Laboratorio Nº3

Convolución y respuesta en el tiempo

Martín Josemaría Vuelta Rojas

Problema 1

Sean

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) - \delta(n-3)$$

y

$$h(n) = 2\delta(n+1) + 2\delta(n-1).$$

Calcule y haga la gráfica (usar el comando `stem`) de cada una de las siguientes convoluciones:

a) $y_1(n) = x(n) * h(n)$

b) $y_2(n) = x(n+2) * h(n)$

c) $y_3(n) = x(n) * h(n+2)$

Solución

Script 1 Función impulso unitario

```
function f = impulso(x,y,z)
    switch (nargin)
        case 1, f = 1.*(x>-eps)-1.*(x>eps);
        case 2, f = 1.*(x>(y-eps))-1.*(x>(y+eps));
        case 3, f = z.*(x>(y-eps))-z.*(x>(y+eps));
        otherwise
            fprintf('Error: Revise lor argumentos de entrada')
    end
end
```

Script 2 Función $x(n)$

```
function f = p1_X( n )
    f = impulso(n) + 2*impulso(n-1) - impulso(n-3);
end
```

Script 3 Función $h(n)$

```
function f = p1_H( n )
    f = 2*impulso(n+1) + 2*impulso(n-1);
end
```

Script 4 Convoluciones $x(n) * h(n)$, $x(n+2) * h(n)$ y $x(n) * h(n+2)$ en MATLAB

```
n = -5:1:5;

y1 = conv(p1_X(n), p1_H(n));
y2 = conv(p1_X(n + 2), p1_H(n));
y3 = conv(p1_X(n), p1_H(n + 2));

fprintf('x(n)*h(n)   : '); disp(y1)
fprintf('x(n+2)*h(n): '); disp(y2)
fprintf('x(n)*h(n+2): '); disp(y3)
```

Script 5 Resultados de ejecutar el *script* 4

```
>> problema01
x(n)*h(n)   :  0   0   0   0   0   0   0   0   0   2   4   2   2   0  -2   0   0   0   0   0   0
x(n+2)*h(n):  0   0   0   0   0   0   0   2   4   2   2   0  -2   0   0   0   0   0   0   0   0
x(n)*h(n+2):  0   0   0   0   0   0   0   2   4   2   2   0  -2   0   0   0   0   0   0   0   0
```

Figura 1 Gráfico de la función impulso unitario del *script* 1.

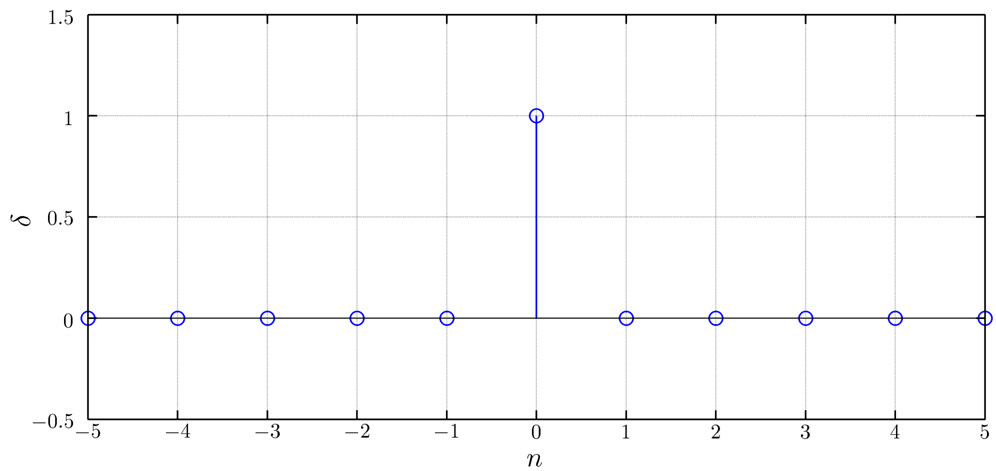


Figura 2 Gráfico de la función $x(n)$ del *script* 2.

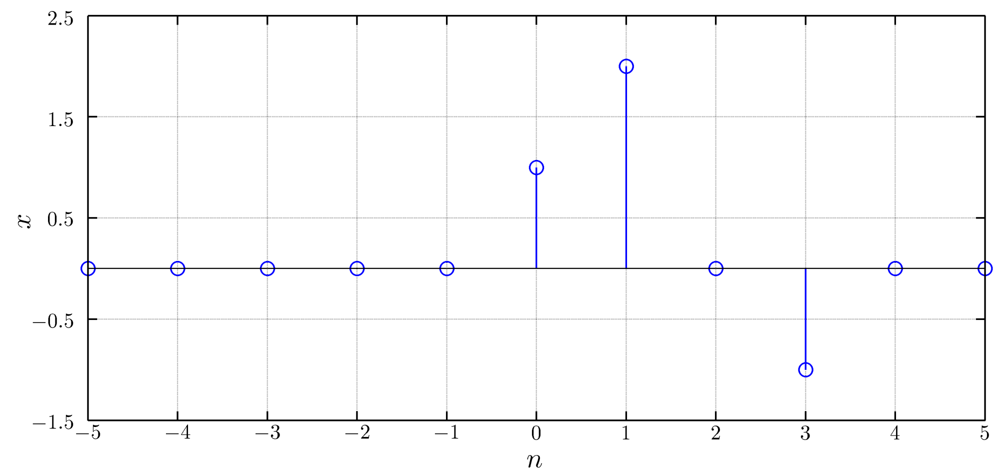


Figura 3 Gráfico de la función $h\,(n)$ del *script* 3.

