

# Transformada de Fourier y filtros

Martín Josemaría Vuelta Rojas

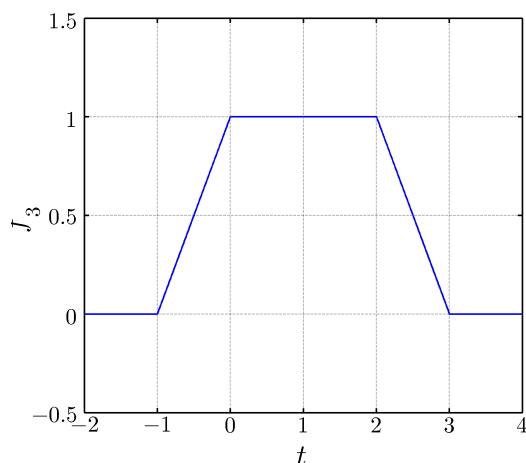
## Problema 1

Graficar en MATLAB las señales a y b, y hallar la transformada de Fourier en forma analítica (usar propiedades):

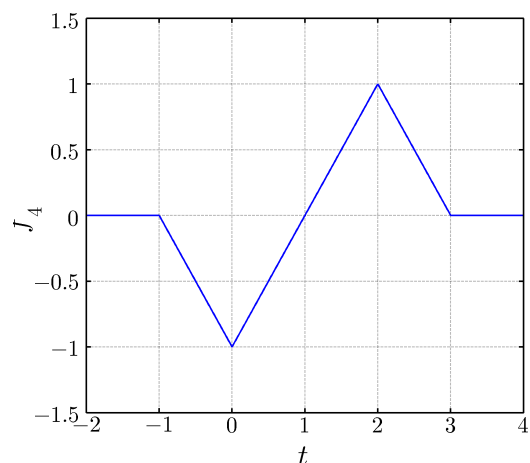
a)  $f_1(t) = G\left(\frac{t}{2}\right) - G(t)$

b)  $f_2(t) = 5G(t-1) - G(t+1)$

c)  $f_3(t)$



d)  $f_4(t)$



Nota:  $G$  es la función compuerta unitaria.

## Solución

Definimos la función compuerta unitaria,  $G$ , empleando la función  $\Theta$  de Heaviside de la siguiente manera

$$G(t) = \Theta\left(t + \frac{1}{2}\right) - \Theta\left(t - \frac{1}{2}\right).$$

Empleando la función  $G$  podemos definir la función triángulo,  $\Lambda$ , como

$$\Lambda(t) = (1 - 2|t|)G(t)$$

---

### Script 1 Función compuerta unitaria

---

```
function f = gate(t)
    f = heaviside(t+1/2)-heaviside(t-1/2);
end
```

---

---

### Script 2 Función $x(n)$

---

```
function f = p1_X( n )
    f = impulso(n) + 2*impulso(n-1) - impulso(n-3);
end
```

---

---

### Script 3 Función $h(n)$

---

```
function f = p1_H( n )
    f = 2*impulso(n+1) + 2*impulso(n-1);
end
```

---

---

### Script 4 Convoluciones $x(n) * h(n)$ , $x(n+2) * h(n)$ y $x(n) * h(n+2)$ en MATLAB

---

```
n = -5:1:5;

y1 = conv(p1_X(n), p1_H(n));
y2 = conv(p1_X(n + 2), p1_H(n));
y3 = conv(p1_X(n), p1_H(n + 2));

fprintf('x(n)*h(n)   : '); disp(y1)
fprintf('x(n+2)*h(n): '); disp(y2)
fprintf('x(n)*h(n+2): '); disp(y3)
```

