

Transformada de Fourier y filtros

Martín Josemaría Vuelta Rojas

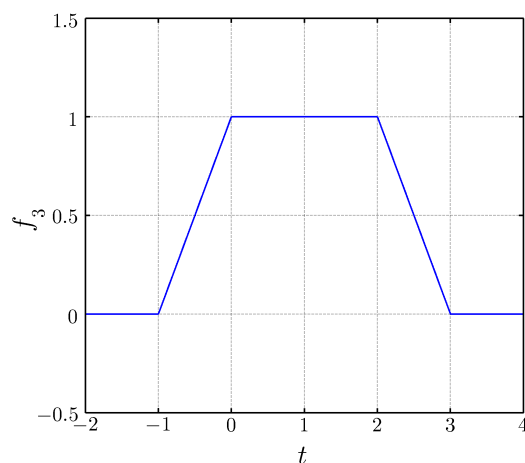
Problema 1

Graficar en MATLAB las señales a y b, y hallar la transformada de Fourier en forma analítica (usar propiedades):

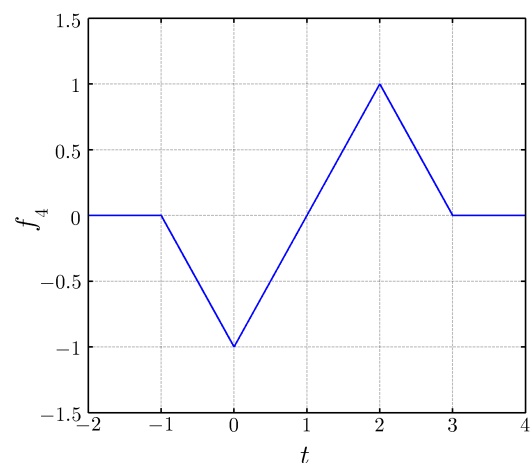
a) $f_1(t) = G\left(\frac{t}{2}\right) - G(t)$

b) $f_2(t) = 5G(t-1) - G(t+1)$

c) $f_3(t)$



d) $f_4(t)$



Nota: G es la función compuerta unitaria.

Solución

Definimos la función compuerta unitaria, G , empleando la función Θ de Heaviside de la siguiente manera

$$G(t) = \Theta\left(t + \frac{1}{2}\right) - \Theta\left(t - \frac{1}{2}\right).$$

Empleando la función G podemos definir la función triángulo, Λ , como

$$\Lambda(t) = (1 - 2|t|)G(t)$$

Con estas dos funciones definimos las funciones f_3 y f_4 como

$$f_3(t) = \Lambda\left(\frac{1}{2}t\right) + \Lambda\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right) + \Lambda\left(\frac{1}{2}t + 1\right),$$

$$f_4(t) = -\Lambda\left(\frac{1}{2}t\right) + \Lambda\left(\frac{1}{2}t + 1\right).$$

Empleando la transformada de Fourier definida por

$$\mathcal{F}(f, t|\omega) = \widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(i\omega t) dt$$

y que

$$\widehat{G}(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

$$\widehat{\Lambda}(\omega) = \frac{1}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{4}\right),$$

tenemos

a) $\widehat{f}_1(\omega)$

$$\begin{aligned}\widehat{f}_1(\omega) &= \mathcal{F}\left(G, \frac{t}{2} \middle| \omega\right) - \mathcal{F}(G, t|\omega) \\ &= 2\mathcal{F}(G, t|2\omega) - \mathcal{F}(G, t|\omega) \\ &= 2\text{sinc}(\omega) - \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)\end{aligned}$$

b) $\widehat{f}_2(\omega)$

$$\begin{aligned}\widehat{f}_2(\omega) &= 5\mathcal{F}(G, t-1|\omega) - \mathcal{F}(G, t+1|\omega) \\ &= 5\exp(-i\omega)\mathcal{F}(G, t|\omega) - \exp(i\omega)\mathcal{F}(G, t|\omega) \\ &= 2\text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)(2\cos(\omega) - 3i\sin(\omega))\end{aligned}$$

c) $\widehat{f}_3(\omega)$

$$\begin{aligned}\widehat{f}_3(\omega) &= \mathcal{F}\left(\Lambda, \frac{t}{2} \middle| \omega\right) + \mathcal{F}\left(\Lambda, \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \middle| \omega\right) + \mathcal{F}\left(\Lambda, \frac{t}{2} + 1 \middle| \omega\right) \\ &= 2\mathcal{F}(\Lambda, t|2\omega) + 2\exp(i\omega)\mathcal{F}(\Lambda, t|2\omega) + 2\exp(2i\omega)\mathcal{F}(\Lambda, t|2\omega) \\ &= \text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \exp(i\omega)\text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \exp(2i\omega)\text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= (1 + 2\cos(\omega))\exp(i\omega)\text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\end{aligned}$$