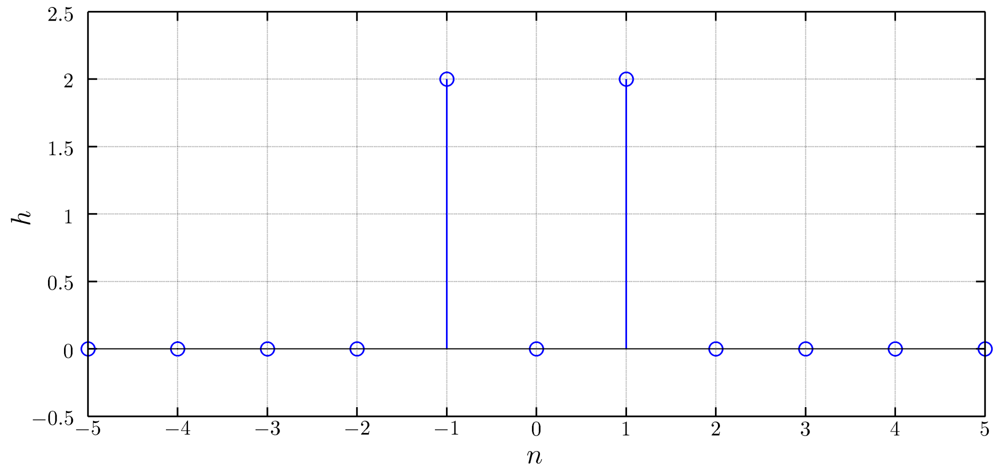


Figura 4 Gráfico de la función $y_1\,(n) = x\,(n) * h\,(n)$ calculada *script* 4.

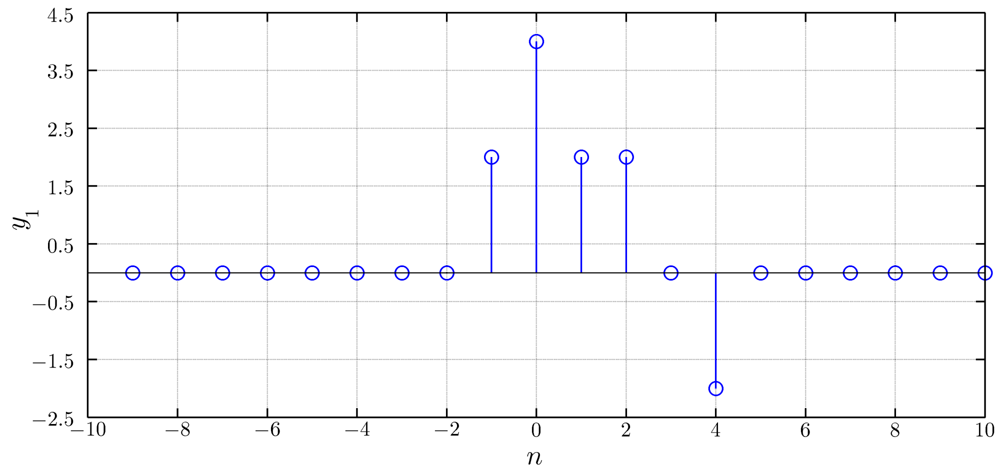


Figura 5 Gráfico de la función $y_2\,(n) = x\,(n+2) * h\,(n)$ calculada *script* 4.

