

Transformada de Fourier y filtros

Martín Josemaría Vuelta Rojas

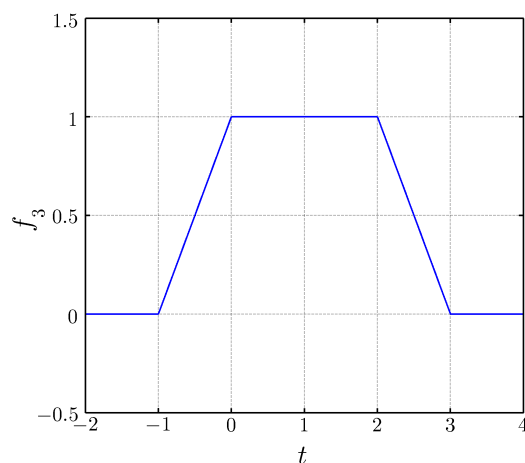
Problema 1

Graficar en MATLAB las señales a y b, y hallar la transformada de Fourier en forma analítica (usar propiedades):

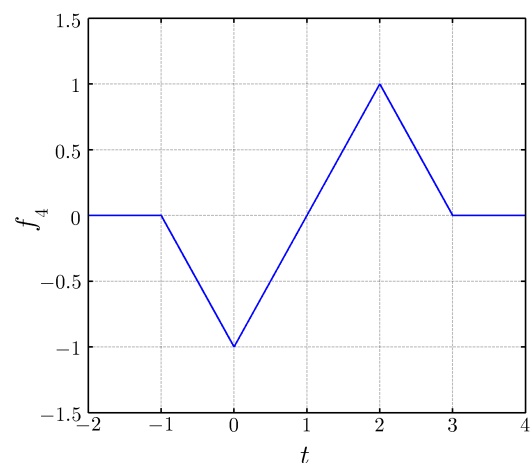
a) $f_1(t) = G\left(\frac{t}{2}\right) - G(t)$

b) $f_2(t) = 5G(t-1) - G(t+1)$

c) $f_3(t)$



d) $f_4(t)$



Nota: G es la función compuerta unitaria.

Solución

Definimos la función compuerta unitaria, G , empleando la función Θ de Heaviside de la siguiente manera

$$G(t) = \Theta\left(t + \frac{1}{2}\right) - \Theta\left(t - \frac{1}{2}\right).$$

Empleando la función G podemos definir la función triángulo, Λ , como

$$\Lambda(t) = (1 - 2|t|)G(t)$$

Con estas dos funciones definimos las funciones f_3 y f_4 como

$$f_3(t) = \Lambda\left(\frac{1}{2}t\right) + \Lambda\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right) + \Lambda\left(\frac{1}{2}t + 1\right),$$

$$f_4(t) = -\Lambda\left(\frac{1}{2}t\right) + \Lambda\left(\frac{1}{2}t + 1\right).$$

Empleando la transformada de Fourier definida por

$$\mathcal{F}(f, t|\omega) = \widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt$$

y que

$$\widehat{G}(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

$$\widehat{\Lambda}(\omega) = \frac{1}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{4}\right),$$

tenemos

a) $\widehat{f}_1(\omega)$

$$\begin{aligned}\widehat{f}_1(\omega) &= \mathcal{F}\left(G, \frac{t}{2} \middle| \omega\right) - \mathcal{F}(G, t|\omega) \\ &= 2\mathcal{F}(G, t|2\omega) - \mathcal{F}(G, t|\omega) \\ &= 2\text{sinc}(\omega) - \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)\end{aligned}$$

b) $\widehat{f}_2(\omega)$

$$\begin{aligned}\widehat{f}_2(\omega) &= 5\mathcal{F}(G, t-1|\omega) - \mathcal{F}(G, t+1|\omega) \\ &= 5\exp(-i\omega)\mathcal{F}(G, t|\omega) - \exp(i\omega)\mathcal{F}(G, t|\omega) \\ &= 2\text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)(2\cos(\omega) - 3i\sin(\omega))\end{aligned}$$

c) $\widehat{f}_3(\omega)$

$$\begin{aligned}\widehat{f}_3(\omega) &= \mathcal{F}\left(\Lambda, \frac{t}{2} \middle| \omega\right) + \mathcal{F}\left(\Lambda, \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \middle| \omega\right) + \mathcal{F}\left(\Lambda, \frac{t}{2} + 1 \middle| \omega\right) \\ &= 2\mathcal{F}(\Lambda, t|2\omega) + 2\exp(i\omega)\mathcal{F}(\Lambda, t|2\omega) + 2\exp(2i\omega)\mathcal{F}(\Lambda, t|2\omega) \\ &= \text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \exp(i\omega)\text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \exp(2i\omega)\text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= (1 + 2\cos(\omega))\exp(i\omega)\text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\end{aligned}$$

d) $\widehat{f}_4(\omega)$

$$\begin{aligned}\widehat{f}_4(\omega) &= -\mathcal{F}\left(\Lambda, \frac{t}{2} \middle| \omega\right) + \mathcal{F}\left(\Lambda, \frac{t}{2} + 1 \middle| \omega\right) \\ &= -2\mathcal{F}(\Lambda, t|2\omega) + 2\exp(2i\omega)\mathcal{F}(\Lambda, t|2\omega) \\ &= -\text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \exp(2i\omega)\text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= (\exp(2i\omega) - 1)\text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\end{aligned}$$