d) $\widehat{f}_4(\omega)$

$$\begin{aligned}\widehat{f}_4(\omega) &= -\mathcal{F}\left(\Lambda, \frac{t}{2} \middle| \omega\right) + \mathcal{F}\left(\Lambda, \frac{t}{2} + 1 \middle| \omega\right) \\ &= -2\mathcal{F}(\Lambda, t|2\omega) + 2\exp(2i\omega)\mathcal{F}(\Lambda, t|2\omega) \\ &= -\text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \exp(2i\omega)\text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= (\exp(2i\omega) - 1)\text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\end{aligned}$$

En MATLAB implementamos las funciones

Script 1 Función compuerta unitaria, $G(t)$.

```
function f = gate(t)
    f = heaviside(t+1/2)-heaviside(t-1/2);
end
```

Script 2 Función triángulo, $\Lambda(t)$.

```
function f = triangle(t)
    f = gate(t).*(1-2*abs(t));
end
```

Script 3 Función $f_1(t)$.

```
function f = p1_f1(t)
    f = gate(0.5*t) + gate(t);
end
```

Script 4 Función $f_2(t)$.

```
function f = p1_f2(t)
    f = 5*gate(t - 1) - gate(t + 1);
end
```

Script 5 Función $f_3(t)$.

```
function f = p1_f3(t)
    f = triangle(0.5*t)+triangle(0.5*(t-1))+triangle(0.5*(t-2));
end
```

Script 6 Función $f_4(t)$.

```
function f = p1_f4(t)
    f = -triangle(0.5*t)+triangle(0.5*(t-2));
end
```

Figura 1 Gráfico de la función f_1 y su espectro de potencia normalizado.

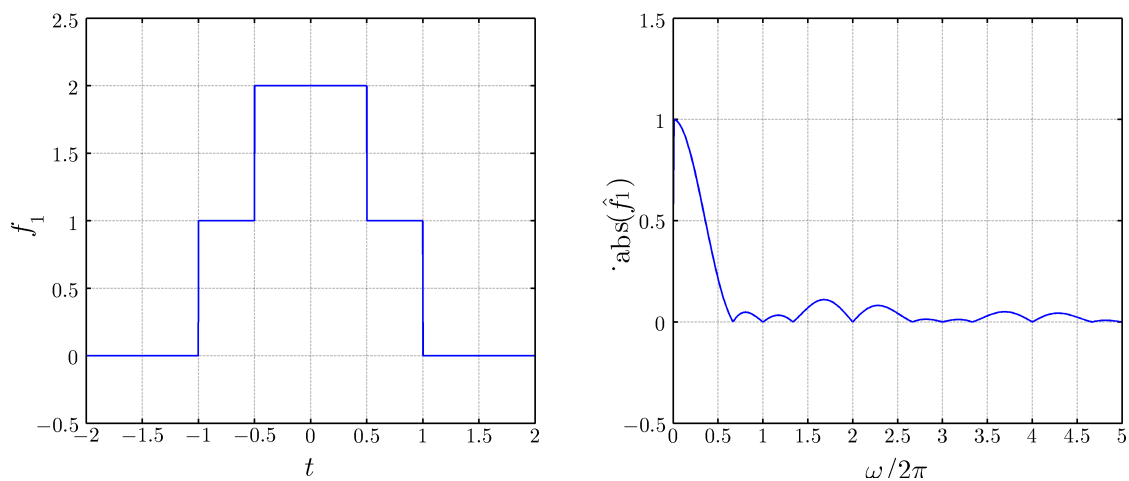


Figura 2 Gráfico de la función f_2 y su espectro de potencia normalizado.