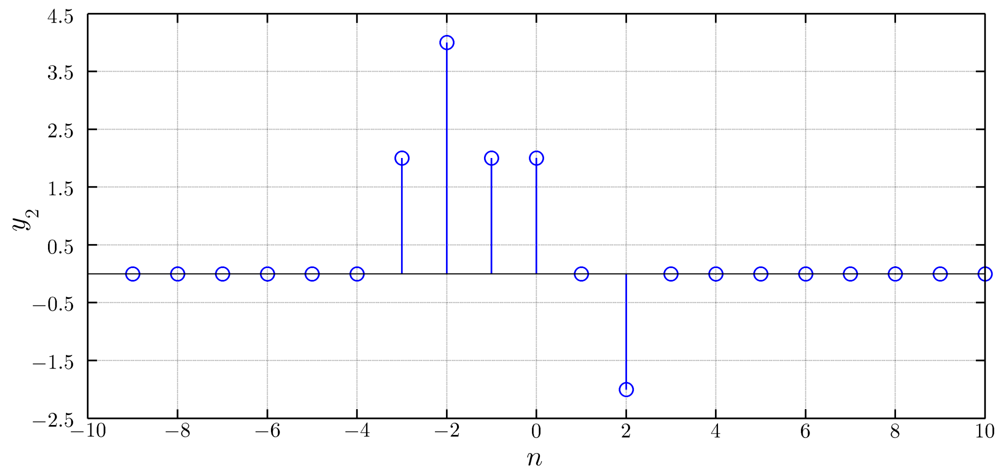
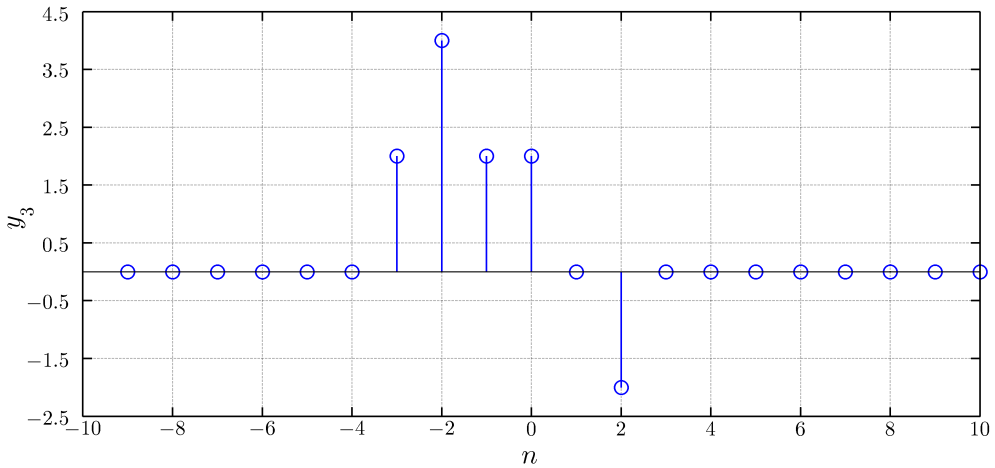


Figura 6 Gráfico de la función $y_3(n) = x(n) * h(n+2)$ calculada *script* 4.



De forma analítica, obtenemos las convoluciones solicitadas empleando la definición:

$$y(m) = x(n) * h(n) = \sum_n x(n)\, h(m-n)$$

Así obtenemos

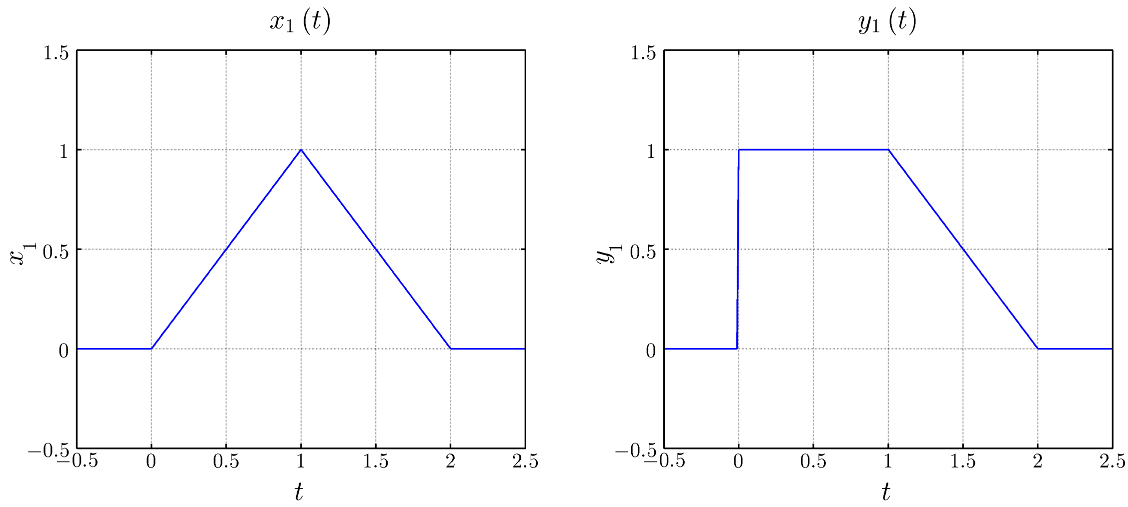
$$\begin{aligned} y_1(m) &= x(n) * h(n) \\ &= \sum_n \left[\delta(n) + 2\delta(n-1) - \delta(n-3)\right]\left[2\delta(m-n+1) + 2\delta(m-n-1)\right] \\ &= 2\delta(m+1) + 4\delta(m) + 2\delta(m-1) + 2\delta(m-2) - 2\delta(m-4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2(m) &= x(n+2) * h(n) \\ &= \sum_n \left[\delta(n+2) + 2\delta(n+1) - \delta(n-1)\right]\left[2\delta(m-n+1) + 2\delta(m-n-1)\right] \\ &= 2\delta(m+3) + 4\delta(m+2) + 2\delta(m+1) + 2\delta(m) - 2\delta(m-2) \end{aligned}$$

