一、 填空题：

1、集合 A 有 n 个元素，请问定义在 n 上的二元关系有 2^{n^2} 种。

2、n 个顶点的完全图有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 条边。

3、有 P 个顶点和 P 条边的连通图有 1 个圈。

4、集合{1,2,3,4}到{1,2}的函数中，满射的有 14 个。

5、P 个顶点的无向连通图 G 的邻接矩阵中至少有 2(P−1) 个 1。

二、 证明题：

1、已知集合 A、B、C，满足$A\cup B=A\cup C$且$A\cap B=A\cap C$。证明：$B=C$。

$A\cup B=A\cup C \qquad A\cap B=A\cap C$

$x\in B \Rightarrow x\in A\cup B \Rightarrow x\in A\cup C \qquad x\in C$

若 $x\notin A\cap B \Rightarrow$

若 $x\in A\cap B \Rightarrow \cancel{x\notin A}\, A\cap C \Rightarrow x\in C$

$x\in C$

$B\subseteq C$

$C\subseteq B$ 同理

2、证明：一个无回路的有向图中至少有一个出度为 0 的顶点。

设全部出度都大于0

最长基本通路设为 $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$

$\because$ u_p 出度大于0

$\therefore$ 必有 u_i 使得 $\langle u_p, u_i \rangle$ 存在

$\because$ $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ 为最长通路

$\therefore$ u_i 必在 $u_1 - u_p$ 之间

$\therefore$ 产生回路 $\langle u_i, \cdots, u_p, u_i \rangle$ 矛盾

3、证明：完全二元树 T 必有奇数个顶点。

4、已知 G(V,E)是无向连通图，e 是 G 中的一条边。证明：e 是 G 的桥当且仅当 e 在 G 的每个生成树中。

$\Longrightarrow$ 设e不在生成树T中，G − e不连通，T不可能连通，矛盾

$\Longleftarrow$ G − {e}中没有生成树存在，$\Longrightarrow$ G − e不连通，

e是G的桥

5、已知集合 S={1,2,3,4}，A=S×S，定义在 A 上的关系 R 为：$\langle\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\rangle \in R$当且仅当$a+b=c+d$。证明：R 是等价关系。

$\langle\langle a,b\rangle,\langle a,b\rangle\rangle$ 自反 $a+b=a+b$ ✓

对称 $c+d=a+b$ ✓

$$\text{传递}\left\{\begin{array}{l} a+b=c+d \\ c+d=e+f \\ a+b=e+f \end{array}\right.$$ ✓

三、　　解答题：

1、已知有 P 个顶点的二元树 T 有 n_2 个出度为 2 的顶点，求 T 的叶子节点数 n_0 。

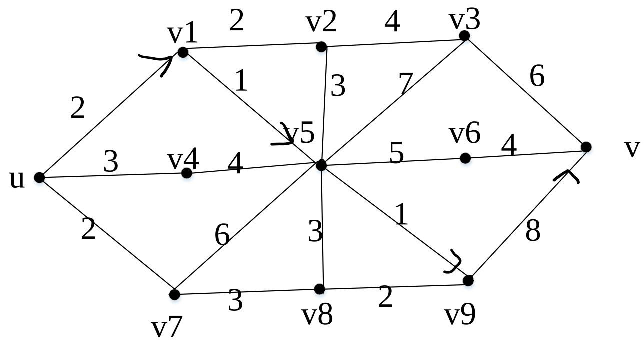
设 n_0 个出度为 0

n_1 个出度为 1

$$\begin{cases} n_0 + n_1 + n_2 = P \\ 2n_2 + n_1 + 1 = P \end{cases}$$

$\rightarrow n_0 = n_2 + 1$

2、求下图中 u 到 v 的最短路，并说明路长。



✓ u	0	
✓ v_1	2	u
✓ v_2	4	v_1
✓ v_3	8	v_2
✓ v_4	3	u
✓ v_5	3	v_1
✓ v_6	8	v_5
✓ v_7	2	u
✓ v_8	5	v_7
✓ v_9	4	v_5
✓ v	12	v_9

12

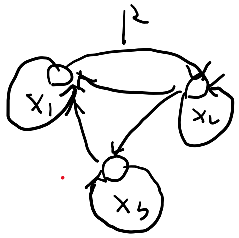
3、已知关系 R、S 的关系矩阵$M_R = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$M_S = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$。

