A 卷

2020-2021 学年第 1 学期

（2020 秋季）

《离散数学 2》

期末考试卷

班级 19211 学号 ______________

姓名 叶蕊淮 成绩 ______________

2021 年 1 月 12 日

《离散数学 2》

期末考试卷

注意事项：1. 考生应自觉服从监考人员的管理，不得以任何理由妨碍监考人员履行职责。

2. 考生不准夹带、旁窥、抄袭或有意让他人抄袭，不准传抄答案或交换试卷。

题号	一	二	三	四	总分
成绩					
阅卷人签字					
任课教师签字					

题目：

一、填空题……………………………………………………………………（ 10 分）

二、证明题……………………………………………………………………（ 43 分）

三、解答题……………………………………………………………………（ 44 分）

四、简答题……………………………………………………………………（ 3 分）

一．填空题（每小题 2 分，共 10 分）

（1）设集合 X 基数为 n，那么 X 上有多少个不同的自反的二元关系？ $2n^2-n$ 。

（2）设 T 是一个有 n 个顶点的完全二元树，其中 n 为奇数，则 T 中叶子数为： $\frac{1}{2}(n+1)$ 。

（3）正整数 m 和 n 满足什么条件时二分图 $K_{m,n}$ 为欧拉图？ m,n 均为偶数

（4）集合 X={1，2，3}上可以定义 5 个不同的等价关系。

（5）从集合{1，2，3}到集合{4,5}有 8 个不同的函数。

二、证明题（共 35 分）

1. **（10 分）**设 R，S，T 是集合 A 上的关系，证明：$(R\cup S)\circ T=(R\circ T)\cup(S\circ T)$

令 $\langle x,y\rangle \in (R\cup S)\circ T$

$\Leftrightarrow (\exists z)(x(R\cup S)z \wedge zTy)$

$\Leftrightarrow (\exists z)((xRz \vee xSz) \wedge zTy)$

$\Leftrightarrow (\exists z)((xRz \wedge zTy) \vee (xSz \wedge zTy))$

$\Leftrightarrow (\exists z)(xRz \wedge zTy) \vee (\exists z)(xSz \wedge zTy)$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R\circ T \vee \langle x,y\rangle \in S\circ T$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in (R\circ T)\cup(S\circ T)$

$\therefore (R\cup S)\circ T=(R\circ T)\cup(S\circ T)$，证毕。

2.（6 分）证明：若有向图 $D=<V,A>$ 是单向连通的，则对于 V 的每个非空子集 U，存在 $v\in U$ 可以到达 U 中每个顶点。

$n=1$ 时，v 可达每个顶点，
$n=2$ 时，有 $v_1\to v_2$ 或 $v_2\to v_1$，
存在 v 可以到达每个顶点，
假设 $n=k$ 成立，即 $\forall v_i\in U$ 可达 U 中每个顶点。
$n=k+1$ 时，有 $v_i\to v_{k+1}$ 或 $v_{k+1}\to v_i$
当 $v_i\to v_{k+1}$ 时，v_i 可达每个顶点成立，
$v_{k+1}\to v_i$ 时，因为 v_i 可达每个顶点，所以 v_{k+1} 可经过 v_i 而到达每个顶点，成立，
$\therefore$ 总存在 $v\in U$ 可到达每个顶点。

3.（10 分）证明：完全图 K_9 中至少存在彼此无公共边的两条哈密顿圈和一条哈密顿链。

在 K_9 中，所有点的度 $=8\geq\frac{9}{2}$
$\therefore$ 必有一条哈密顿回路 C_1
令 G_1 为 K_9 中删掉 C_1 中的所有边的图，
$\therefore \forall v\in G_1$，$\deg v=6\geq\frac{9}{2}$
$\therefore G_1$ 为哈密顿图。
$\therefore G_1$ 中存在哈密顿回路 C_2，其中 C_1 和 C_2 之间没有公共边。
设 G_2 为 G_1 删除 C_2 中所有边的图，
$\therefore \forall v\in G_2$，$\deg v=4<\frac{9}{2}$
$\therefore G_2$ 中存在哈密顿路 C_3.
$\therefore$ 显然 C_1,C_2,C_3 无公共边，证毕。

4.（10 分）给出正整数序列（d_1，d_2，…，d_n），其是一棵树中结点的度数序列的充分必要条件是$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$