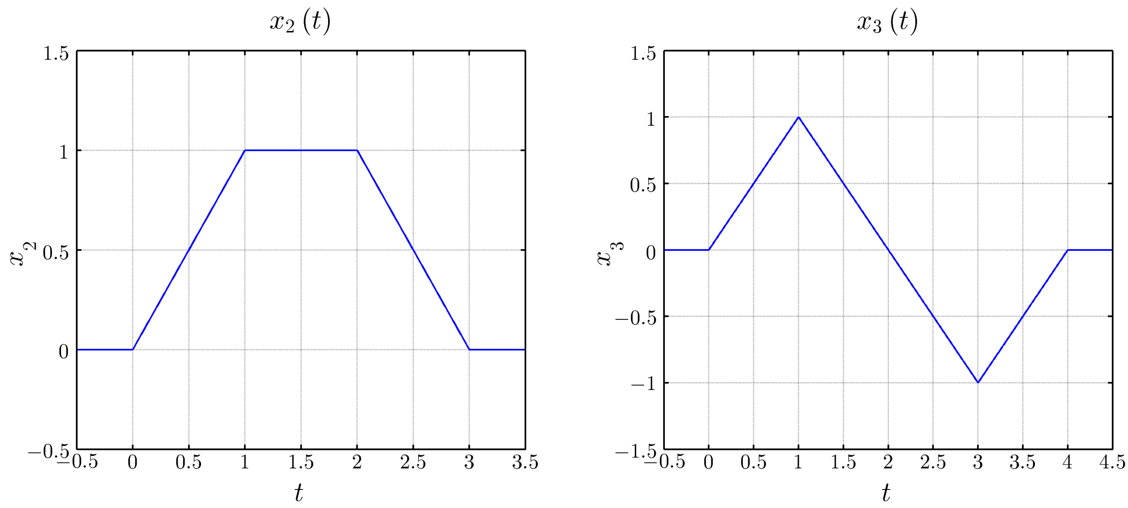
$$\begin{aligned} y_3(n) &= x(n) * h(n+2) \\ &= \sum_n \left[\delta(n) + 2\delta(n-1) - \delta(n-3)\right]\left[2\delta(m-n+3) + 2\delta(m-n+1)\right] \\ &= 2\delta(m+3) + 4\delta(m+2) + 2\delta(m+1) + 2\delta(m) - 2\delta(m-2) \end{aligned}$$

Problema 2

Considere un sistema LIT cuya respuesta a la señal $x_1(t)$ es $y_1(t)$



Hallar las respuestas del sistema anterior a las siguientes excitaciones:



Solución

Las funciones $x_2(t)$ y $x_3(t)$ se pueden representar en función de $x_1(t)$ como

$$x_2(t) = x_1(t) + x_1(t-1)$$

y

$$x_3(t) = x_1(t) - x_1(t-2) .$$

De forma que si consideramos la función de transferencia del sistema como $h(t)$ y

$$y_1(t) = x_1(t) * h(t) ,$$

entonces

$$y_2(t) = x_1(t) * h(t) + x_1(t-1) * h(t) = y_1(t) + y_1(t-1)$$

y

$$y_3(t) = x_1(t) * h(t) - x_1(t-2) * h(t) = y_1(t) - y_1(t-2).$$

Con estas observaciones escribimos las soluciones a este problema en MATLAB

Script 6 Función $x_1(t)$

```
function f = p2_X1( t )
    switch( nargin )
        case 1, f = (t.*(1 >= t & t >= 0 ) + ...
                    (2-t).*(2 >= t & t > 1 )).*(2 >= t & t >= 0 );
        otherwise, fprintf('Revise los argumentos de entrada\n')
end
```

Script 7 Función $y_1(t)$

```
function f = p2_Y1( t )
    switch( nargin )
        case 1, f = (1.*(1 >= t & t >= 0 ) + ...
                    (2-t).*(2 >= t & t > 1 )).*(2 >= t & t >= 0 );
        otherwise, printf('Revise los argumentos de entrada\n')
end
```

Script 8 Función $x_2(t)$

```
function f = p2_X2( t )
    f = p2_X1( t ) + p2_X1( t-1 );
end
```

Script 9 Función $y_2(t)$

```
function f = p2_Y2( t )
    f = p2_Y1(t) + p2_Y1(t-1);
end
```

Script 10 Función $x_3(t)$

```
function f = p2_X3( t )
    f = p2_X1( t ) - p2_X1( t-2 );
end
```

Script 11 Función $y_3(t)$

```
function f = p2_Y3( t )
    f = p2_Y1(t) - p2_Y1(t-2);
end
```

Figura 7 Función $x_2(t)$ y respuesta $y_2(t)$ empleando los *scripts* 8 y 9.