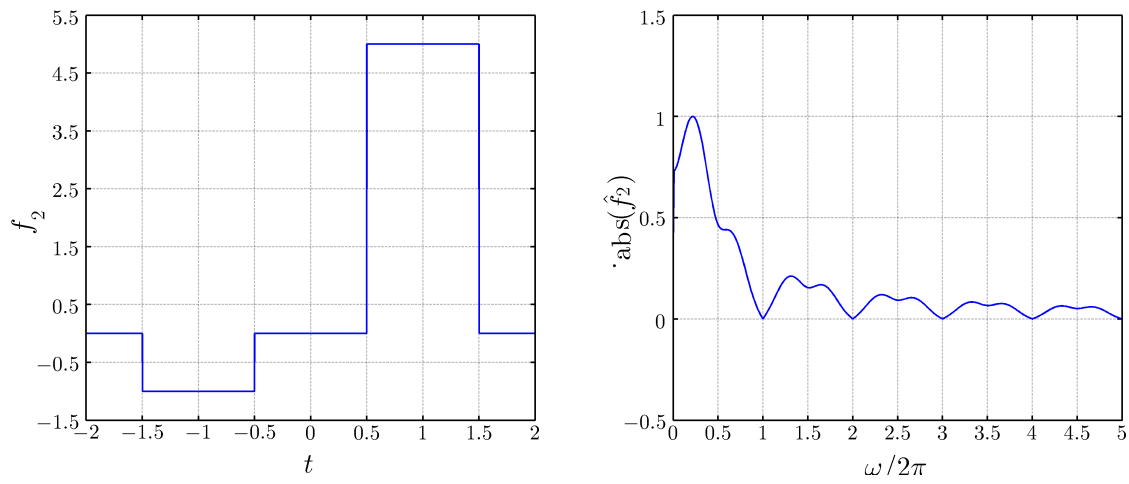


Figura 3 Gráfico de la función f_3 y su espectro de potencia normalizado.

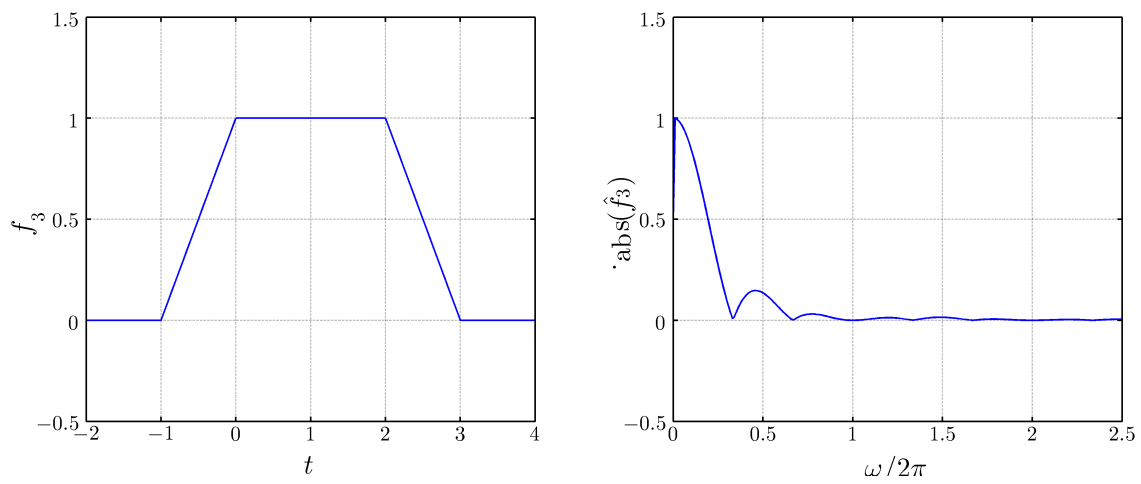
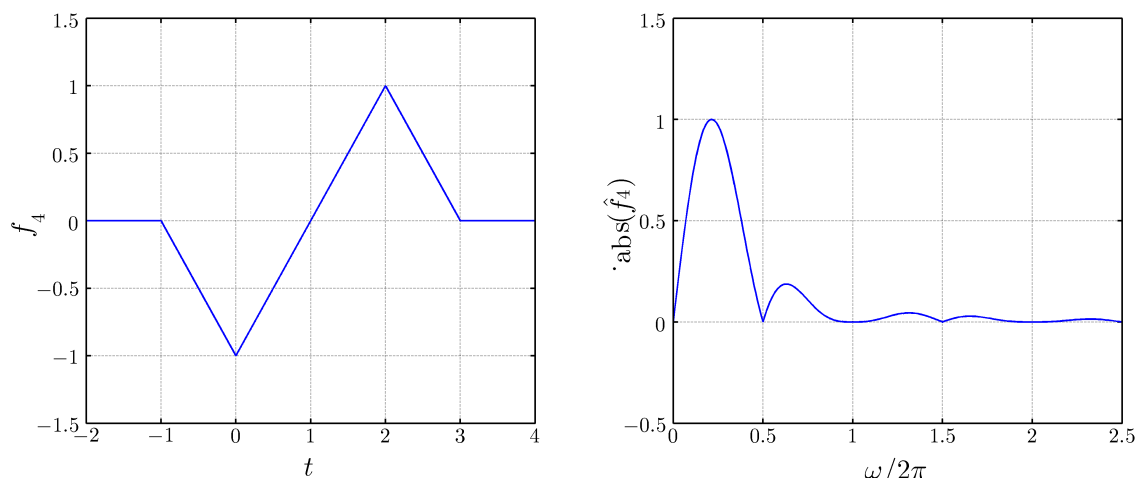


Figura 4 Gráfico de la función f_1 y su espectro de potencia normalizado.