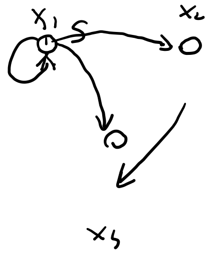
求：（1）R、S 的集合表达式（2）R、S 的关系图（3）R、S 分别满足哪些关系性质。

(1) R $\{<x_1, x_1>, <x_1, x_2>, <x_2, x_1>, <x_2, x_2>, <x_2, x_3>, <x_3, x_1>, <x_3, x_3>\}$

S $\{<x_1, x_1>, <x_1, x_2>, <x_1, x_3>, <x_2, x_3>\}$

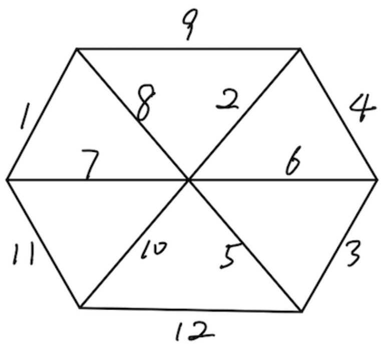
(2)

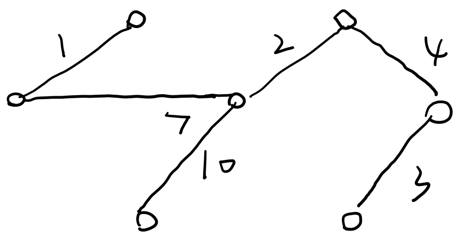




(3) R 自反　　S 传递，反对称

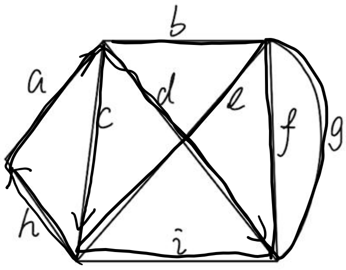
4、求下图中有权图的最小生成树，并求出该最小生成树的权值之和。

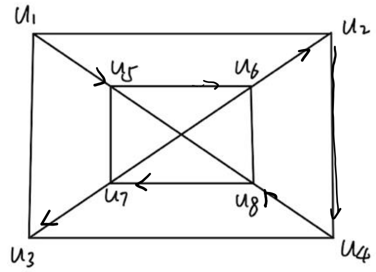




1+2+3+4+7+10=27

5、判断下面左图是否是欧拉图，如果是用边序列标出欧拉回路，如果不是说明理由；判断下面右图是否是哈密顿图，如果是用顶点序列标出哈密顿圈，如果不是说明理由。





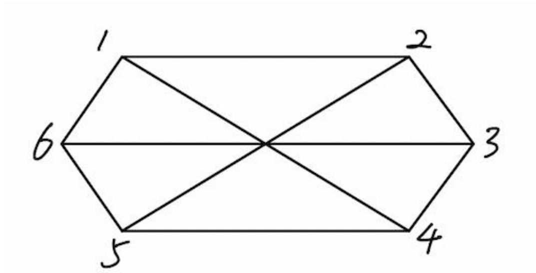
全是偶顶点

✓

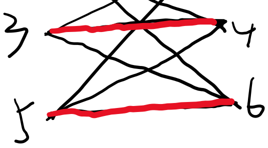
c h a d g f i e b

$u_1\ u_5\ u_6\ u_2\ u_4\ u_8\ u_7\ u_3$

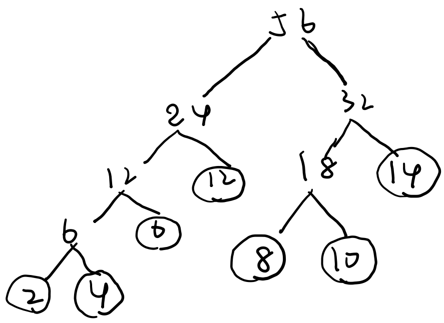
6、下图是二分图吗？1）如是改画成二分图，并找出最大匹配，并说明是否存在从 X 到 Y 的匹配，如果存在给出此匹配。如果不存在说明理由。2）如果不是二分图，说明理由。



所有圈的长度都是偶 ✓



7、求叶子节点权重为 2、4、6、8、10、12、14 的最优二元树，并求其权值。



$$\overset{8}{4\times2}+\overset{16}{4\times4}+\overset{18}{3\times6}+\overset{24}{2\times12}+\overset{24}{3\times8}+\overset{30}{3\times10}+\overset{28}{2\times14}$$

$$=148$$