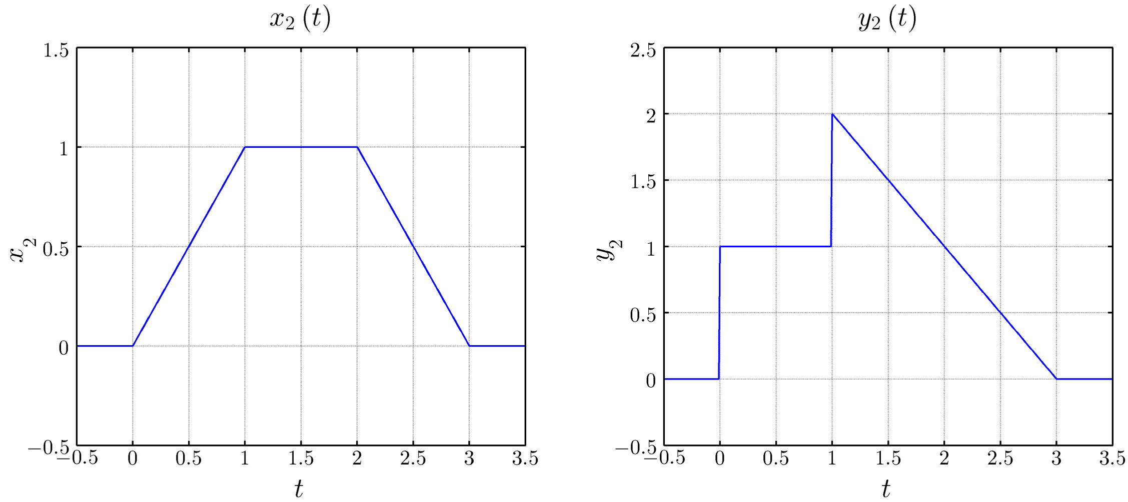
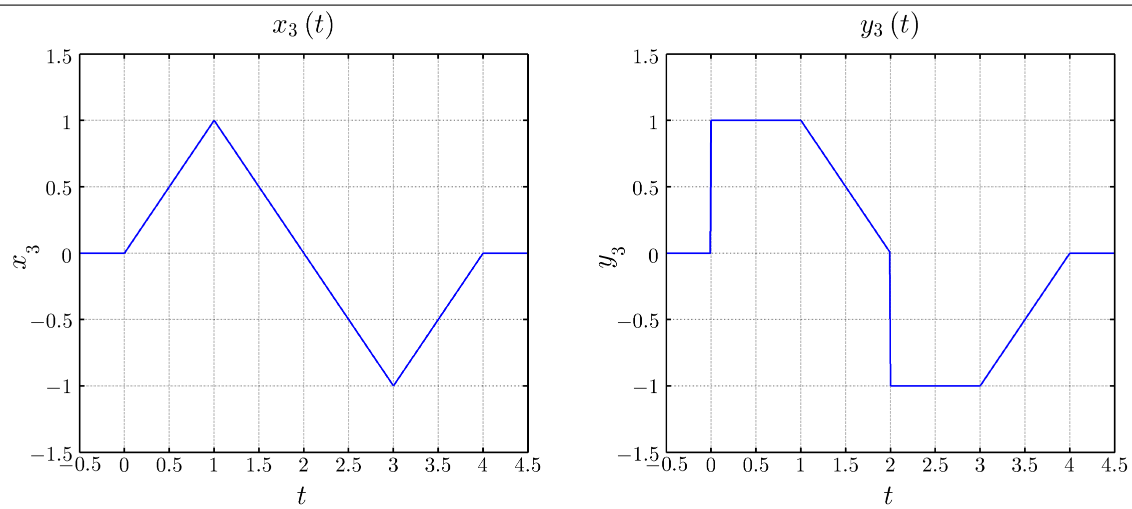


Figura 8 Función $x_3(t)$ y respuesta $y_3(t)$ empleando los *scripts* 10 y 11.



Problema 3

Calcular la convolución entre los siguientes pares de señales:

a) $x\left(n\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u\left(n-4\right)$ y $h\left(n\right)=4^{n}u\left(2-n\right)$

b) $x\left(n\right)=u\left(-n\right)-u\left(-n-2\right)$ y $h\left(n\right)=u\left(n-1\right)-u\left(n-4\right)$

c) $x\left(n\right)=u\left(n\right)$ y $h\left(n\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}u\left(-n\right)$

d) $x\left(t\right)=\exp\left(-at\right)u(t)$ y $h(t)=exp(-at)u(t)$

Donde $u\left(n\right)$ es la función escalón unitario.

Solución

a) $x\left(n\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u\left(n-4\right)$ y $h\left(n\right)=4^{n}u\left(2-n\right)$

$$
\begin{aligned}
y\left(m\right) &= x\left(n\right)*h\left(n\right)\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}x\left(n\right)h\left(m-n\right)\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u\left(n-4\right)4^{m-n}u\left(2-m+n\right)\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}2^{2m-3n}u\left(n-4\right)u\left(n+2-m\right)
\end{aligned}
$$

Cuando $m<6$:

$$
\begin{aligned}
y\left(m\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}2^{2m-3n}u\left(n-4\right)u\left(n+2-m\right)\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}2^{2m-3n}u\left(n-4\right)\\
&= \sum_{n=4}^{\infty}2^{2m-3n}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}2^{2m-3(n+4)}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}2^{2m-3n-12}\\
&= 2^{2m-12}\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{-3}\right)^{n}\\
&= 2^{2m-12}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^{n}\\
&= 2^{2m-12}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{8}}\right)\\
&= \frac{2^{2m-9}}{7}
\end{aligned}
$$