证明：充分性

由题可知：图为一棵树，有 n 个顶点

∴ 边的个数为 $n-1$

∴ 次数为 $2(n-1)$

必要性

当 $n=1$ 时，G 为平凡图，为树

假设对任意 $k=1$，当 $n=k$ 时为树

若 $n=k+1$，则由 $n(E)=n-1=k$，得 $\sum d(u)=2n$

∵ G 为连通，

∴ $\forall u \in V$ 均有 $d(v) \geq 1$

∴ 必存在 $v' \in V$ 有 $d(v')=1$

∴ $G-v'$ 为连通

∴ $G-v'$ 为树

∴ G 为树，成立。

∴ 度数为 $2(n-1)$ 时为树。

故序列 $(d_1, d_2, \ldots\ldots, d_n)$ 应满足 $\sum d_i = 2(n-1)$

5.（7 分）设 R 是 A 上的一个自反关系，

证明：R 是等价关系 ⇔ 若<a,b>∈R 且<a,c>∈R，则<b,c>∈R。

证明：充分性

∵ R为等价关系

∴ R满足对称性和传递性

∵ $\langle a,c\rangle \in R$

∴ $\langle b,a\rangle \in R$

∵ $\langle a,c\rangle \in R$

∴ $\langle b,c\rangle \in R$，成立。

必要性

设 $\langle a,b\rangle \in R$，$\langle a,c\rangle \in R$

∴ $\langle b,c\rangle \in R$

∵ $\langle a,b\rangle \in R$，$\langle a,b\rangle \circ \langle b,c\rangle = \langle a,c\rangle \in R$

∴ 满足传递性

∵ R满足自反性，则由 $\langle a,b\rangle \in R$ 且 $\langle a,a\rangle \in R$，有 $\langle b,a\rangle \in R$

∴ 对称性成立。

∴ R为等价关系。

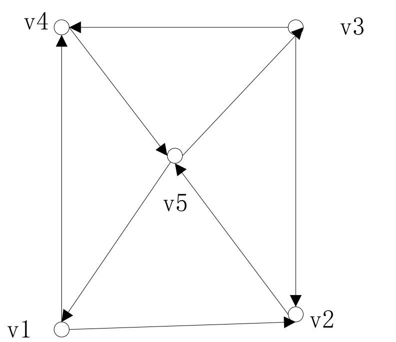
三、解答题（共 55 分）

1. **（10 分）**有向图 G 如下，求：

1）写出 G 的邻接矩阵 A

2）G 中长度为 4 的通路有几条？其中有几条为回路？

2）根据邻接矩阵利用布尔函数求出该图的可达矩阵 P，并根据 P 来判断 G 的连通性（即：强/单向/弱联通）



1)
$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & 1 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty & 1 \\ \infty & 1 & 0 & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 1 \\ 1 & \infty & 1 & \infty & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

2)
$$A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

∴ 有 32 条长为 4 的通路，其中并无回路。

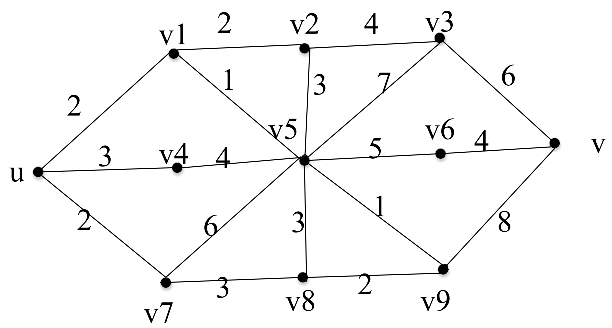
3)
$$A + A^2 + A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