Script 7 Script para obtener las *figs. 1. 2. 3 y 4.*

```
Fs = 1000;
T = 1/Fs;
L = 100000;

t = (-L/2:L/2)*T;
y = p1_f1(t);

plot(t,y)

Y = fft(y);
P2 = abs(Y/L);
P1 = P2(1:L/2+1);
P1(2:end-1) = 2*P1(2:end-1);
P1 = P1/max(P1);
f = Fs*(0:(L/2))/L;

plot(f,P1)

t = (-L/2:L/2)*T;
y = p1_f2(t);

plot(t,y)

Y = fft(y);
P2 = abs(Y/L);
P1 = P2(1:L/2+1);
P1(2:end-1) = 2*P1(2:end-1);
P1 = P1/max(P1);
f = Fs*(0:(L/2))/L;

plot(f,P1)

t = (-L/2:L/2)*T;
y = p1_f3(t);

plot(t,y)

Y = fft(y);
P2 = abs(Y/L);
P1 = P2(1:L/2+1);
P1(2:end-1) = 2*P1(2:end-1);
P1 = P1/max(P1);
f = Fs*(0:(L/2))/L;

plot(f,P1)

t = (-L/2:L/2)*T;
y = p1_f4(t);

plot(t,y)

Y = fft(y);
P2 = abs(Y/L);
P1 = P2(1:L/2+1);
P1(2:end-1) = 2*P1(2:end-1);
P1 = P1/max(P1);
f = Fs*(0:(L/2))/L;

plot(f,P1)
```

De forma analítica, obtenemos las convoluciones solicitadas empleando la definición:

$$y(m) = x(n) * h(n) = \sum_n x(n) h(m-n)$$

Así obtenemos

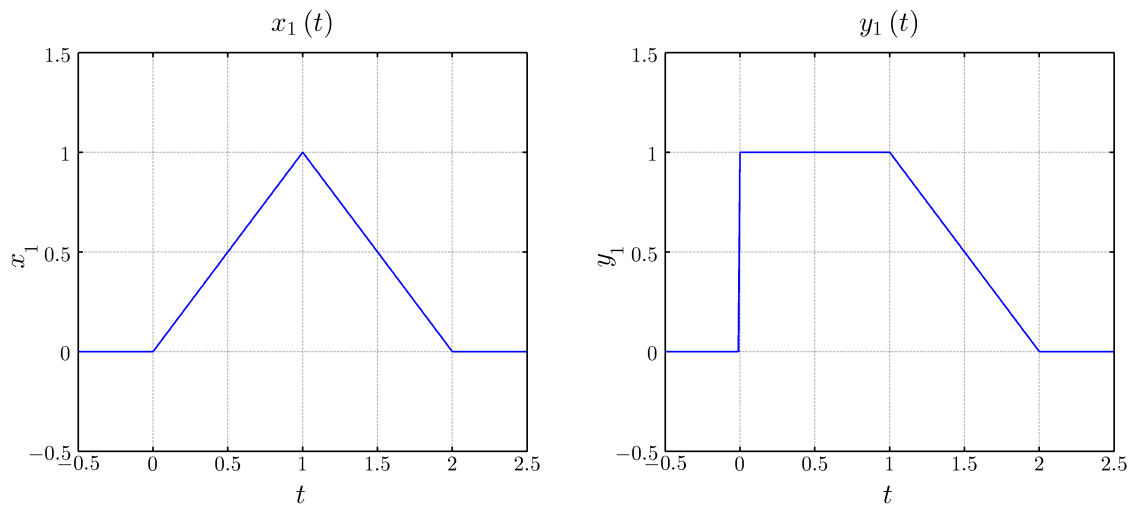
$$\begin{aligned} y_1(m) &= x(n) * h(n) \\ &= \sum_n [\delta(n) + 2\delta(n-1) - \delta(n-3)] [2\delta(m-n+1) + 2\delta(m-n-1)] \\ &= 2\delta(m+1) + 4\delta(m) + 2\delta(m-1) + 2\delta(m-2) - 2\delta(m-4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2(m) &= x(n+2) * h(n) \\ &= \sum_n [\delta(n+2) + 2\delta(n+1) - \delta(n-1)] [2\delta(m-n+1) + 2\delta(m-n-1)] \\ &= 2\delta(m+3) + 4\delta(m+2) + 2\delta(m+1) + 2\delta(m) - 2\delta(m-2) \end{aligned}$$