Cuando $m \geq 6$:

$$
\begin{aligned}
y(m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{2m-3n} u(n-4)\, u(n+2-m) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{2m-3n} u(n+2-m) \\
&= \sum_{n=m-2}^{\infty} 2^{2m-3n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2m-3(n+m-2)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{6-m-3n} \\
&= 2^{6-m} \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{-3}\right)^n \\
&= 2^{6-m} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n \\
&= 2^{6-m} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{8}}\right) \\
&= \frac{2^{9-m}}{7}
\end{aligned}
$$

Finalmente

$$
y(m) = \begin{cases} \dfrac{2^{2m-9}}{7} & ; \quad n < 6 \\ \dfrac{2^{9-m}}{7} & ; \quad n \geq 6 \end{cases}
$$

b) $x(n) = u(-n) - u(-n-2)$ y $h(n) = u(n-1) - u(n-4)$

$$
\begin{aligned}
y(m) &= x(n) * h(n) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, h(m-n) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[u(-n) - u(-n-2)\right]\left[u(m-n-1) - u(m-n-4)\right] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(-n)\, u(m-n-1) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(-n-2)\, u(m-n-1) - \\
&\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(-n)\, u(m-n-4) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(-n-2)\, u(m-n-4)
\end{aligned}
$$

Cuando $m < 0$:

$$\begin{aligned} y\left(m\right) &= \sum_{n=-\infty}^{m-1} 1 - \sum_{n=-\infty}^{m-1} 1 - \sum_{n=-\infty}^{m-4} 1 + \sum_{n=-\infty}^{m-4} 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Cuando $m = 0$:

$$\begin{aligned} y\left(m\right) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} 1 - \sum_{n=-\infty}^{-2} 1 - \sum_{n=-\infty}^{-3} 1 + \sum_{n=-\infty}^{-3} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Cuando $0 < m \wedge m < 3$:

$$\begin{aligned} y\left(m\right) &= \sum_{n=-\infty}^{0} 1 - \sum_{n=-\infty}^{-2} 1 - \sum_{n=-\infty}^{-2} 1 + \sum_{n=-\infty}^{-2} 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Cuando $m = 3$:

$$\begin{aligned} y\left(m\right) &= \sum_{n=-\infty}^{0} 1 - \sum_{n=-\infty}^{-2} 1 - \sum_{n=-\infty}^{-1} 1 + \sum_{n=-\infty}^{-2} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Cuando $m > 3$:

$$\begin{aligned} y\left(m\right) &= \sum_{n=-\infty}^{0} 1 - \sum_{n=-\infty}^{-1} 1 - \sum_{n=-\infty}^{0} 1 + \sum_{n=-\infty}^{-1} 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Finalmente

$$y\left(m\right) = \begin{cases} 0 \quad ; \quad m < 0 \vee 3 < m \\ 1 \quad ; \quad m = 0 \vee m = 3 \\ 2 \quad ; \quad 0 < m \wedge m < 3 \end{cases}$$

c) $x(n) = u(n)$ y $h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u(-n)$

$$\begin{aligned}
y(m) &= x(n) * h(n) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, h(m-n) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} u(n-m) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} u(n)\, u(n-m)
\end{aligned}$$

Cuando $m < 0$:

$$\begin{aligned}
y(m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} u(n)\, u(n-m) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} \\
&= 2^m \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \\
&= 2^{1+m}
\end{aligned}$$

Cuando $0 \leq m$:

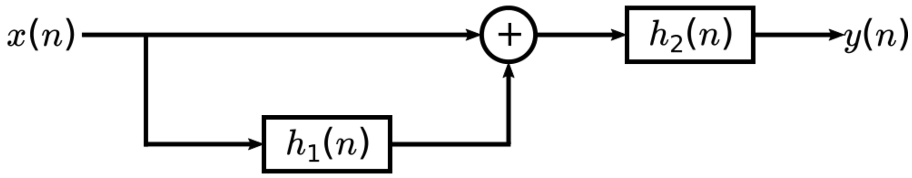
$$\begin{aligned}
y(m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} u(n)\, u(n-m) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} \\
&= 2^m \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \\
&= 2^{1+m}
\end{aligned}$$

d) $x(t) = \exp(-at)\, u(t)$ y $h(t) = \exp(-at)\, u(t)$

$$\begin{aligned}
y(\tau) &= x(t) * h(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, h(\tau - t)\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-at)\, u(t) \exp(-a\tau + at)\, u(t-\tau) dt \\
&= \int_{0}^{\tau} \exp(-a\tau)\, dt \\
&= \exp(-a\tau)\, \tau
\end{aligned}$$

Problema 4

Para el diagrama de bloques mostrado



Donde

$$h_1(n) = \beta\delta(n-1)$$

y

$$h_2(n) = \exp(\alpha)\,\delta(n)$$

a) Escribir la ecuación en diferencias que relaciona la entrada con la salida

b) Hallar α y β, de tal forma que la salida sea el promedio entre la entrada en el instante n y la entrada en el instante $n-1$.