En MATLAB implementamos las funciones

Script 1 Función compuerta unitaria, $G(t)$.

```
function f = gate(t)
    f = heaviside(t+1/2)-heaviside(t-1/2);
end
```

Script 2 Función triángulo, $\Lambda(t)$.

```
function f = triangle(t)
    f = gate(t).*(1-2*abs(t));
end
```

Script 3 Función $f_1(t)$.

```
function f = p1_f1(t)
    f = gate(0.5*t) + gate(t);
end
```

Script 4 Función $f_2(t)$.

```
function f = p1_f2(t)
    f = 5*gate(t - 1) - gate(t + 1);
end
```

Script 5 Función $f_3(t)$.

```
function f = p1_f3(t)
    f = triangle(0.5*t)+triangle(0.5*(t-1))+triangle(0.5*(t-2));
end
```

Script 6 Función $f_4(t)$.

```
function f = p1_f4(t)
    f = -triangle(0.5*t)+triangle(0.5*(t-2));
end
```

Figura 1 Gráfico de la función f_1 y su espectro de potencia normalizado.

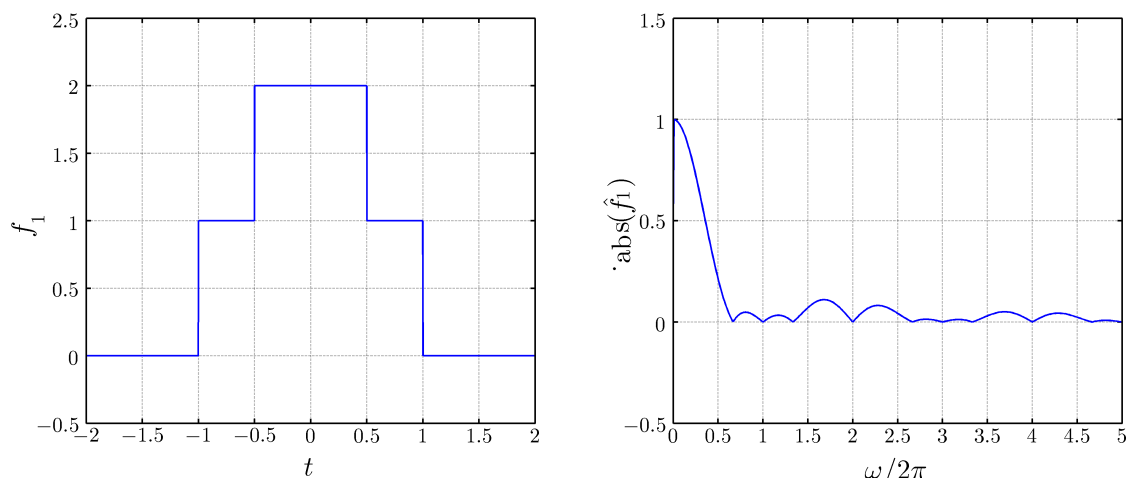


Figura 2 Gráfico de la función f_2 y su espectro de potencia normalizado.

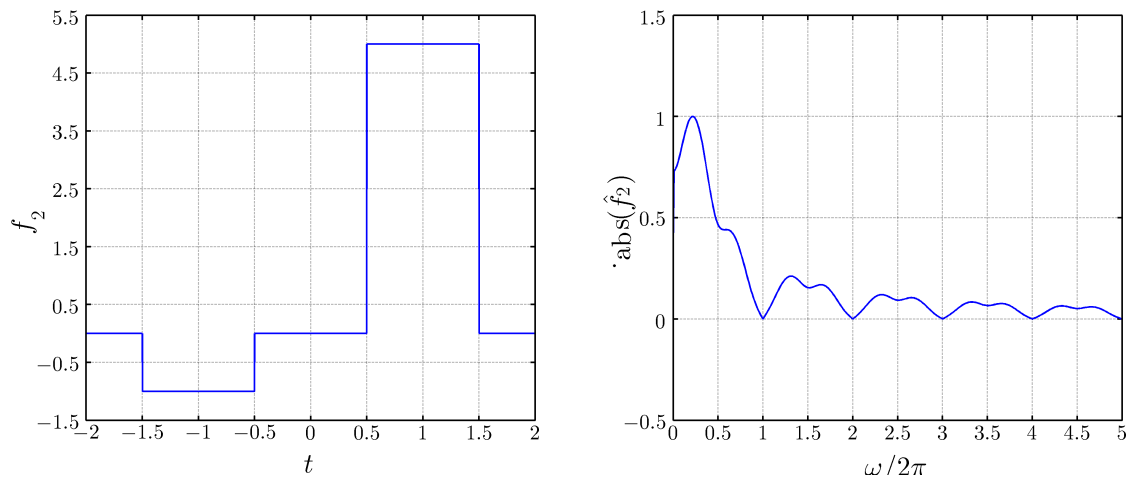


Figura 3 Gráfico de la función f_3 y su espectro de potencia normalizado.