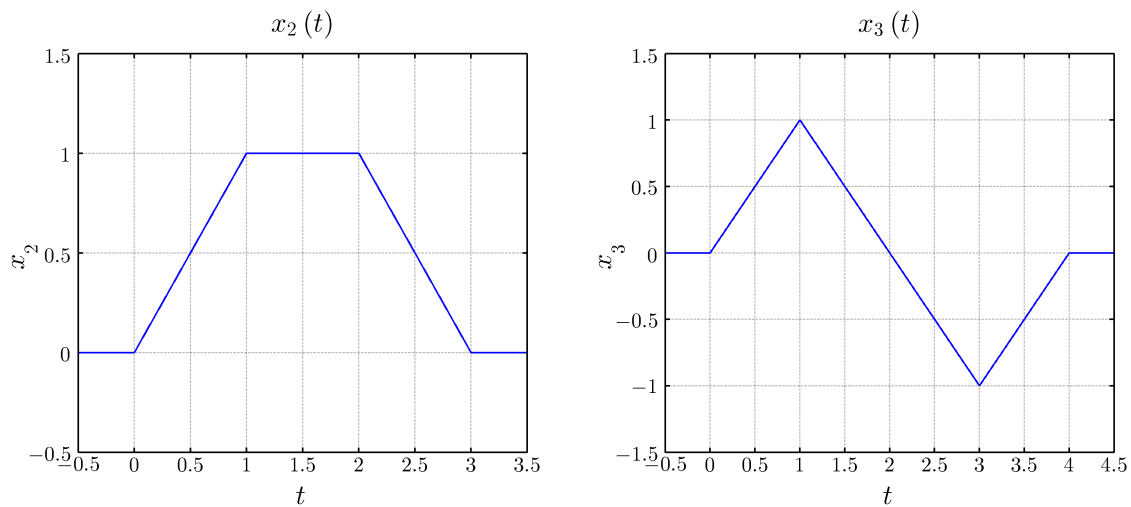
$$\begin{aligned} y_3(n) &= x(n) * h(n+2) \\ &= \sum_n [\delta(n) + 2\delta(n-1) - \delta(n-3)] [2\delta(m-n+3) + 2\delta(m-n+1)] \\ &= 2\delta(m+3) + 4\delta(m+2) + 2\delta(m+1) + 2\delta(m) - 2\delta(m-2) \end{aligned}$$

Problema 2

Considere un sistema LIT cuya respuesta a la señal $x_1(t)$ es $y_1(t)$



Hallar las respuestas del sistema anterior a las siguientes excitaciones:



Solución

Las funciones $x_2(t)$ y $x_3(t)$ se pueden representar en función de $x_1(t)$ como

$$x_2(t) = x_1(t) + x_1(t-1)$$

y

$$x_3(t) = x_1(t) - x_1(t-2).$$

De forma que si consideramos la función de transferencia del sistema como $h(t)$ y

$$y_1(t) = x_1(t) * h(t),$$

entonces

$$y_2(t) = x_1(t) * h(t) + x_1(t-1) * h(t) = y_1(t) + y_1(t-1)$$

y

$$y_3(t) = x_1(t) * h(t) - x_1(t-2) * h(t) = y_1(t) - y_1(t-2).$$

Con estas observaciones escribimos las soluciones a este problema en MATLAB

Script 8 Función $x_1(t)$

```
function f = p2_X1( t )
    switch( nargin )
        case 1, f = (t.*(1 >= t & t >= 0 ) + ...
            (2-t).*(2 >= t & t > 1 )).*(2 >= t & t >= 0 );
        otherwise, fprintf('Revise los argumentos de entrada\n')
    end
```

Script 9 Función $y_1(t)$

```
function f = p2_Y1( t )
    switch( nargin )
        case 1, f = (1.*(1 >= t & t >= 0 ) + ...
            (2-t).*(2 >= t & t > 1 )).*(2 >= t & t >= 0 );
        otherwise, printf('Revise los argumentos de entrada\n')
    end
```

Script 10 Función $x_2(t)$

```
function f = p2_X2( t )
    f = p2_X1( t ) + p2_X1( t-1 );
end
```

Script 11 Función $y_2(t)$

```
function f = p2_Y2( t )
    f = p2_Y1(t) + p2_Y1(t-1);
end
```

Script 12 Función $x_3(t)$

```
function f = p2_X3( t )
    f = p2_X1( t ) - p2_X1( t-2 );
end
```

Script 13 Función $y_3(t)$

```
function f = p2_Y3( t )
    f = p2_Y1(t) - p2_Y1(t-2);
end
```

Figura 5 Función $x_2(t)$ y respuesta $y_2(t)$ empleando los scripts [10](#) y [11](#).