Solución

a) La ecuación en diferencias se obtiene de calcular

$$y(n) = [(x + x * h_1) * h_2](n)$$

Resolviendo $[x * h_1](n)$, tenemos

$$\begin{aligned} y_1(n) &= x(m) * h_1(m) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\,h_1(n-m) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\,\beta\delta(n-m-1) \\ &= \beta x(n-1) \end{aligned}$$

Haciendo $y_2(n) = y_1(n) + x(n)$, calculamos $[y_2 * h_2](n)$ como

$$\begin{aligned} y(n) &= y_2(m) * h_2(m) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_2(m)h_2(n-m) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [y_1(m) + x(m)] \exp(\alpha)\,\delta(n-m) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\beta x(m-1) + x(m)] \exp(\alpha)\,\delta(n-m) \\ &= [\beta x(n-1) + x(n)] \exp(\alpha) \end{aligned}$$

De modo que la ecuación en diferencias del sistema queda expresada como

$$y(n) = [\beta x(n-1) + x(n)] \exp(\alpha)$$

b) Para que la señal de salida sea igual al promedio de los valores de la señal de entrada en el instante n y en el instante $n-1$ se debe resolver el sistema

$$\begin{cases} \exp(\alpha) & = & \dfrac{1}{2} \\ \exp(\alpha)\,\beta & = & \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{1}$$

De donde resulta

$$\alpha = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \wedge \beta = 1$$

Problema 5

Dada la siguiente ecuación en diferencias

$$y(n) = -ay(n-1) + bx(n) + cx(n-1),$$

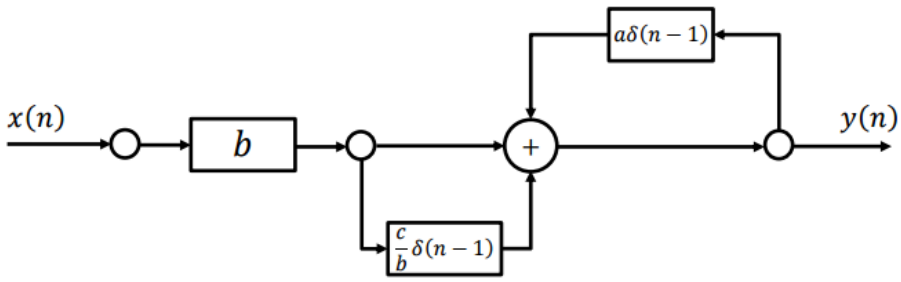
realizar una representación en diagrama de bloques.

Solución

Expresando la ecuación en diferencias como:

$$y(n) = -ay(n) * \delta(n-1) + bx(n) * \delta(n) + cx(n-1) * \delta(n-1)$$

De modo que el diagrama de bloques resultante es



Problema 6

Realizar en MATLAB la convolución del siguiente par de señales:

1. $x(n) = (-1)^n (u(n) - u(-n-8))$
2. $h(n) = u(n) - u(n-8)$

Graficar la señal resultante, $y(n) = x(n) * h(n)$. Usar el comando `stem`.

Solución

xpresamos las funciones x y h en términos de la función escalón unitario u.

Script 12 Función escalón unitario

```
function f = escalon(x,y,z)
    switch (nargin)
        case 1, f = 1.*(x>=0);
        case 2, f = 1.*(x>=y);
        case 3, f = z.*(x>=y);
        otherwise
            fprintf('Error: Revise los argumentos de entrada')
end
```

Script 13 Función $x(n)$

```
function f = p6_X( n )
    f = ((-1).^n).*(escalon(n)-escalon(-n-8));
end
```

Script 14 Función $h(n)$

```
function f = p3_H( n )
    f = escalon(n)-escalon(n-8);
end
```

Figura 9 Gráfico de la función $x(n)$ del *script 13*.