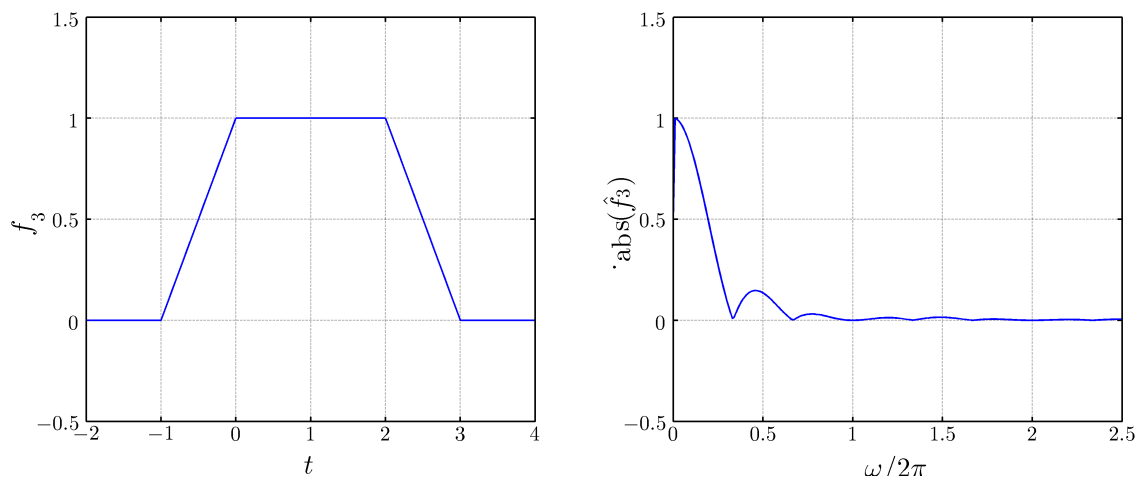
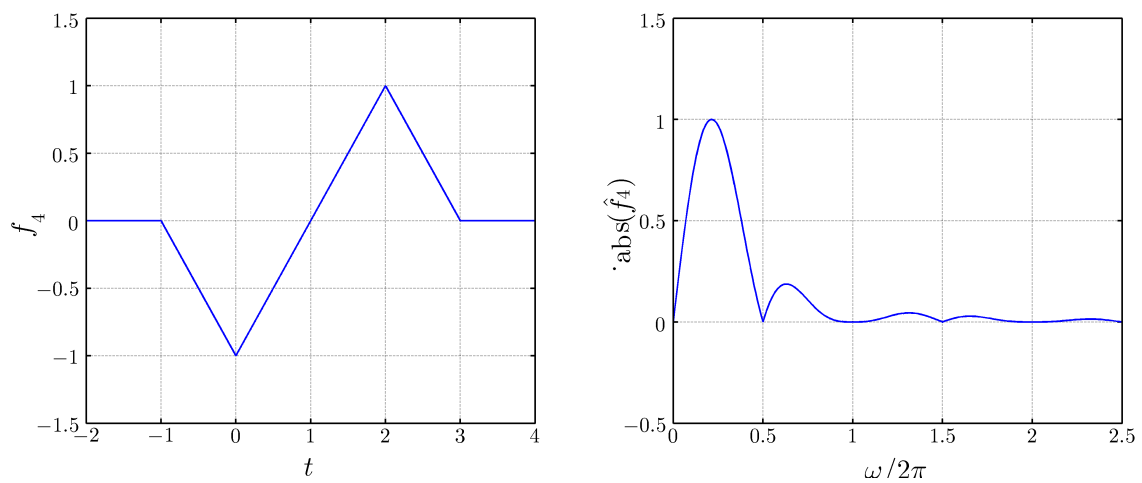


Figura 4 Gráfico de la función f_1 y su espectro de potencia normalizado.