---

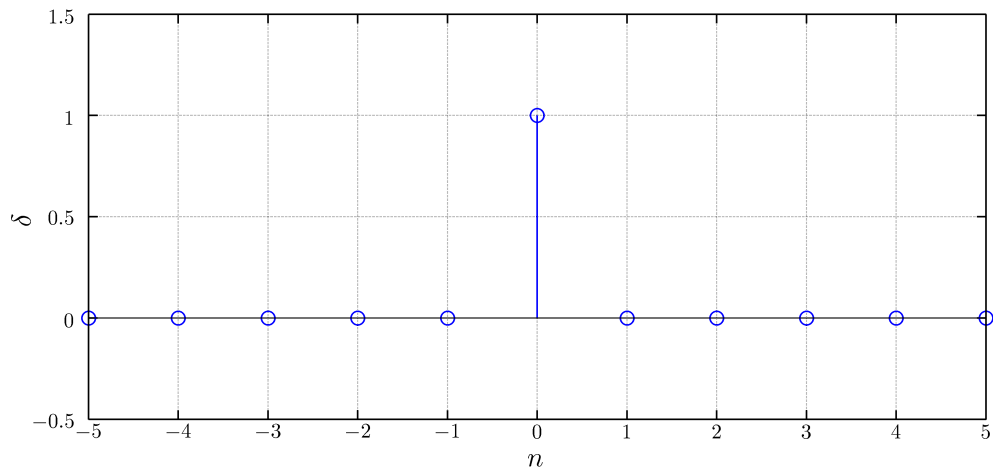
---

### Script 5 Resultados de ejecutar el script 4

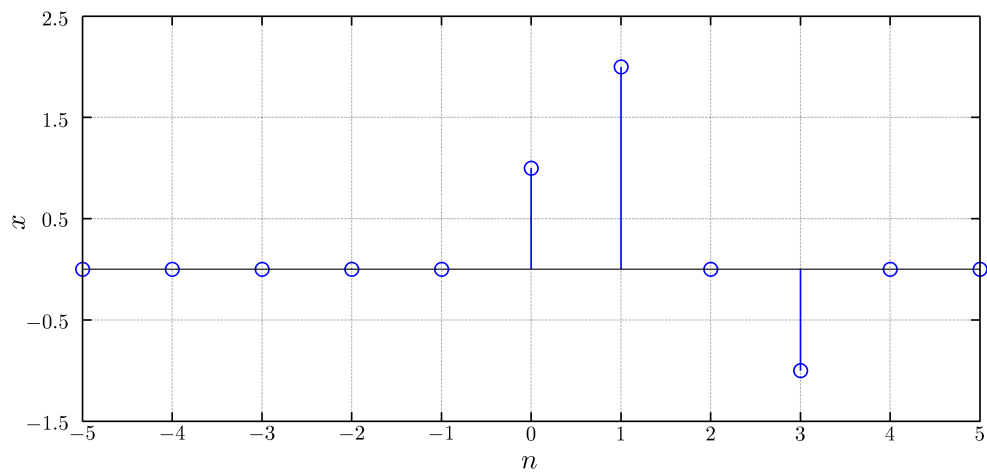
---

```
>> problema01
x(n)*h(n)   :  0  0  0  0  0  0  0  0  0  2  4  2  2  0 -2  0  0  0  0  0  0
x(n+2)*h(n):  0  0  0  0  0  0  0  2  4  2  2  0 -2  0  0  0  0  0  0  0  0
x(n)*h(n+2):  0  0  0  0  0  0  0  2  4  2  2  0 -2  0  0  0  0  0  0  0  0
```

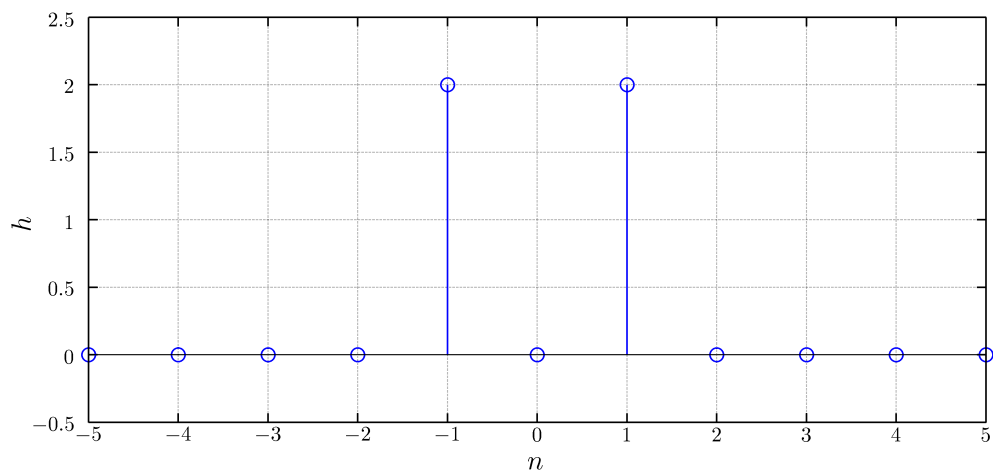
---



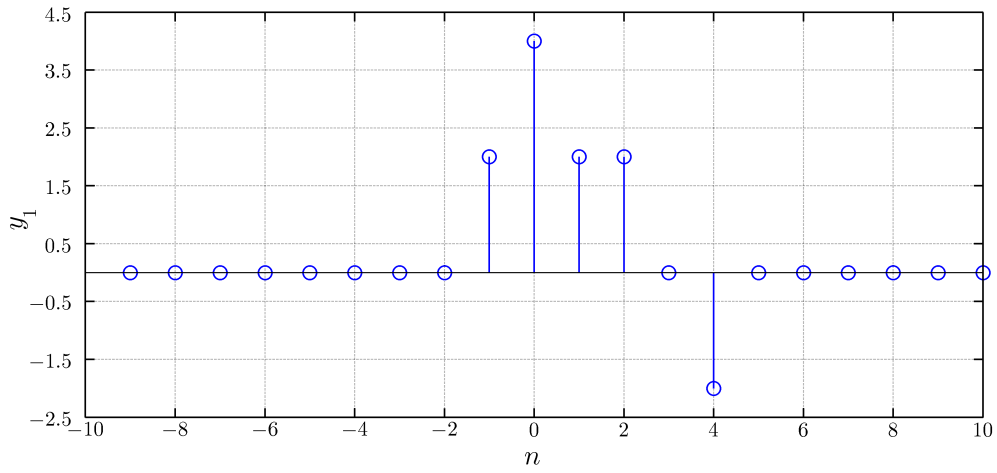
**Figura 1:** Gráfico de la función impulso unitario del *script 1*.



