北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

2020—2021 学年第二学期

考试答题册

A 卷

题号	一	二	三	四	五［五］	六[六]	总分
成绩							
阅卷人签字							
校对人签字							

考试课程____概率统计 A，概率统计 B______

班　　级____________学　号________________

姓　　名____________成　绩________________

考场 ____________序号 ______________

任课教师 ____________

考试时间：　　2021 年 6 月 22 日

10：20——12：20

北京航空航天大学考生守则

第五十一条 考生应提前 10 分钟凭学生卡或学生证进入考场，参加补考还必须携带《补考准考证》。入场后必须保持安静，服从监考教师安排，按指定位置就座。并将本人证件放在桌面上，以便监考教师核对。

第五十二条 迟到 15 分钟者，禁止入场，取消考试资格。考试开始 60 分钟后方可交卷退场。考试结束前 10 分钟，考生不准离开考场。

第五十三条 考试时除准备必需的文具（如钢笔、圆珠笔、铅笔、橡皮、绘图仪器和无字典存储和编程功能的电子计算器）外，不得携带手机、智能手表、文曲星、商务通或带有存储、编程、查询功能的高档计算器进入座位，否则按考试违纪论处，如考试过程中使用上述工具视为作弊。考试中不准使用自备的答题纸和草稿纸，不允许擅自更换试卷，不允许互相传借文具、纸张。书籍（开卷考试除外）、书包及上述通讯工具等物品一律按要求放到指定地点。

第五十四条 答题前必须先写上自己的姓名、班级和学号，答题一律用蓝、黑色钢笔或圆珠笔书写（填涂《答题卡》用 2B 铅笔），字迹要工整、清楚，答题书写在草稿纸上的一律无效。

第五十五条 若遇问题，必须举手向监考教师示意。除试卷印刷问题，不允许向监考教师提出任何与试卷内容有关的问题。考生不许私自相互借用任何考试用具。

第五十六条 考试进行中，未交卷者原则上不允许离开考场，确需离场时必须交卷后方可离开。未交卷擅自离开考场者，按考试结束处理，不得再次进入考场参加考试。考生在任何情况下都不得将试卷带出考场。

第五十七条 宣布考试结束时，考生应立即停止答题，一律由监考教师上位收卷，在收齐全部试卷之前，考生必须保持在原座位，不得说话，凡违反者一律按作弊处理。延误不交卷者，监考教师有权视情节按违纪或作弊处理，考试成绩按零分记。

第五十八条 考试结束后，应在监考教师清点试卷无后，方可退场，否则按考试违纪处理。退场后不得在考场附近逗留、大声喧哗。

第五十九条 学生违纪和作弊行为的认定，按照《北京空航天大学考试违规行为的认定办法》执行。对违反考试纪律或作弊（含协同作弊）者，监考教师有权当场收回试卷，并在试卷上写上“违纪”或“作弊”字样，取消其考试资格，考生在《考场记录单》上签字后立即退场，对拒不退场者将从严处理。

第六十条 考试违纪或作弊的学生所在班级取消当年申请评定优良学风班的资格。有作弊记载的学生取消免试推荐研究生资格。

第六十一条 代替他人或由他人代替参加考试的替考作弊者，按《国家教育考试违规处理办法》（中华人民共和国教育部令第 18 号）规定进行严肃处理直至开除学籍。

第 1题 选择题(每题4分,共24分)

(1) 设事件A和B满足$A\cap B=\emptyset$, 则以下论述不正确的是__________

A. 事件A和事件B互不相容　B. $P(A\cap B)=0$

C. $P(\overline{A}\cap\overline{B})=1$　D. 事件$A\cap B$和事件$A\cup B$相互独立

(2) 设X是在$[-1,1]$上均匀分布的随机变量. 对于$0<\alpha<1$, 定义下分位数x_α满足$P(X\le x_\alpha)=\alpha$, 则以下论述错误的是__________