Script 7 Script para obtener las *figs. 1, 2, 3 y 4*.

```
Fs = 1000;
T = 1/Fs;
L = 100000;

t = (-L/2:L/2)*T;
y = p1_f1(t);

plot(t,y)

Y = fft(y);
P2 = abs(Y/L);
P1 = P2(1:L/2+1);
P1(2:end-1) = 2*P1(2:end-1);
P1 = P1/max(P1);
f = Fs*(0:(L/2))/L;

plot(f,P1)

t = (-L/2:L/2)*T;
y = p1_f2(t);

plot(t,y)

Y = fft(y);
P2 = abs(Y/L);
P1 = P2(1:L/2+1);
P1(2:end-1) = 2*P1(2:end-1);
P1 = P1/max(P1);
f = Fs*(0:(L/2))/L;

plot(f,P1)

t = (-L/2:L/2)*T;
y = p1_f3(t);

plot(t,y)

Y = fft(y);
P2 = abs(Y/L);
P1 = P2(1:L/2+1);
P1(2:end-1) = 2*P1(2:end-1);
P1 = P1/max(P1);
f = Fs*(0:(L/2))/L;

plot(f,P1)

t = (-L/2:L/2)*T;
y = p1_f4(t);

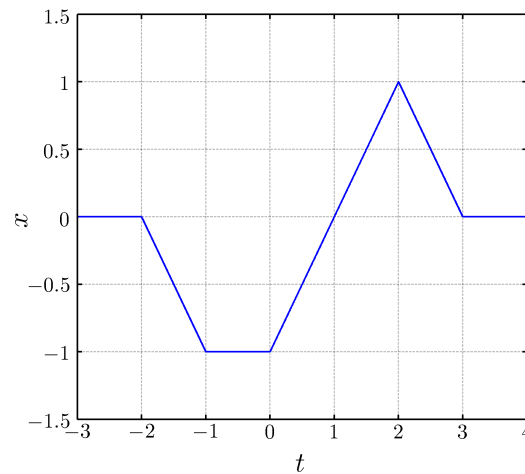
plot(t,y)

Y = fft(y);
P2 = abs(Y/L);
P1 = P2(1:L/2+1);
P1(2:end-1) = 2*P1(2:end-1);
P1 = P1/max(P1);
f = Fs*(0:(L/2))/L;

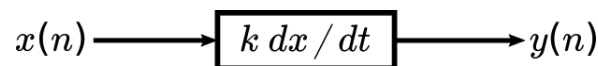
plot(f,P1)
```

Problema 2

Hallar la transformada de Fourier de $x(t)$ y graficar en Matlab:



Si $x(t)$ pasa a través del bloque de la figura, calcule la transformada de Fourier de $y(t)$.



Solución

La función $x(t)$ se puede modelar empleando la función triángulo como

$$x(t) = -\Lambda\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right) - \Lambda\left(\frac{1}{2}t\right) + \Lambda\left(\frac{1}{2}t - 1\right).$$

Así, la transformada de Fourier vendrá dada por:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= -\mathcal{F}\left(\Lambda, \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \middle| \omega\right) - \mathcal{F}\left(\Lambda, \frac{t}{2} \middle| \omega\right) + \mathcal{F}\left(\Lambda, \frac{t}{2} \middle| \omega\right) \\ &= -2\mathcal{F}(\Lambda, t+1|2\omega) - 2\mathcal{F}(\Lambda, t|2\omega) + 2\mathcal{F}(\Lambda, t-2|2\omega) \\ &= -2\exp(i\omega)\mathcal{F}(\Lambda, t|2\omega) - 2\mathcal{F}(\Lambda, t|2\omega) + 2\exp(-2i\omega)\mathcal{F}(\Lambda, t|2\omega) \\ &= -\exp(i\omega)\text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - \text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \exp(-2i\omega)\text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= (-\exp(i\omega) - 1 + \exp(-2i\omega))\text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\end{aligned}$$

En MATLAB implementamos la función $x(t)$ en términos de la función triángulo tal como muestra el *script 8* y calculamos su espectro de potencia según el *script 9* para obtener la *figura 5*

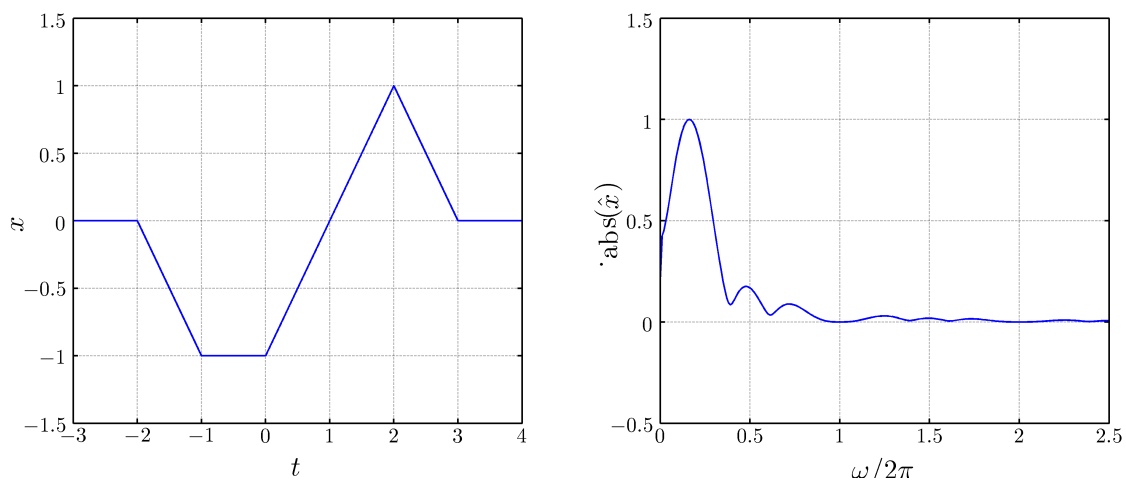
Script 8 Función $x(t)$.

```
function f = p2_x(t)
    f = -triangle(0.5*(t+1))-triangle(0.5*(t))+triangle(0.5*(t-2));
end
```