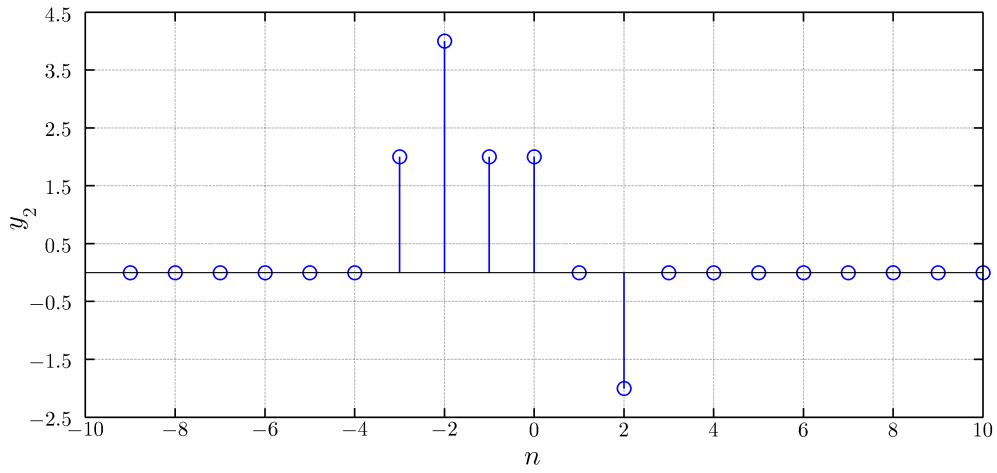
**Figura 2:** Gráfico de la función  $x(n)$  del *script 2*.



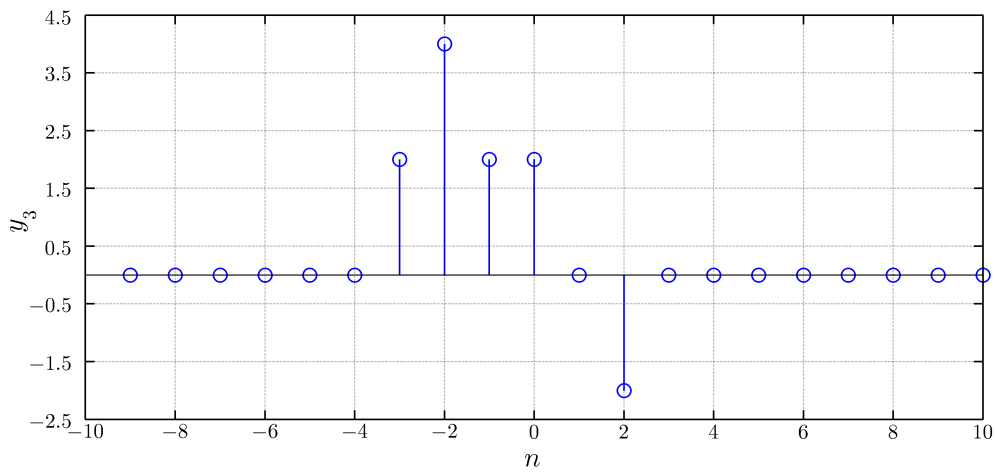
**Figura 3:** Gráfico de la función  $h(n)$  del *script 3*.



**Figura 4:** Gráfico de la función  $y_1(n) = x(n) * h(n)$  calculada *script 4*.



**Figura 5:** Gráfico de la función  $y_2(n) = x(n+2) * h(n)$  calculada *script 4*.



**Figura 6:** Gráfico de la función  $y_3(n) = x(n) * h(n+2)$  calculada *script 4*.

De forma analítica, obtenemos las convoluciones solicitadas empleando la definición:

$$y(m) = x(n) * h(n) = \sum_n x(n) h(m - n)$$

Así obtenemos

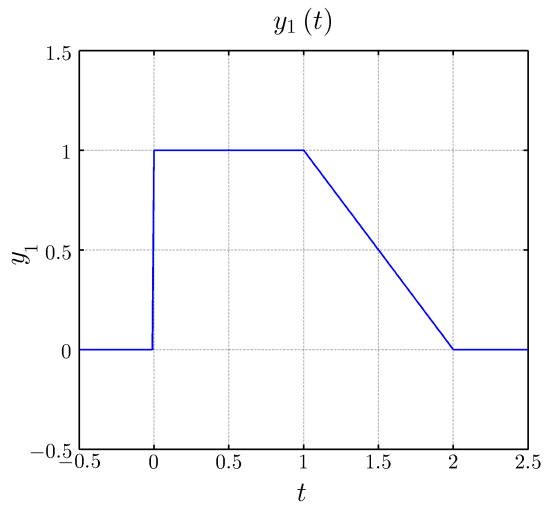
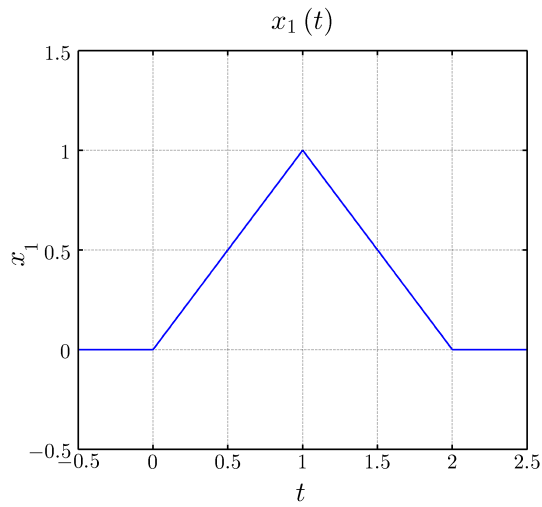
$$\begin{aligned}y_1(m) &= x(n) * h(n) \\&= \sum_n [\delta(n) + 2\delta(n-1) - \delta(n-3)] [2\delta(m-n+1) + 2\delta(m-n-1)] \\&= 2\delta(m+1) + 4\delta(m) + 2\delta(m-1) + 2\delta(m-2) - 2\delta(m-4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_2(m) &= x(n+2) * h(n) \\&= \sum_n [\delta(n+2) + 2\delta(n+1) - \delta(n-1)] [2\delta(m-n+1) + 2\delta(m-n-1)] \\&= 2\delta(m+3) + 4\delta(m+2) + 2\delta(m+1) + 2\delta(m) - 2\delta(m-2)\end{aligned}$$