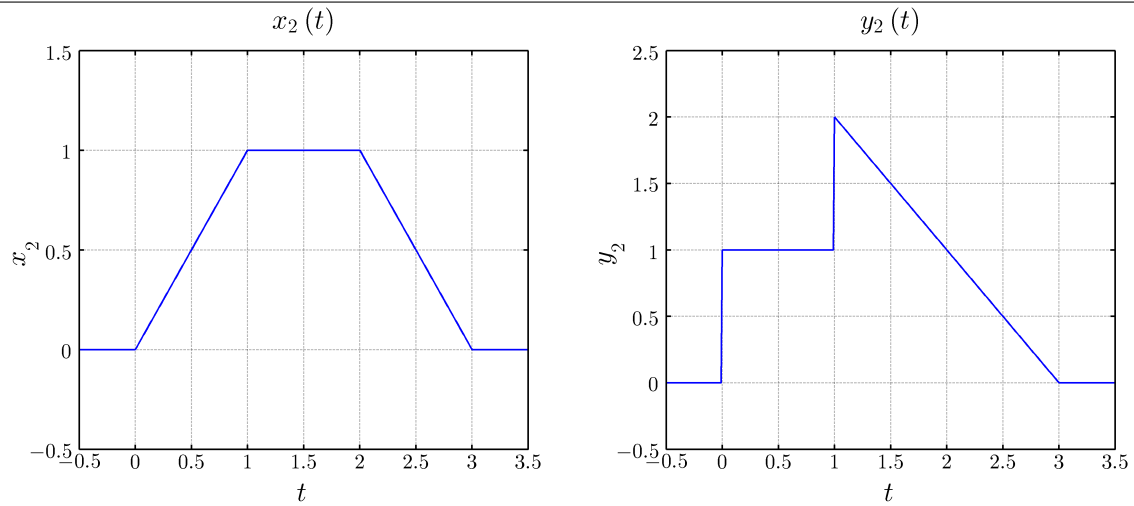
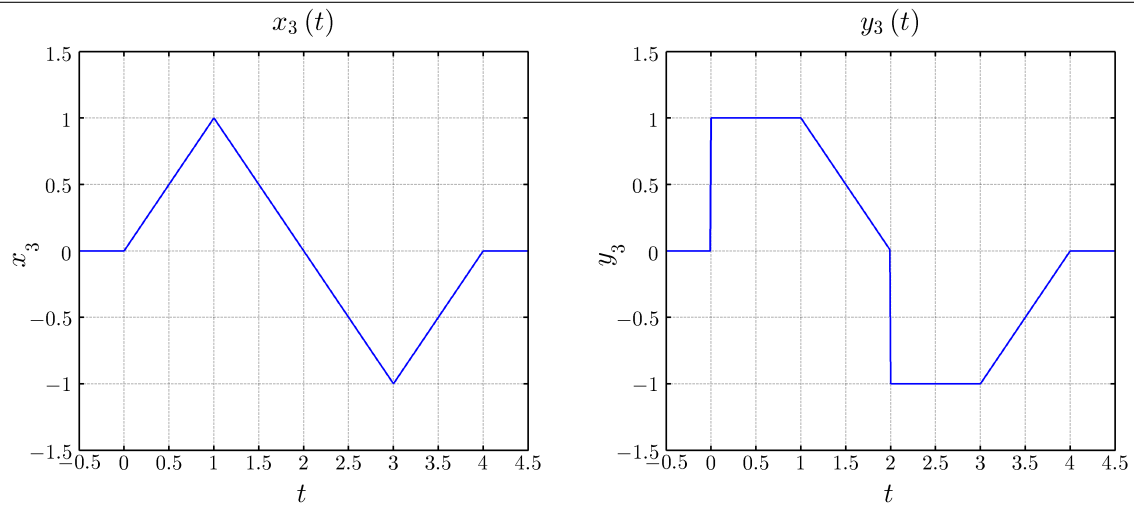


Figura 6 Función $x_3(t)$ y respuesta $y_3(t)$ empleando los scripts [12](#) y [13](#).