Script 9 Función $x(t)$.

```
Fs = 1000;  
T = 1/Fs;  
L = 100000;  
  
t = (-L/2:L/2)*T;  
x = p2_x(t);  
  
plot(t,x)  
  
X = fft(x);  
P2 = abs(X/L);  
P1 = P2(1:L/2+1);  
P1(2:end-1) = 2*P1(2:end-1);  
P1 = P1/max(P1);  
f = Fs*(0:(L/2))/L;  
  
plot(f,P1)
```

Figura 5 Función $x(t)$ y espectro su espectro de potencia normalizado.



La respuesta del sistema, representado por el bloque, al paso de la señal $x(t)$ será

$$y(t) = kx(t) * \frac{dx(t)}{dt}$$

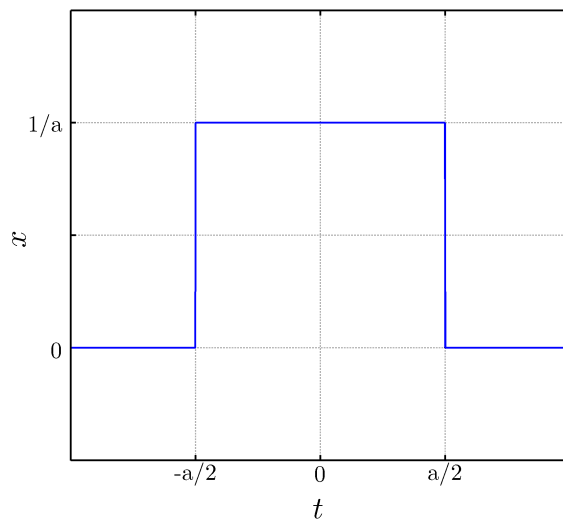
La transformada de Fourier de la salida $y(t)$ estará dada por

$$\begin{aligned}\hat{y}(\omega) &= \mathcal{F}\left(kx * \frac{dx}{dt}, t \middle| \omega\right) \\ &= k\mathcal{F}(x, t|\omega) \mathcal{F}\left(\frac{dx}{dt}, t \middle| \omega\right) \\ &= i\omega k\mathcal{F}(x, t|\omega) \mathcal{F}(x, t|\omega) \\ &= i\omega k(-\exp(i\omega) - 1 + \exp(-2i\omega))^2 \operatorname{sinc}^4\left(\frac{\omega}{2}\right)\end{aligned}$$

Problema 3

Halle y grafique la transformada de Fourier de las siguientes señales:

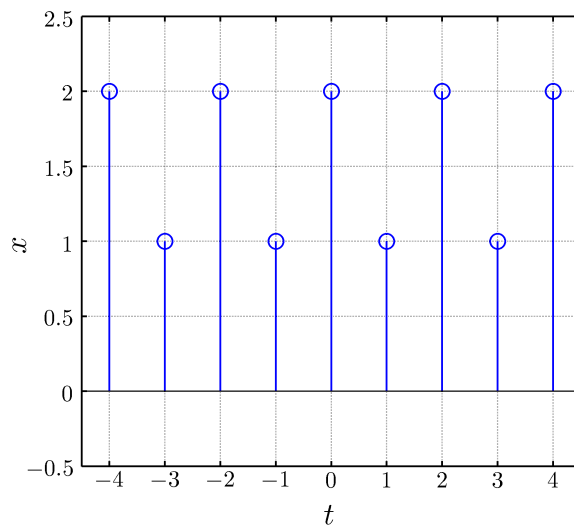
a) $x(t)$



b) La función periódica mostrada en la figura:

$$x(n) = \begin{cases} 1 & ; \text{ Si } n \text{ impar} \\ 2 & ; \text{ Si } n \text{ par} \end{cases}$$

con $n \in \mathbb{Z}$.



c) $f(t)$

$$f(t) = t^2 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Solución

a) Modelamos la función $x(t)$ empleando la función Θ de Heavisde.

$$x(t) = \frac{1}{a} \left(\Theta \left(t + \frac{a}{2} \right) - \Theta \left(t - \frac{a}{2} \right) \right).$$