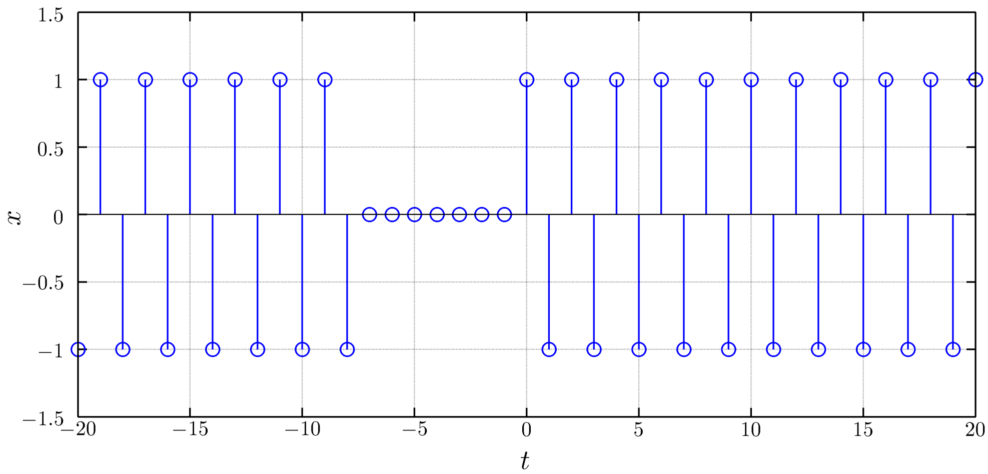
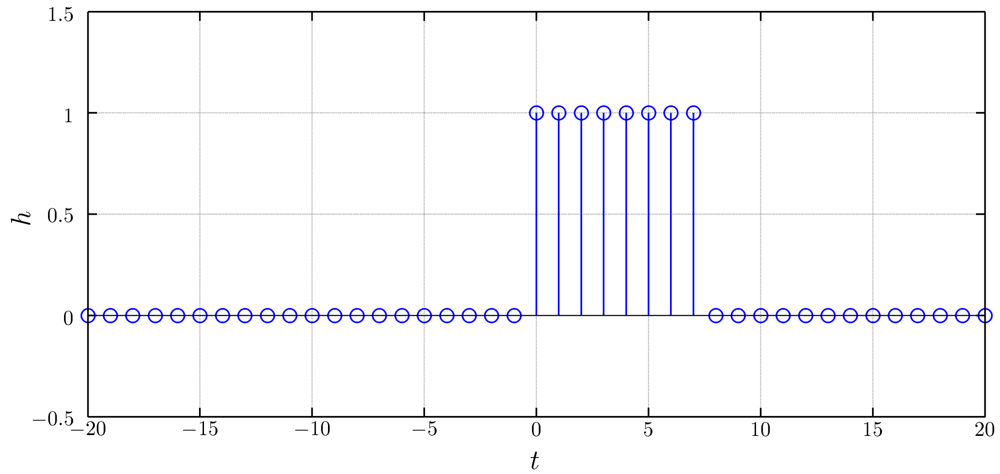


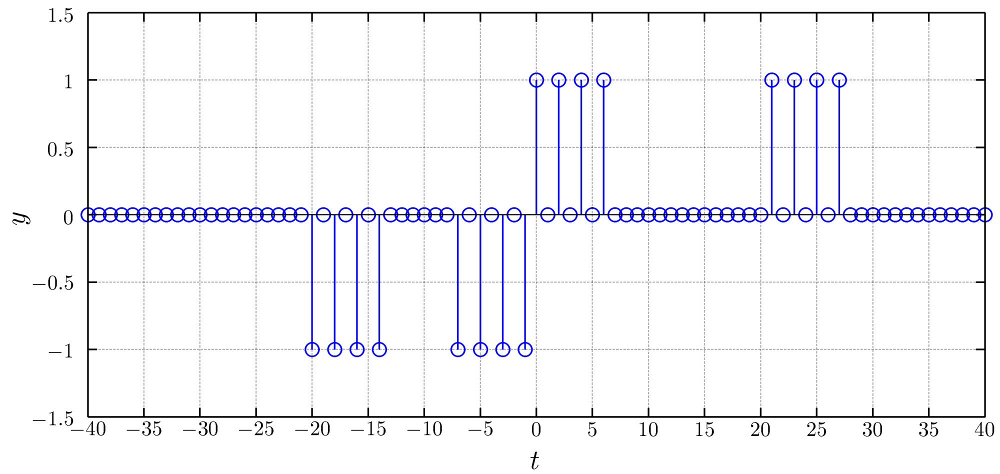
Figura 10 Gráfico de la función $x(n)$ del *script 14*.



Script 15 Convlución de las señales $x(n)$ y $h(n)$

```
n = -20:1:20;
X = p6_X(n);
H = p6_H(n);
Y = conv(X,H);
stem(-40:1:40,Y)
```

Figura 11 Gráfico de la función $y(n) = x(n) * h(n)$ del *script 15*.



Problema 7

Considere un sistema lineal e invariante en el tiempo, causal, cuya entrada $x(n)$ y salida $y(n)$ estén relacionadas por la ecuación de diferencias:

$$y(n) = 0{,}25y(n-1) + x(n)$$

Determine $y(n)$ si $x(n) = \delta(n-1)$.
Grafique en MATLAB la salida $y(n)$, use el comando `stem`.

Solución

Para $n = 1$ tenemos

$$\begin{aligned} y(1) &= 0{,}25y(0) + x(1) \\ &= 0{,}25y(0) + \delta(0) \\ &= 0{,}25y(0) + 1 \end{aligned}$$

Suponiendo que la señal $y(n)$ es nula antes antes de $n = 1$ tenemos

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y(1) &= 1 \end{aligned}$$

Con estos valores en la definición de $y(n)$ obtenemos que

$$y(n) = \frac{1}{4^{n-1}} u(n-1)$$

La implementación y la gráfica que se obtienen de MATLAB se muestran en el *script 16* y la *script 12* respectivamente.

Script 16 Función $y(n)$

```
function f = p7_Y( n )
    f = ((0.25).^(n-1)).*escalon(n-1);
end
```

Figura 12 Gráfico de la función $y(n)$ calculada *figura 16*.