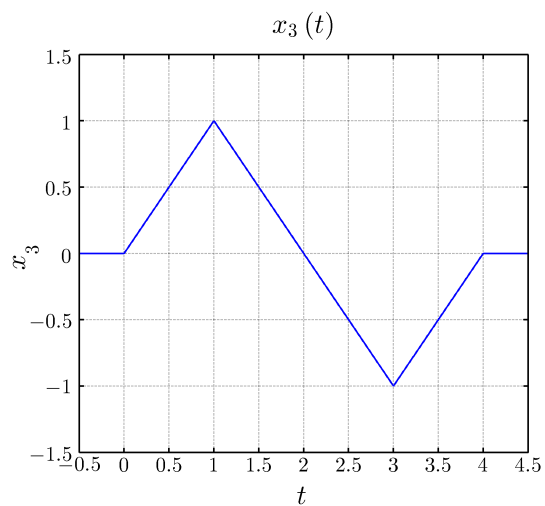
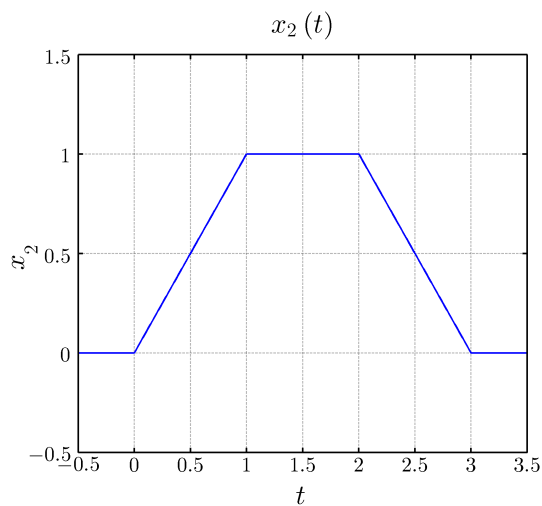
$$\begin{aligned}y_3(n) &= x(n) * h(n+2) \\&= \sum_n [\delta(n) + 2\delta(n-1) - \delta(n-3)] [2\delta(m-n+3) + 2\delta(m-n+1)] \\&= 2\delta(m+3) + 4\delta(m+2) + 2\delta(m+1) + 2\delta(m) - 2\delta(m-2)\end{aligned}$$

## Problema 2

Considere un sistema LIT cuya respuesta a la señal  $x_1(t)$  es  $y_1(t)$



Hallar las respuestas del sistema anterior a las siguientes excitaciones:



## Solución

Las funciones  $x_2(t)$  y  $x_3(t)$  se pueden representar en función de  $x_1(t)$  como

$$x_2(t) = x_1(t) + x_1(t-1)$$

y

$$x_3(t) = x_1(t) - x_1(t-2).$$

De forma que si consideramos la función de transferencia del sistema como  $h(t)$  y

$$y_1(t) = x_1(t) * h(t),$$

entonces

$$y_2(t) = x_1(t) * h(t) + x_1(t-1) * h(t) = y_1(t) + y_1(t-1)$$

y

$$y_3(t) = x_1(t) * h(t) - x_1(t-2) * h(t) = y_1(t) - y_1(t-2).$$

Con estas observaciones escribimos las soluciones a este problema en MATLAB

---

**Script 6** Función  $x_1(t)$ 

---

```
function f = p2_X1( t )
    switch( nargin )
        case 1, f = (t.*(1 >= t & t >= 0 ) + ...
                    (2-t).*(2 >= t & t > 1 )).*(2 >= t & t >= 0 );
        otherwise, fprintf('Revise los argumentos de entrada\n')
    end
```

---

---

**Script 7** Función  $y_1(t)$ 

---

```
function f = p2_Y1( t )
    switch( nargin )
        case 1, f = (1.*(1 >= t & t >= 0 ) + ...
                    (2-t).*(2 >= t & t > 1 )).*(2 >= t & t >= 0 );
        otherwise, printf('Revise los argumentos de entrada\n')
    end
```