De modo que la transformada de Fourier estará dada por

$$\begin{aligned} \hat{x}(\omega) &= \frac{1}{a} \left(\mathcal{F} \left(\Theta, t + \frac{a}{2} \middle| \omega \right) - \mathcal{F} \left(\Theta, t - \frac{a}{2} \middle| \omega \right) \right) \\ &= \frac{1}{a} \left(\exp \left(i\omega \frac{a}{2} \right) \mathcal{F}(\Theta, t | \omega) - \exp \left(-i\omega \frac{a}{2} \right) \mathcal{F}(\Theta, t | \omega) \right) \\ &= \frac{1}{a} \left(-\frac{i}{\omega} \exp \left(i\omega \frac{a}{2} \right) + \frac{i}{\omega} \exp \left(-i\omega \frac{a}{2} \right) \right) \\ &= \text{sinc} \left(\frac{a\omega}{2} \right) \end{aligned}$$

b) La transformada de $f(t)$ viene dada por

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \mathcal{F} \left(f, -\frac{t}{\tau} \middle| \omega \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \exp(-i\omega t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \exp \left(-i \left(\omega - \frac{i}{\tau} \right) t \right) dt \\ &= -2\pi \delta'' \left(\omega - \frac{i}{\tau} \right) \end{aligned}$$

Donde δ es la función Delta de Dirac.

Problema 4

Dada la señal en el dominio del tiempo:

$$y(t) = \sin(t) + 0,25 \sin(10t)$$

- Hacer un programa para graficar la señal para 4 periodos, con una frecuencia de muestreo de 100 Hz.
- Hacer un programa para graficar el espectro de frecuencias de la señal.
- ¿Cuál es la amplitud y la frecuencia correspondiente a cada pico?

Solución

- El período de la función dada es de 2π .

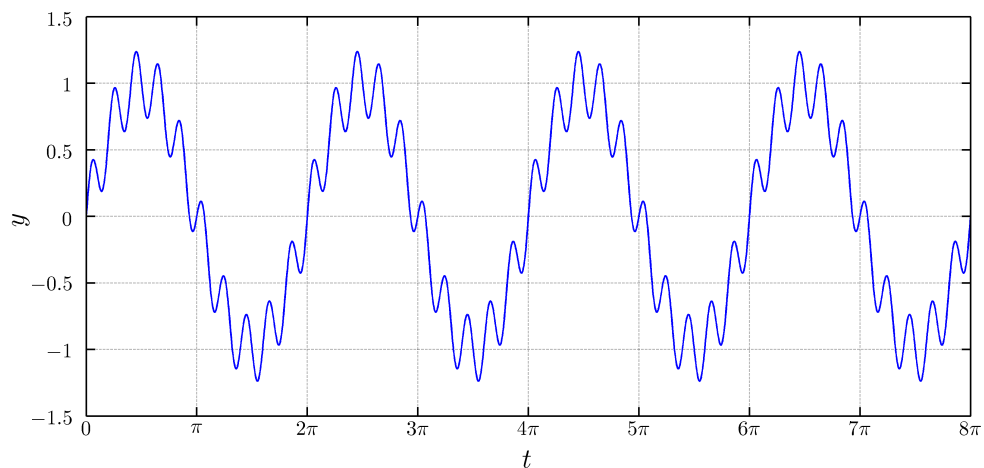
Script 10 Función $y(n)$

```
function f = p4_y(t)
    f = sin(t) + 0.25*sin(10*t);
end
```

Script 11 Función $y(n)$

```
Fs = 100;
T = 1/Fs;
t = 0:T:8*pi;
y = p4_y(t);
plot(t, y)
```

Figura 6 Gráfica de la función $y(t)$

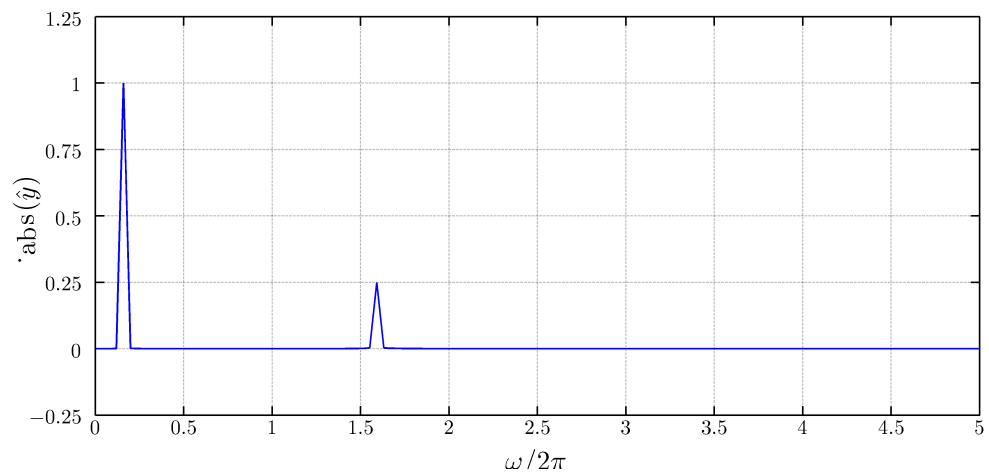


- Calculamos la transformada de Fourier y graficamos el espectro de potencias

Script 12 Función $y(n)$

```
L = length(t);
Y = fft(y);
P = abs(Y/L);
P = P(1:L/2+1);
P(2:end-1) = 2*P(2:end-1);
f = Fs*(0:(L/2))/L;
plot(f, P)
```