A. $x_{\frac{1}{2}}=0$　B. $x_{\frac{3}{4}}=0.5$

C. $P(|X|>x_{\frac{3}{4}})=0.5$　D. $P(|X|>x_{\frac{1}{4}})=0.75$

(3) 设连续随机变量X有有限期望且方差大于零, 令随机变量$Y=-2X+1$, 则下面论述不正确的是 __________

A. $F_y(y)=1-F_x(-\frac{y-1}{2})$　B. $f_y(y)=\frac{1}{2}f_x(-\frac{y-1}{2})$

C. $EY=-2EX+1$　D. $\rho(X,Y)=1$

(4) 设有二维连续随机变量(X,Y), 如果X与Y相互独立, 且DX,DY,$cov(X,Y)$都存在, 则下面论述错误的是__________

A. $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$　B. X^3和Y^3相互独立

C. $D(X-Y)=DX-DY$　D. $cov(X,Y)=0$

(5) 设随机变量X的期望,方差和四阶矩EX^4都存在.对任意$a>0$, 下列不等式不成立的是__________

A. $P(|X-EX|>a)\le\frac{E(X-EX)^3}{a^3}$　B. $P(|X|>a)\le\frac{E|X|}{a}$

C. $P(|X-EX|>a)\le\frac{DX}{a^2}$　D. $|EX^3|\le\sqrt{EX^2}\sqrt{EX^4}$

(6) 设$X_1,X_2,\dots,X_n$为来自正态总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的一个样本. 记$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$, $S^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2$, 则下列各式中正确的是__________

A. $\frac{X_1-\mu}{S}\sim N(0,1)$　B. $\frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{S^2}\sim F(1,n-1)$

C. $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$　D. $\frac{(X_1+X_2-2\mu)^2}{4\sigma^2}\sim\chi^2(1)$

第 2题 填空题(每题4分,共24分)

(1) 已知抽烟者得肺癌的概率是不抽烟者得肺癌的概率的24倍;假设人群中有$\frac{1}{4}$的人抽烟，剩下$\frac{3}{4}$的人不抽烟，则一个肺癌患者是抽烟者的概率是__________;

(2) 设X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$. 已知$P(X \le -1) = P(X > 3) = \Phi(-2)$,$\Phi$为标准正态分布的分布函数, 有$\mu =$__________,$\sigma =$__________.

(3) 已知$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 其中μ,σ是常数, 计算$EX^3 =$ __________.

(4) 设X,Y服从参数为$\lambda(\lambda > 0)$的指数分布($f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \ge 0$). 如果$X,Y$互相独立, 则$Z = X+Y$的概率密度函数$f_Z(z) =$ __________

(5) 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的一个样本, 总体X服从参数为$\lambda(\lambda > 0)$的指数分布. 记$Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, 则n充分大时，Y_n的近似分布是__________.

(6) 设某种产品的长度X服从正态分布$N(\mu,0.9^2)$,其中μ是未知参数. 现抽样9件产品得到样本值$x_1,x_2,\cdots,x_9$，经计算得到样本均值$\overline{X} = 5$,样本方差$s^2 = 1.08$, 则μ的置信度为95%的置信区间是__________. 已知$z_{0.975} = 1.96, t_8(0.975) = 2.306$.

第 3题 (15分)

设二维随机变量(X,Y)的概率密度函数$f(x,y)=a(x+y)$, 其中a为常数, $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$.

(1) 确定常数a;

(2) 求边缘概率密度函数$f_X(x)$和条件概率密度函数$f_{Y|X}(y|x)$;

(3) 计算$cov(X,Y)$, 问X和Y是否相互独立.

