^{(2)}=p_{33}p_{34}^{(2)}+p_{34}p_{44}^{(2)}+p_{35}p_{54}^{(2)}+p_{36}p_{64}^{(2)}$

$=\frac{3}{6}\times\frac{7}{6^2}+\frac{1}{6}\times\frac{16}{6^2}+\frac{1}{6}\times 0+\frac{1}{6}\times 0=\frac{5}{216}$

(3)$P\{X_2=3,X_3=3,X_5=3\}=\sum_{i=1}^{6}P\{X_1=i\}p_{i3}p_{33}p_{33}^{(2)}=p_{33}p_{33}^{(2)}\sum_{i=1}^{6}P\{X_1=i\}p_{i3}$
$=\frac{1}{6}\times\frac{9}{36}\times\frac{1}{6}\times(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{3}{6})=\frac{37}{48\times 6}=\frac{37}{288}$

12.3 参数连续的齐次马尔可夫链

题1 1、设随机过程$\{X(t),t\geq 0\}$ 满足如下条件：（1）$\{X(t),t\geq 0\}$是取非负整数值的独立增量过程，且$X(0)=0$,（2）对任意$0\leq s<t$，过程的增量$X(t)-X(s)$ 服从参数为$\lambda(t-s)$ 的泊松分布，即：$P\{X(t)-X(s)=k\}=\frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}\cdot e^{-\lambda(t-s)},k=0,1,2,\cdots$ 其中$\lambda>0$ 为常数。即：$\{X(t),t\geq 0\}$是参数$\lambda>0$ 的泊松过程。证明该随机过程是一个时间连续状态离散的齐次马尔科夫过程。

解:马尔科夫性:$P\{X(t_{n+1})=i_{n+1}|X(t_1)=i_1,X(t_2)=i_2,\cdots,X(t_n)=i_n\}$
$=P\{X(t_{n+1})-X(t_n)=i_{n+1}-i_n\}=P\{X(t_{n+1})-X(t_n)=i_{n+1}-i_n|X(t_n)-X(t_0)=i_n\}$

齐次性:$p_{ij}(s,t)=p_{ij}(t)=\begin{cases}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}, & j\geq i\\ 0, & j<i\end{cases}$

题2 2、一质点在1、2、3点上作随机游走，若在时刻t质点位于这三个点之一，则在$[t,t+h)$内，它以$\frac{1}{2}h+o(h)$ 分别转移到其他两点之一，试求质点随机游走的柯尔莫戈洛夫方程，转移概率$P_{ij}(t)$ 及平稳分布。

解:$p'_{ij}(t)=-p_{ij}(t)+\frac{1}{2}p_{i,j-1}(t)+\frac{1}{2}p_{i,j+1}(t)$,

$p_{ij}(t)=\begin{cases}\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}t}, & i\neq j\\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}t}, & i=j\end{cases};\frac{1}{3}$

教材勘误表

勘1 $P124,T10:F(x,y)$第二行系数有误
将:$\frac{3}{2}xy(x+2y)$
更正为:$\frac{1}{3}xy(x+2y)$

勘2 $P143,T5$:条件遗漏
在:标准差为$\sqrt{2}$,
之后增加:Y服从标准正态分布

勘3 $P164,T1$:第一行去掉"同分布"三个字

勘4 $P196,T12$:第一行
将:$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_{10})$
更正为:$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_{15})$

勘5 $P196,T13$:第二行
将:$\frac{n\overline{X}}{S^2}$
更正为:$\frac{n\overline{X}^2}{S^2}$

勘6 $P225,T3$:第三行
将:$0.35m$
更正为:$0.035m$

勘7 $P229,T4$:第一行
将:$\cdots,x_n$
更正为:x_3,x_4

勘8 $P310$, 习题$5.5T3$:
将:85, 37
更正为:$\frac{85}{4},\frac{37}{4}$

勘9 $P313$, 习题$7.3T12$:
将:0.6744
更正为:0.697

勘10 $P314$, 习题$8.4T3$:
(1)将:$\left[\overline{X}-\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right]$ 更正为:$\left[\overline{X}-\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$
(2)将:$\left[\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right]$ 更正为:$\left[\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right]$

勘11 $P314$, 习题$8.4T4$:
(3)将:$\left[\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$ 更正为:$\left[\overline{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\overline{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$
(4)将:$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$ 更正为:$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$
(5)将:$\left[\overline{X}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ 更正为:$\left[\overline{X}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$