Figura 7 Gráfica del espectro de potencias de $y(t)$



- c) En el espectro de potencias se encuentran dos picos con frecuencias de 1,5911 Hz y 0,1591 Hz con amplitudes de 0,2499 y 0,9999 respectivamente, que coinciden con los valores calculados de las amplitudes de 0,25 y 1,00 para las frecuencias 0,1592 Hz y 1,5915 Hz respectivamente.

Problema 5

Descargue el archivo `datos.txt`¹ de la web, que representa una señal de audio. La frecuencia de muestreo es de $F_s = 8000 \text{ Hz}$. Hacer un programa en Matlab para que realice lo siguiente:

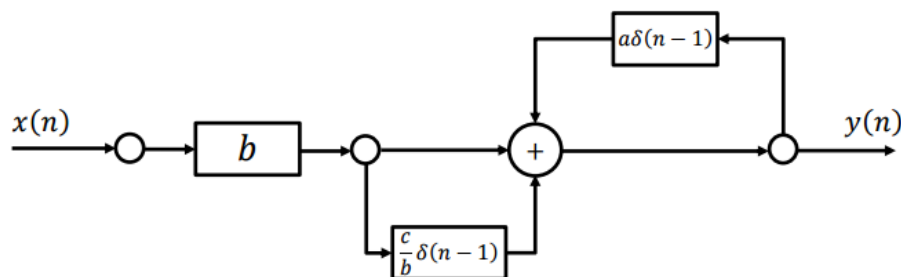
- Hallar el número de datos N .
- Hallar la duración de la señal.
- Hallar el valor medio de la señal.
- Graficar la señal $x(t)$.
- Graficar el espectro de frecuencias.

Solución

Expresando la ecuación en diferencias como:

$$y(n) = -ay(n) * \delta(n-1) + bx(n) * \delta(n) + cx(n-1) * \delta(n-1)$$

De modo que el diagrama de bloques resultante es



¹<http://fenlab.9k.com/pds/datos.rar>

Problema 6

Realizar en MATLAB la convolución del siguiente par de señales:

1. $x(n) = (-1)^n (u(n) - u(-n-8))$
2. $h(n) = u(n) - u(n-8)$

Graficar la señal resultante, $y(n) = x(n) * h(n)$. Usar el comando `stem`.

Solución

xpresamos las funciones x y h en términos de la función escalón unitario u .

Script 13 Función escalón unitario

```
function f = escalon(x,y,z)
    switch (nargin)
        case 1, f = 1.*(x>=0);
        case 2, f = 1.*(x>=y);
        case 3, f = z.*(x>=y);
        otherwise
            fprintf('Error: Revise los argumentos de entrada')
    end
```

Script 14 Función $x(n)$

```
function f = p6_X( n )
    f = ((-1).^n).*(escalon(n)-escalon(-n-8));
end
```

Script 15 Función $h(n)$

```
function f = p3_H( n )
    f = escalon(n)-escalon(n-8);
end
```

Figura 8 Gráfico de la función $x(n)$ del *script 14*.