第 4题 (15分)

设总体X是在$[0,\theta]$上的均匀分布(即概率密度函数$f(x;\theta)=1/\theta, 0\le x\le\theta$), 其中$\theta$是大于零的未知参数. 现随机抽样四次得到样本值$x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=10$;

(1) 给出θ的一个无偏矩估计量并计算矩估计值;

(2) 给出θ的极大似然估计量并计算极大似然估计值;

(3) 比较两个估计量的期望和方差，说明你偏好那个估计量并给出理由。

第 5题 (12分) **(本题学概率统计B的学生做,学概率统计A的学生不做)**

设一对夫妻结婚后的寿命分别为X,Y年. 假设X,Y互相独立,都服从参数$\lambda = 1/50$的指数分布. 记两人共同生活的年数为$Z = \min(X,Y)$, 两人婚后最长寿命为$W = \max(X,Y)$;

(1) 计算Z的概率密度函数，给出一对夫妻活到金婚的概率(即$P(Z \geq 50)$). (备注:$e^{-1} \sim 0.37, e^{-2} \sim 0.14$)

(2) 计算一对夫妻共同生活的预期年数(EZ). 然后利用$E(X+Y), EZ$, 计算EW.

第 5题 (12分) **(本题学概率统计A的学生做,学概率统计B的学生不做!)**

记随机过程$X(t) = Xt + b, 1 \leq t < +\infty$，其中$X$是标准正态分布，$b$是常数.

(1) 给出$X(t)$的所有样本函数; 计算$X(t)$的一维分布;

(2) 计算$X(t)$的均值函数,自相关函数和自协方差函数, 说明$X(t)$是否是广义平稳过程.

第 6题 (10分) **(本题学概率统计B的学生做,学概率统计A的学生不做.)**

设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,$X_1, X_2, \ldots, X_n$为来自总体X的样本. 记$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$, $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2$;

(1) 证明: 对任意常数c, $\sum_{k=1}^{n}(X_k - c)^2 = \sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2 + n(\overline{X} - c)^2$;

(2) 令$c = \mu$, 利用上一问计算ES^2;

第 6题 (10分) **(本题学概率统计A的学生做,学概率统计B的学生不做!)**

假设每天天气只有两个状态:不下雨或下雨(可分别记为$0, 1$), 可定义一个两状态的离散随机过程$X(n)$. 如果已知今天下雨, 则明天下雨概率为a, 明天不下雨概率为$1-a$; 如果已知今天不下雨, 则明天不下雨概率为b, 明天下雨概率为$1-b$, 则$X(n)$是一个离散马尔科夫链.

(1) 给出$X(n)$的状态转移示意图和一步转移概率矩阵;

(2) 假设$a = 1/3, b = 1/2$, 计算两步转移概率矩阵, 计算其平稳分布.

2020-2021(2)概率统计试题答案

2021年6月22日

A卷答案:

- **第一题 选择题（每题4分，共24分）**

  (1) C (2) D (3) D (4) C (5) A (6) B

- **第二题 填空题（每题4分，共24分）**

  (1) $\frac{8}{9}$;

  (2) $\mu = 1$,$\sigma = 1$

  (3) $EX^3 = 3\mu\sigma^2 + \mu^3$;

  (4) $f_Z(z) = \lambda^2 z e^{-\lambda z}, z \geq 0$

  (5) $Y_n \sim N(n/\lambda, n/\lambda^2)$;

  (6) $(5 - 0.588, 5 + 0.588) = (4.412, 5.588)$

B卷答案:

- **第一题 选择题（每题4分，共24分）**

  (1) D (2) D (3) C (4) A (5) B (6) C

- **第二题 填空题（每题4分，共24分）**

  (1) $\mu = 1$,$\sigma = 1$;

  (2) $f_Z(z) = \lambda^2 z e^{-\lambda z}, z \geq 0$

  (3) $\frac{8}{9}$;

  (4) $(5 - 0.588, 5 + 0.588) = (4.412, 5.588)$

  (5) $Y_n \sim N(n/\lambda, n/\lambda^2)$;

  (6) $EX^3 = 3\mu\sigma^2 + \mu^3$

- **第三题解答（本题15分）**

(1) 由概率密度函数的定义

$$1=\int_0^1\int_0^1 a(x+y)dxdy=\int_0^1 a(\frac{1}{2}+y)dy=a(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})=a$$

得到$a=1$ …… [3分];