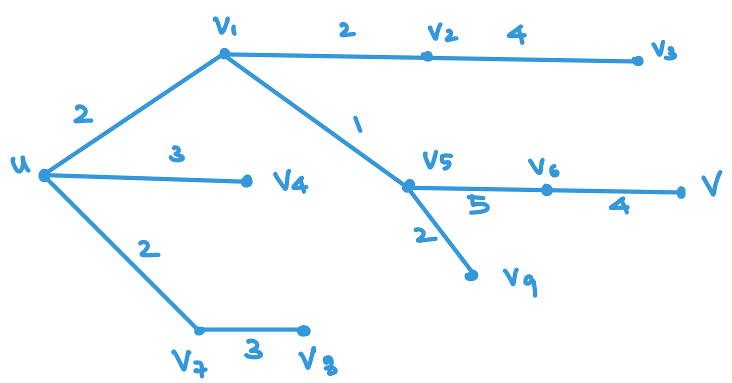
∴ 图为强连通。

2. **（4 分）**设 G 是有 k 个奇顶点的无向连通图，那么最少需要在 G 中添加多少条边才能使 G 具有欧拉圈。

略～（没记下来）

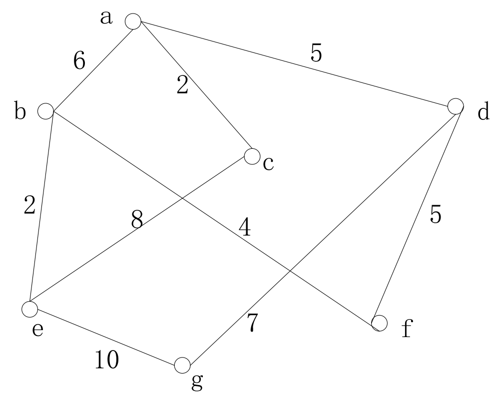
3.（6 分）求下图中 u 到 v 的最短路，并说明路长。

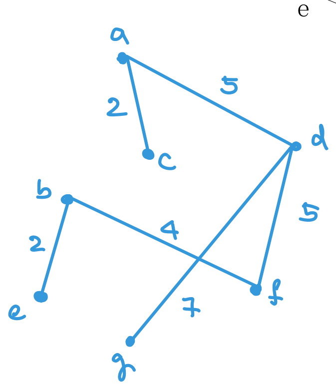




路长 = 2+1+5+4
= 12 #

4. （**6 分**）求下图中有权图的最小生成树，并求出该最小生成树的权值之和。





$\therefore$ 权值 $= 2+5+5+4+2+7$

$= 25$ #

5.（**4 分**）设 $f: X \to Y,\ g: Y \to Z$，则若 $g \circ f$ 是是单射，则 f 是单射吗？说明理由。

是。

设 $f(x_1) = f(x_2)$

$\therefore g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

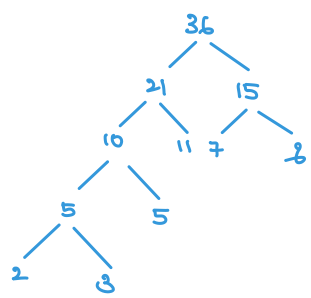
$\therefore g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$

$\because g \circ f$ 是单射

$\therefore x_1 = x_2$

$\therefore f$ 为单射。

6.（**4 分**）求带权 2，3，5，7，8，11 的最优二元树，并给出树的权。



$WPL = 2\times4 + 3\times4 + 5\times3 + 11\times2 + 7\times2 + 8\times2$

$= 8+12+15+22+14+16$

$= 87$ #

7.（10 分）现有三个课外小组：离散数学组，算法组，编译组，有五个学生 s1，s2，s3，s4，s5.

1）已知 s1，s2 是离散数学组成员，s1，s3，s4 是算法组成员，s3，s4，s5 是编译组成员；

2）已知 s1 既是离散数学组成员，又是算法组成员，s2，s3，s4，s5 是编译组成员；

问：在以上两种情况下，在五个学生中选三位当课外小组组长，不兼职，能否做到？如果能，说明每个小组的组长是谁，如果不能，说明理由。

要求：用图论知识解决，即用图来建模解决。

1)

能做到。

离散数学组小组组长：S_2

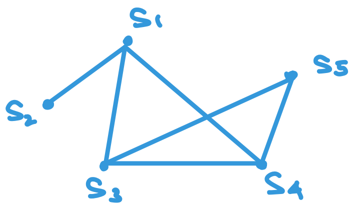
编译组小组组长：S_5

算法组小组组长：其余3人任意个

S_1, S_2 两两连接

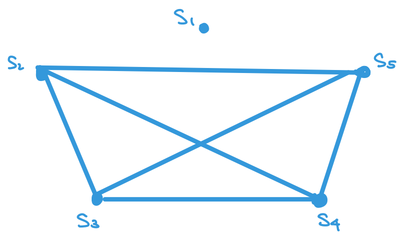
S_1, S_3, S_4 两两连接

S_3, S_4, S_5 两两连接



2)

S_2, S_3, S_4, S_5 两两连接



S_2, S_3, S_4, S_5 不能当离散组组长和算法组组长。

只有 S_1 能当，所以不能做到。

四、简答题（共 3 分）

1. 根据课程的程序作业完成情况，简述软件工程师的工匠精神如何体现？

工匠精神是一种理念，对自己的作品精益求精，
不断完善的精神理念。