---

---

**Script 8** Función  $x_2(t)$ 

---

```
function f = p2_X2( t )
    f = p2_X1( t ) + p2_X1( t-1 );
end
```

---

---

**Script 9** Función  $y_2(t)$ 

---

```
function f = p2_Y2( t )
    f = p2_Y1(t) + p2_Y1(t-1);
end
```

---

---

**Script 10** Función  $x_3(t)$ 

---

```
function f = p2_X3( t )
    f = p2_X1( t ) - p2_X1( t-2 );
end
```

---

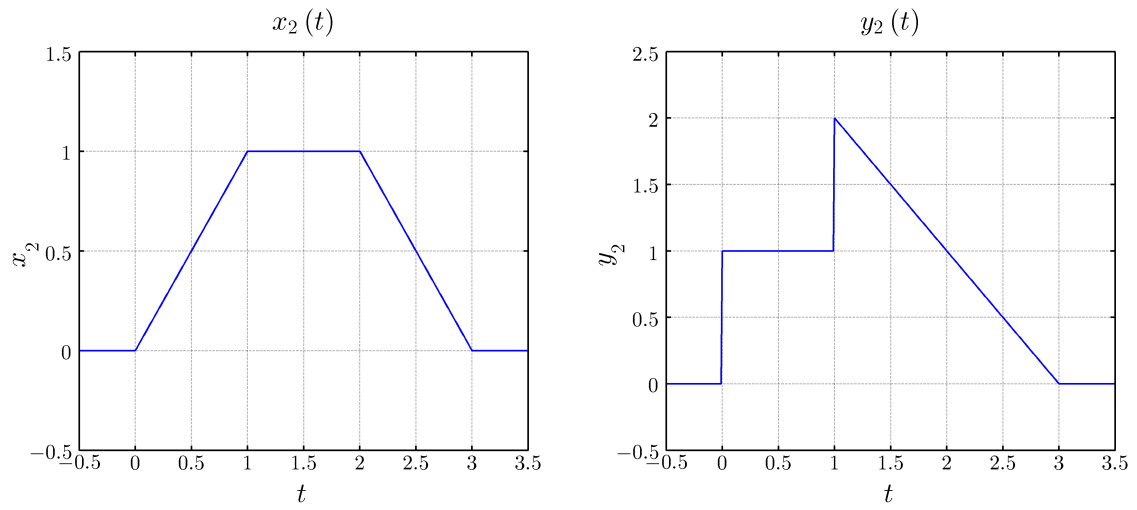
---

**Script 11** Función  $y_3(t)$ 

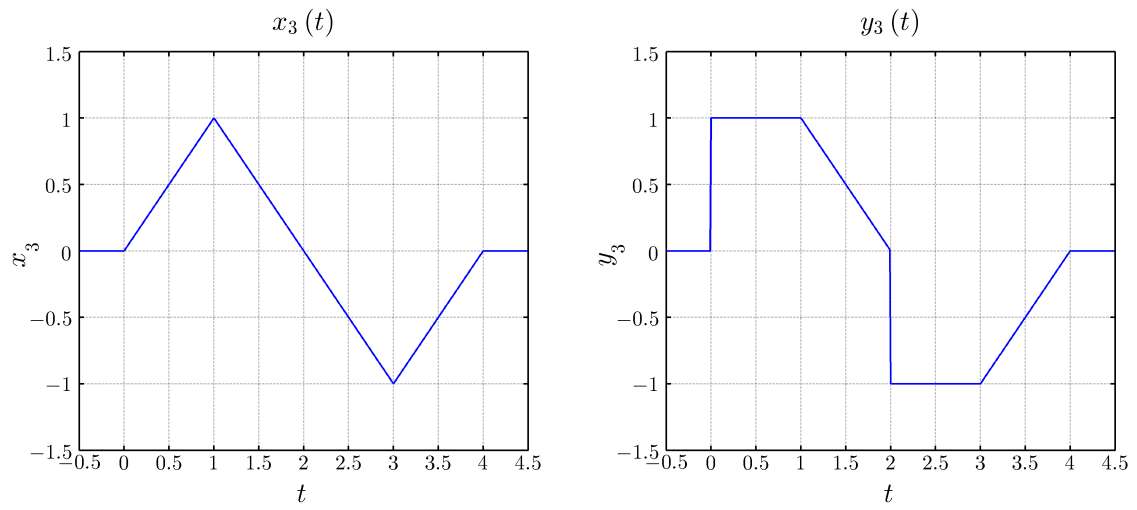
---

```
function f = p2_Y3( t )
    f = p2_Y1(t) - p2_Y1(t-2);
end
```

---



**Figura 7:** Función  $x_2(t)$  y respuesta  $y_2(t)$  empleando los scripts 8 y 9.



**Figura 8:** Función  $x_3(t)$  y respuesta  $y_3(t)$  empleando los scripts 10 y 11.



### Problema 3

Calcular la convolución entre los siguientes pares de señales:

- a)  $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-4)$  y  $h(n) = 4^n u(2-n)$
- b)  $x(n) = u(-n) - u(-n-2)$  y  $h(n) = u(n-1) - u(n-4)$
- c)  $x(n) = u(n)$  y  $h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u(-n)$
- d)  $x(t) = \exp(-at) u(t)$  y  $h(t) = \exp(-at) u(t)$

Donde  $u(n)$  es la función escalón unitario.

### Solución

- a)  $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-4)$  y  $h(n) = 4^n u(2-n)$

$$\begin{aligned} y(m) &= x(n) * h(n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) h(m-n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-4) 4^{m-n} u(2-m+n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{2m-3n} u(n-4) u(n+2-m) \end{aligned}$$

Cuando  $m < 6$ :

$$\begin{aligned} y(m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{2m-3n} u(n-4) u(n+2-m) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{2m-3n} u(n-4) \\ &= \sum_{n=4}^{\infty} 2^{2m-3n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2m-3(n+4)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2m-3n-12} \\ &= 2^{2m-12} \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-3})^n \\ &= 2^{2m-12} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n \\ &= 2^{2m-12} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{8}}\right) \\ &= \frac{2^{2m-9}}{7} \end{aligned}$$

Cuando  $m \geq 6$ :

$$\begin{aligned}
y(m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{2m-3n} u(n-4) u(n+2-m) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{2m-3n} u(n+2-m) \\
&= \sum_{n=m-2}^{\infty} 2^{2m-3n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2m-3(n+m-2)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{6-m-3n} \\
&= 2^{6-m} \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-3})^n \\
&= 2^{6-m} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n \\
&= 2^{6-m} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{8}}\right) \\
&= \frac{2^{9-m}}{7}
\end{aligned}$$