(2)

$$f_X(x)=\int_0^1 f(x,y)dy=\int_0^1(x+y)dy=x+\frac{1}{2},0\le x\le 1$$

…… [3分];

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{x+y}{x+\frac{1}{2}},0\le y\le 1$$

…… [3分];

(3)

$$EX=\int_0^1 xf_X(x)dx=\int_0^1(x^2+\frac{1}{2}x)dx=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12},$$

由对称性，类似可得$EY=EX=\frac{7}{12}$ …… [2分];

$$EXY=\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)dxdy=\int_0^1(\frac{y}{3}+\frac{y^2}{2})dy=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

$$cov(X,Y)=EXY-EXEY=\frac{1}{3}-\frac{49}{144}=-\frac{1}{144}$$

. …… [2分]

因为X,Y的协方差不为零，说明X和Y相关，所以X与Y不独立。…… [2分]

另一解法： 直接计算$f_Y(y)=y+\frac{1}{2}$, 验证$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$, 所以X与Y不独立。

- **第四题解答（本题15分）**

(1) 先求总体矩

$$EX = \int_0^\theta x\frac{1}{\theta}dx = \frac{\theta}{2},$$

即$\theta = 2EX$. 已知样本矩$\overline{X} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^4 X_k$, 定义矩估计量

$$\hat{\theta}_1 = 2\overline{X},$$

显然$E\hat{\theta}_1 = 2E\overline{X} = \theta$, $\hat{\theta}_1$是无偏矩估计. ...... [3分];
带入样本值得到$\hat{\theta}_1 = 2*(1+2+3+10)/4 = 8$ ...... [2分];

(2) 令似然函数

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4, \theta) = \frac{1}{\theta^4}, 0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 \le \theta,$$

L是关于θ的单调减函数，θ的最小可取值是所有样本值的最大值，可定义极大似然估计量为

$$\hat{\theta}_2 = \max(X_1, X_2, X_3, X_4),$$

当$\theta = \hat{\theta}_2$时似然函数取到最大值. ...... [3分];
带入样本值得到$\hat{\theta}_2 = \max(1, 2, 3, 10) = 10$ ...... [2分];

(3) 对于矩估计量$\hat{\theta}_1$, 计算有$E\hat{\theta}_1 = \theta$, $D\hat{\theta}_1 = 4D\overline{X} = 1/12\theta^2$; ...... [2分]
记极大似然估计量$\hat{\theta}_2 = Z$，容易得到概率分布函数为

$$F_Z(z) = (F_X(z))^4 = z^4/\theta^4, f(z) = 4z^3/\theta^4, 0 \le z \le \theta$$

计算有$EZ = \frac{4}{5}\theta$,$EZ^2 = \frac{2}{3}\theta^2$,$DZ = \frac{2}{75}\theta^2$...... [2分]
一个选择：选择极大似然估计量$\hat{\theta}_2$; 虽然极大似然估计不是无偏估计，但是方差比矩估计的方差小很多; 另外θ是区间的右边界，但是$\hat{\theta}_1 = 8 < 10 = x_4$, 所以矩估计不合理. 应该选$\hat{\theta}_2$...... [1分]
另外一个选择：选择矩估计量$\hat{\theta}_1$; 因为$\hat{\theta}_1$是无偏估计, $x_4 = 10$可能是抽样异常, 应该选$\hat{\theta}_1$.
其他选择只要理由合理都给分！！！

- **概率统计B 第五题解答（本题12分）**

  (1) $Z = \min(X,Y)$,X和Y相互独立且服从相同的指数分布.
  $F(z) = P(Z \le z) = 1 - P(Z > z) = 1 - P(X > z)P(Y > z) = 1 - e^{-2\lambda x}$
  $f_Z(z) = 2\lambda e^{-2\lambda x} = \frac{1}{25} e^{-\frac{x}{25}}, z \ge 0$ ...... [3分];
  计算$P(Z \ge 50) = 1 - F(50) == e^{-2} \sim 0.14$, ... [3分];

  (2) 已知参数为λ的指数分布的期望是$1/\lambda$(或直接计算$EX = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$)，从上一问可知$Z$是参数为$1/25$的指数分布, 有$EZ = 1/(1/25) = 25$.. ..... [3分];
  同样有$EX = EY = 50$, 注意到$X + Y = \max(X,Y) + \min(X,Y) = W + Z$, 利用期望的线性$E(W + Z) = E(X + Y) = EX + EY = 100$, 可得$EW = 75$. ...... [3分]
  备注: 也可以写出W的概率密度公式，直接计算期望.