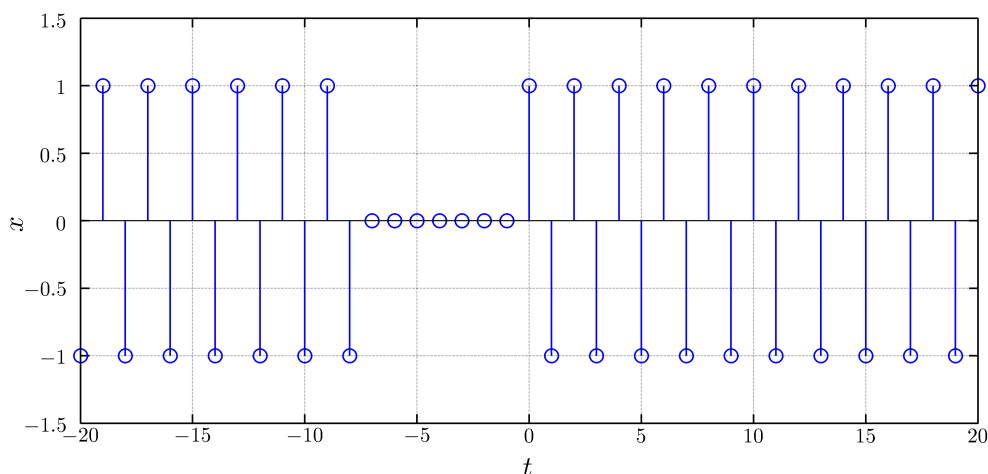
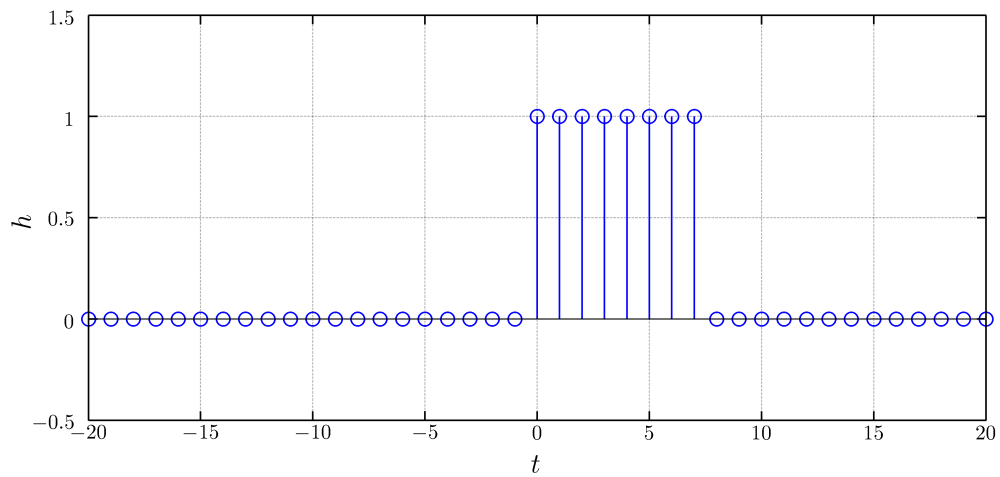


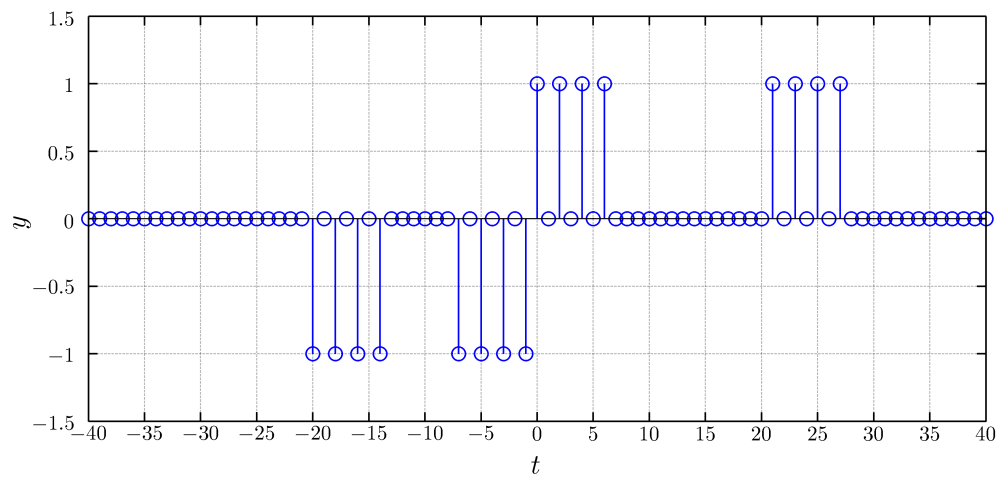
Figura 9 Gráfico de la función $x(n)$ del *script 15*.



Script 16 Convlución de las señales $x(n)$ y $h(n)$

```
n = -20:1:20;  
X = p6_X(n);  
H = p6_H(n);  
Y = conv(X,H);  
stem(-40:1:40,Y)
```

Figura 10 Gráfico de la función $y(n) = x(n) * h(n)$ del *script 16*.



Problema 7

Considere un sistema lineal e invariante en el tiempo, causal, cuya entrada $x(n]$ y salida $y(n]$ estén relacionadas por la ecuación de diferencias:

$$y(n) = 0,25y(n-1) + x(n)$$

Determine $y(n]$ si $x(n) = \delta(n-1)$.

Grafique en MATLAB la salida $y(n]$, use el comando `stem`.

Solución

Para $n = 1$ tenemos

$$\begin{aligned}y(1) &= 0,25y(0) + x(1) \\&= 0,25y(0) + \delta(0) \\&= 0,25y(0) + 1\end{aligned}$$

Suponiendo que la señal $y(n]$ es nula antes de $n = 1$ tenemos

$$\begin{aligned}y(0) &= 0 \\y(1) &= 1\end{aligned}$$

Con estos valores en la definición de $y(n]$ obtenemos que

$$y(n) = \frac{1}{4^{n-1}}u(n-1)$$

La implementación y la gráfica que se obtienen de MATLAB se muestran en el *script 17* y la *script 11* respectivamente.

Script 17 Función $y(n]$

```
function f = p7_Y( n )  
    f = ((0.25).^(n-1)).*escalon(n-1);  
end
```

Figura 11 Gráfico de la función $y(n]$ calculada *figura 17*.