Finalmente

$$y(m) = \begin{cases} \frac{2^{2m-9}}{7} & ; \quad n < 6 \\ \frac{2^{9-m}}{7} & ; \quad n \geq 6 \end{cases}$$

b)  $x(n) = u(-n) - u(-n-2)$  y  $h(n) = u(n-1) - u(n-4)$

$$\begin{aligned}
y(m) &= x(n) * h(n) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) h(m-n) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [u(-n) - u(-n-2)] [u(m-n-1) - u(m-n-4)] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(-n) u(m-n-1) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(-n-2) u(m-n-1) - \\
&\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(-n) u(m-n-4) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(-n-2) u(m-n-4)
\end{aligned}$$

Cuando  $m < 0$ :

$$\begin{aligned} y(m) &= \sum_{n=-\infty}^{m-1} 1 - \sum_{n=-\infty}^{m-1} 1 - \sum_{n=-\infty}^{m-4} 1 + \sum_{n=-\infty}^{m-4} 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Cuando  $m = 0$ :

$$\begin{aligned} y(m) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} 1 - \sum_{n=-\infty}^{-2} 1 - \sum_{n=-\infty}^{-3} 1 + \sum_{n=-\infty}^{-3} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Cuando  $0 < m \wedge m < 3$ :

$$\begin{aligned} y(m) &= \sum_{n=-\infty}^0 1 - \sum_{n=-\infty}^{-2} 1 - \sum_{n=-\infty}^{-2} 1 + \sum_{n=-\infty}^{-2} 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Cuando  $m = 3$ :

$$\begin{aligned} y(m) &= \sum_{n=-\infty}^0 1 - \sum_{n=-\infty}^{-2} 1 - \sum_{n=-\infty}^{-1} 1 + \sum_{n=-\infty}^{-2} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Cuando  $m > 3$ :

$$\begin{aligned} y(m) &= \sum_{n=-\infty}^0 1 - \sum_{n=-\infty}^{-1} 1 - \sum_{n=-\infty}^0 1 + \sum_{n=-\infty}^{-1} 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Finalmente

$$y(m) = \begin{cases} 0 & ; \quad m < 0 \vee 3 < m \\ 1 & ; \quad m = 0 \vee m = 3 \\ 2 & ; \quad 0 < m \wedge m < 3 \end{cases}$$

c)  $x(n) = u(n)$  y  $h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u(-n)$

$$\begin{aligned}
 y(m) &= x(n) * h(n) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) h(m-n) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} u(n-m) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} u(n) u(n-m)
 \end{aligned}$$

Cuando  $m < 0$ :

$$\begin{aligned}
 y(m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} u(n) u(n-m) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} \\
 &= 2^m \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
 &= 2^{1+m}
 \end{aligned}$$

Cuando  $0 \leq m$ :

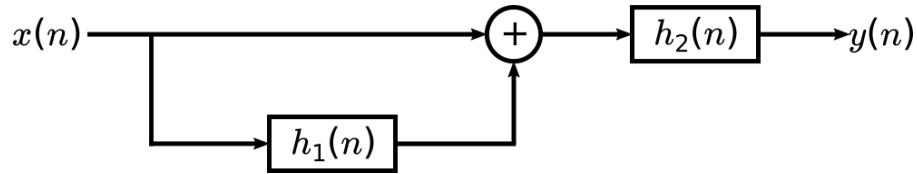
$$\begin{aligned}
 y(m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} u(n) u(n-m) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} \\
 &= 2^m \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
 &= 2^{1+m}
 \end{aligned}$$

d)  $x(t) = \exp(-at) u(t)$  y  $h(t) = \exp(-at) u(t)$

$$\begin{aligned}
 y(\tau) &= x(t) * h(t) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) h(\tau-t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-at) u(t) \exp(-a\tau + at) u(t-\tau) dt \\
 &= \int_0^{\tau} \exp(-a\tau) dt \\
 &= \exp(-a\tau) \tau
 \end{aligned}$$

## Problema 4

Para el diagrama de bloques mostrado



Donde

$$h_1(n) = \beta \delta(n-1)$$

y

$$h_2(n) = \exp(\alpha) \delta(n)$$

- Escribir la ecuación en diferencias que relaciona la entrada con la salida
- Hallar  $\alpha$  y  $\beta$ , de tal forma que la salida sea el promedio entre la entrada en el instante  $n$  y la entrada en el instante  $n-1$ .

## Solución

- La ecuación en diferencias se obtiene de calcular

$$y(n) = [(x + x * h_1) * h_2](n)$$

Resolviendo  $[x * h_1](n)$ , tenemos

$$\begin{aligned} y_1(n) &= x(m) * h_1(m) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h_1(n-m) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \beta \delta(n-m-1) \\ &= \beta x(n-1) \end{aligned}$$

Haciendo  $y_2(n) = y_1(n) + x(n)$ , calculamos  $[y_2 * h_2](n)$  como

$$\begin{aligned} y(n) &= y_2(m) * h_2(m) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_2(m) h_2(n-m) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [y_1(m) + x(m)] \exp(\alpha) \delta(n-m) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\beta x(m-1) + x(m)] \exp(\alpha) \delta(n-m) \\ &= [\beta x(n-1) + x(n)] \exp(\alpha) \end{aligned}$$