- **概率统计B 第六题解答（本题10分）**

  (1)
  $$\sum_{k=1}^{n}(X_k - c)^2 = \sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X} + \overline{X} - c)^2$$
  $$= \sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2 + 2\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})(\overline{X} - c) + \sum_{k=1}^{n}(\overline{X} - c)^2$$
  $$= \sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2 + 2(\sum_{k=1}^{n} X_k - n\overline{X})(\overline{X} - c) + n(\overline{X} - c)^2$$
  上面第二项为零，等式得证. ...... [5分]
  备注: 也可以等式两边展开，化简可得.

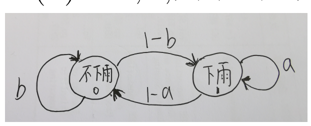
  (2) 取$c = \mu$, 两边同时求期望($DX_k = \sigma^2, D\overline{X} = \sigma^2/n$)
  $$\sum_{k=1}^{n} E(X_k - \mu)^2 = E\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2 + nE(\overline{X} - \mu)^2$$
  $$n\sigma^2 = (n-1)E(\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2) + n\frac{\sigma^2}{n}$$
  有$n\sigma^2 = (n-1)ES^2 + \sigma^2$，$ES^2 = \sigma^2$. ...... [5分]

- **概率统计A 第五题解答（本题12分）**

  (1) 任意$\omega_0 \in \Omega$, $X(\omega_0) = x_0 \in R$, 样本函数$X(t) = x_0 t + b$是一条直线; . . . . . . [3分];
  任意$t = t_0, X(t_0) = t_0 X + b$是一个正态分布，服从$N(b, t_0^2)$。. . . . . . [3分];

  (2) $EX(t) = tEX + b = b$,
  $R(t_1, t_2) = E(X(t_1)X(t_2)) = E(Xt_1+b)(Xt_2+b) = t_1 t_2 EX^2 + (t_1+t_2)EX + b^2 = t_1 t_2 + b^2$, ... [3分];
  $Cov(X(t_1), X(t_2)) = R(t_1, t_2) - EX(t_1)EX(t_2) = t_1 t_2 + b^2 - b^2 = t_1 t_2$
  $X(t)$不是广义平稳过程,因为自相关函数不是仅依赖与参数间距$\tau = t_2 - t_1$的函数。. . . . . . [3分];

- **概率统计A 第六题解答（本题10分）**

  (1) $X(n) = 0, 1$,其中1表示下雨; 0表示不下雨;
  

  . . . . . . [2分]
  一步转移矩阵 $P = \begin{bmatrix} b & 1-b \\ 1-a & a \end{bmatrix}$ . . . . . . [3分]

  (2) 带入有
  $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, P^2 = \begin{bmatrix} \frac{7}{12} & \frac{5}{12} \\ \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$, ... [2分]
  平稳分布满足$(p_0, p_1) = (p_0, p_1) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$
  解方程
  $$\begin{aligned} p_0 &= p_0 \frac{1}{2} + p_1 \frac{2}{3} \\ p_1 &= p_0 \frac{1}{2} + p_1 \frac{1}{3} \end{aligned}$$
  注意$p_0 + p_1 = 1$, 得到$p_0 = \frac{4}{7}, p_1 = \frac{3}{7}$ . . . . . . [3分]
  注意：如果学生定义$X(n) = 0$表示下雨; $X(n) = 1$表示不下雨, 则上面答案中矩阵元素位置有不同