De modo que la ecuación en diferencias del sistema queda expresada como

$$y(n) = [\beta x(n-1) + x(n)] \exp(\alpha)$$

- b) Para que la señal de salida sea igual al promedio de los valores de la señal de entrada en el instante  $n$  y en el instante  $n-1$  se debe resolver el sistema

$$\begin{cases} \exp(\alpha) &= \frac{1}{2} \\ \exp(\alpha) \beta &= \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1)$$

De donde resulta

$$\alpha = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \wedge \beta = 1$$

## Problema 5

Dada la siguiente ecuación en diferencias

$$y(n] = -ay(n-1) + bx(n) + cx(n-1),$$

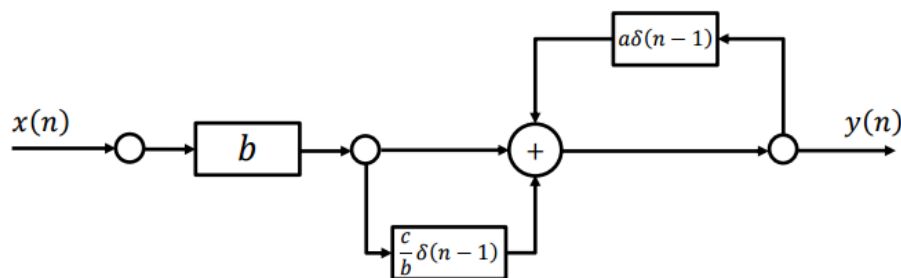
realizar una representación en diagrama de bloques.

### Solución

Expresando la ecuación en diferencias como:

$$y(n] = -ay(n) * \delta(n-1) + bx(n) * \delta(n) + cx(n-1) * \delta(n-1)$$

De modo que el diagrama de bloques resultante es



## Problema 6

Realizar en MATLAB la convolución del siguiente par de señales:

1.  $x(n) = (-1)^n (u(n) - u(-n-8))$
2.  $h(n) = u(n) - u(n-8)$

Graficar la señal resultante,  $y(n) = x(n) * h(n)$ . Usar el comando `stem`.

### Solución

xpresamos las funciones  $x$  y  $h$  en términos de la función escalón unitario  $u$ .

---

#### Script 12 Función escalón unitario

```
function f = escalon(x,y,z)
    switch (nargin)
        case 1, f = 1.*(x>=0);
        case 2, f = 1.*(x>=y);
        case 3, f = z.*(x>=y);
        otherwise
            fprintf('Error: Revise los argumentos de entrada')
    end
```

---

---

#### Script 13 Función $x(n)$

```
function f = p6_X( n )
    f = ((-1).^n).*(escalon(n)-escalon(-n-8));
end
```

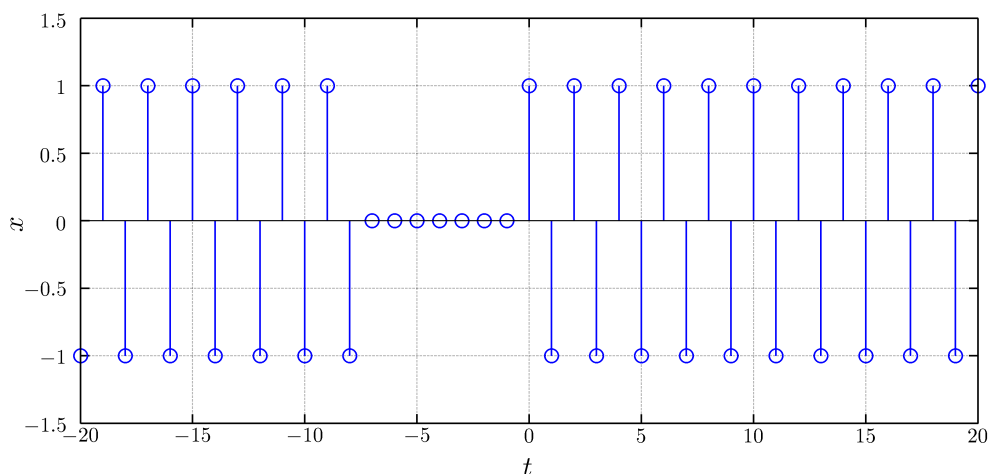
---

---

#### Script 14 Función $h(n)$

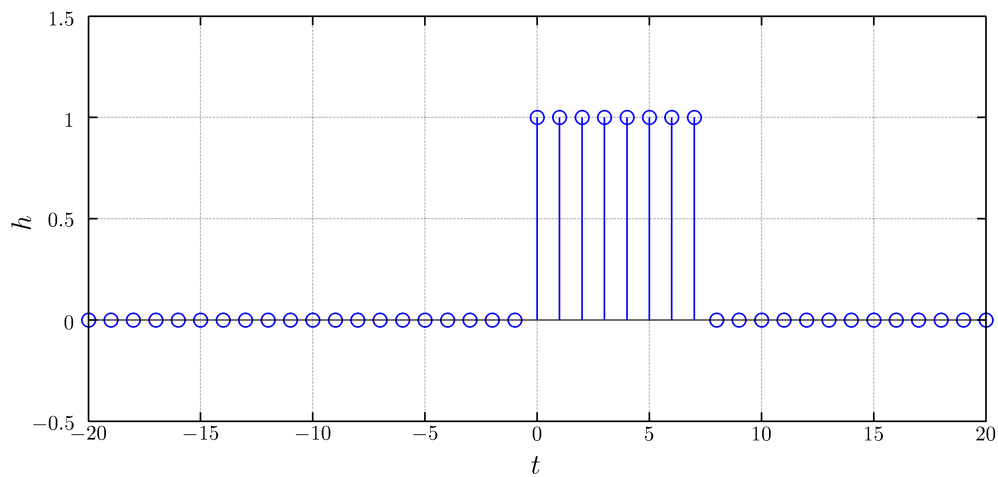
```
function f = p3_H( n )
    f = escalon(n)-escalon(n-8);
end
```

---



**Figura 9:** Gráfico de la función  $x(n)$  del *script 13*.





**Figura 10:** Gráfico de la función  $x(n)$  del script 14.

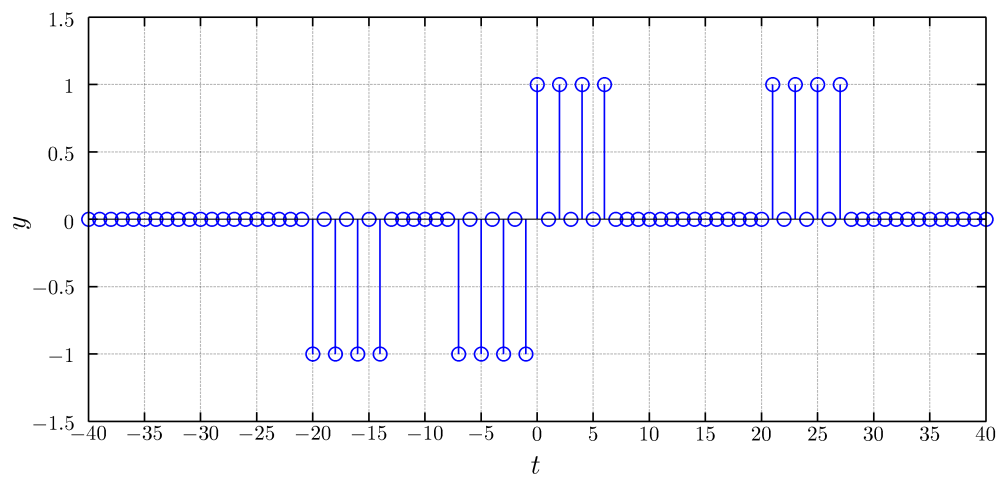
---

**Script 15** Convlución de las señales  $x(n)$  y  $h(n)$

---

```
n = -20:1:20;
X = p6_X(n);
H = p6_H(n);
Y = conv(X,H);
stem(-40:1:40,Y)
```

---



**Figura 11:** Gráfico de la función  $y(n) = x(n) * h(n)$  del script 15.

## Problema 7

Considere un sistema lineal e invariante en el tiempo, causal, cuya entrada  $x(n]$  y salida  $y(n]$  estén relacionadas por la ecuación de diferencias:

$$y(n) = 0,25y(n-1) + x(n)$$

Determine  $y(n]$  si  $x(n) = \delta(n-1)$ .

Grafique en MATLAB la salida  $y(n]$ , use el comando `stem`.

## Solución

Para  $n = 1$  tenemos

$$\begin{aligned}y(1) &= 0,25y(0) + x(1) \\&= 0,25y(0) + \delta(0) \\&= 0,25y(0) + 1\end{aligned}$$

Suponiendo que la señal  $y(n]$  es nula antes de  $n = 1$  tenemos

$$\begin{aligned}y(0) &= 0 \\y(1) &= 1\end{aligned}$$

Con estos valores en la definición de  $y(n]$  obtenemos que

$$y(n) = \frac{1}{4^{n-1}}u(n-1)$$

La implementación y la gráfica que se obtienen de MATLAB se muestran en el [script 16](#) y la [script 12](#) respectivamente.

---

### Script 16 Función $y(n]$

---

```
function f = p7_Y( n )  
    f = ((0.25).^(n-1)).*escalón(n-1);  
end
```

---

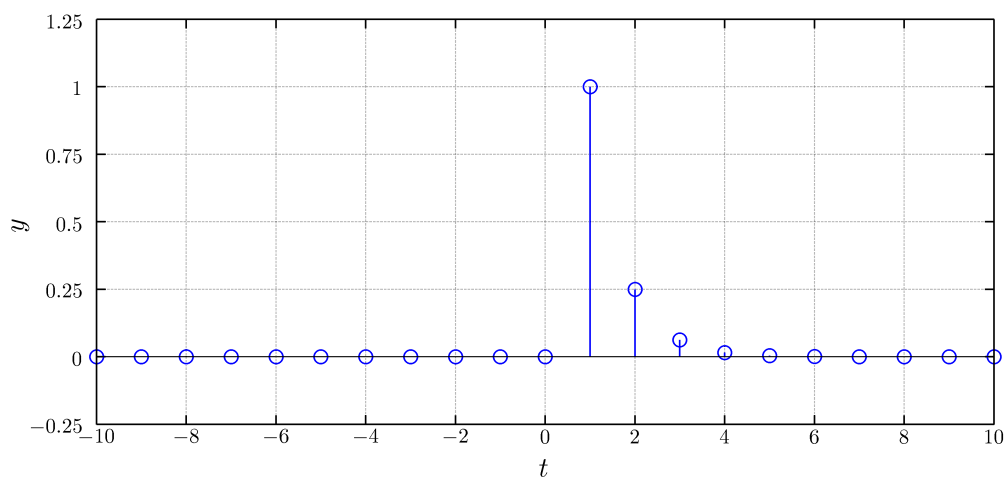


Figura 12: Gráfico de la función  $y(n]$  calculada [figura 16](#).