Problema 3

Calcular la convolución entre los siguientes pares de señales:

- a) $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-4)$ y $h(n) = 4^n u(2-n)$
- b) $x(n) = u(-n) - u(-n-2)$ y $h(n) = u(n-1) - u(n-4)$
- c) $x(n) = u(n)$ y $h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u(-n)$
- d) $x(t) = \exp(-at) u(t)$ y $h(t) = \exp(-at) u(t)$

Donde $u(n)$ es la función escalón unitario.

Solución

- a) $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-4)$ y $h(n) = 4^n u(2-n)$

$$\begin{aligned} y(m) &= x(n) * h(n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) h(m-n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-4) 4^{m-n} u(2-m+n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{2m-3n} u(n-4) u(n+2-m) \end{aligned}$$

Cuando $m < 6$:

$$\begin{aligned} y(m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{2m-3n} u(n-4) u(n+2-m) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{2m-3n} u(n-4) \\ &= \sum_{n=4}^{\infty} 2^{2m-3n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2m-3(n+4)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2m-3n-12} \\ &= 2^{2m-12} \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-3})^n \\ &= 2^{2m-12} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n \\ &= 2^{2m-12} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{8}}\right) \\ &= \frac{2^{2m-9}}{7} \end{aligned}$$

Cuando $m \geq 6$:

$$\begin{aligned}
y(m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{2m-3n} u(n-4) u(n+2-m) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{2m-3n} u(n+2-m) \\
&= \sum_{n=m-2}^{\infty} 2^{2m-3n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2m-3(n+m-2)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{6-m-3n} \\
&= 2^{6-m} \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-3})^n \\
&= 2^{6-m} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n \\
&= 2^{6-m} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{8}}\right) \\
&= \frac{2^{9-m}}{7}
\end{aligned}$$

Finalmente

$$y(m) = \begin{cases} \frac{2^{2m-9}}{7} & ; \quad n < 6 \\ \frac{2^{9-m}}{7} & ; \quad n \geq 6 \end{cases}$$

b) $x(n) = u(-n) - u(-n-2)$ y $h(n) = u(n-1) - u(n-4)$

$$\begin{aligned}
y(m) &= x(n) * h(n) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) h(m-n) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [u(-n) - u(-n-2)] [u(m-n-1) - u(m-n-4)] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(-n) u(m-n-1) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(-n-2) u(m-n-1) - \\
&\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(-n) u(m-n-4) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(-n-2) u(m-n-4)
\end{aligned}$$

Cuando $m < 0$:

$$y(m) = \sum_{n=-\infty}^{m-1} 1 - \sum_{n=-\infty}^{m-1} 1 - \sum_{n=-\infty}^{m-4} 1 + \sum_{n=-\infty}^{m-4} 1 = 0$$

Cuando $m = 0$:

$$y(m) = \sum_{n=-\infty}^{-1} 1 - \sum_{n=-\infty}^{-2} 1 - \sum_{n=-\infty}^{-3} 1 + \sum_{n=-\infty}^{-3} 1 = 1$$

Cuando $0 < m \wedge m < 3$:

$$y(m) = \sum_{n=-\infty}^0 1 - \sum_{n=-\infty}^{-2} 1 - \sum_{n=-\infty}^{-2} 1 + \sum_{n=-\infty}^{-2} 1 = 2$$

Cuando $m = 3$:

$$y(m) = \sum_{n=-\infty}^0 1 - \sum_{n=-\infty}^{-2} 1 - \sum_{n=-\infty}^{-1} 1 + \sum_{n=-\infty}^{-2} 1 = 1$$

Cuando $m > 3$:

$$y(m) = \sum_{n=-\infty}^0 1 - \sum_{n=-\infty}^{-1} 1 - \sum_{n=-\infty}^0 1 + \sum_{n=-\infty}^{-1} 1 = 0$$

Finalmente

$$y(m) = \begin{cases} 0 & ; \quad m < 0 \vee 3 < m \\ 1 & ; \quad m = 0 \vee m = 3 \\ 2 & ; \quad 0 < m \wedge m < 3 \end{cases}$$

c) $x(n) = u(n)$ y $h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u(-n)$

$$\begin{aligned}
 y(m) &= x(n) * h(n) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) h(m-n) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} u(n-m) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} u(n) u(n-m)
 \end{aligned}$$

Cuando $m < 0$:

$$\begin{aligned}
 y(m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} u(n) u(n-m) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} \\
 &= 2^m \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
 &= 2^{1+m}
 \end{aligned}$$

Cuando $0 \leq m$:

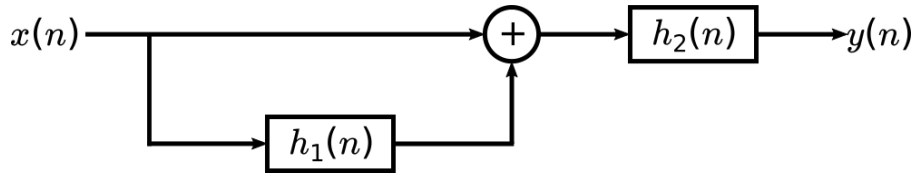
$$\begin{aligned}
 y(m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} u(n) u(n-m) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} \\
 &= 2^m \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
 &= 2^{1+m}
 \end{aligned}$$

d) $x(t) = \exp(-at) u(t)$ y $h(t) = \exp(-at) u(t)$

$$\begin{aligned}
 y(\tau) &= x(t) * h(t) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) h(\tau-t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-at) u(t) \exp(-a\tau + at) u(t-\tau) dt \\
 &= \int_0^{\tau} \exp(-a\tau) dt \\
 &= \exp(-a\tau) \tau
 \end{aligned}$$

Problema 4

Para el diagrama de bloques mostrado



Donde

$$h_1(n) = \beta \delta(n - 1)$$

y

$$h_2(n) = \exp(\alpha) \delta(n)$$

- Escribir la ecuación en diferencias que relaciona la entrada con la salida
- Hallar α y β , de tal forma que la salida sea el promedio entre la entrada en el instante n y la entrada en el instante $n - 1$.

Solución

- La ecuación en diferencias se obtiene de calcular

$$y(n) = [(x + x * h_1) * h_2](n)$$

Resolviendo $[x * h_1](n)$, tenemos

$$\begin{aligned} y_1(n) &= x(m) * h_1(m) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h_1(n - m) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \beta \delta(n - m - 1) \\ &= \beta x(n - 1) \end{aligned}$$

Haciendo $y_2(n) = y_1(n) + x(n)$, calculamos $[y_2 * h_2](n)$ como

$$\begin{aligned} y(n) &= y_2(m) * h_2(m) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_2(m) h_2(n - m) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [y_1(m) + x(m)] \exp(\alpha) \delta(n - m) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\beta x(m - 1) + x(m)] \exp(\alpha) \delta(n - m) \\ &= [\beta x(n - 1) + x(n)] \exp(\alpha) \end{aligned}$$

De modo que la ecuación en diferencias del sistema queda expresada como

$$y(n) = [\beta x(n-1) + x(n)] \exp(\alpha)$$

- b) Para que la señal de salida sea igual al promedio de los valores de la señal de entrada en el instante n y en el instante $n-1$ se debe resolver el sistema

$$\begin{cases} \exp(\alpha) &= \frac{1}{2} \\ \exp(\alpha) \beta &= \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1)$$

De donde resulta

$$\alpha = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \wedge \beta = 1$$

Problema 5

Dada la siguiente ecuación en diferencias

$$y(n] = -ay(n-1) + bx(n) + cx(n-1),$$

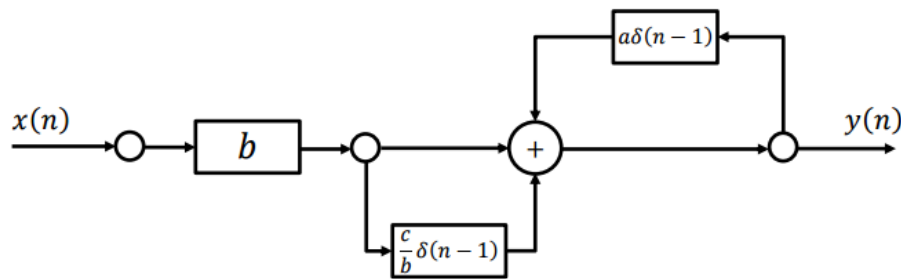
realizar una representación en diagrama de bloques.

Solución

Expresando la ecuación en diferencias como:

$$y(n] = -ay(n) * \delta(n-1) + bx(n) * \delta(n) + cx(n-1) * \delta(n-1)$$

De modo que el diagrama de bloques resultante es



Problema 6

Realizar en MATLAB la convolución del siguiente par de señales:

1. $x(n) = (-1)^n (u(n) - u(-n-8))$
2. $h(n) = u(n) - u(n-8)$

Graficar la señal resultante, $y(n) = x(n) * h(n)$. Usar el comando `stem`.

Solución

xpresamos las funciones x y h en términos de la función escalón unitario u .

Script 14 Función escalón unitario

```
function f = escalon(x,y,z)
    switch (nargin)
        case 1, f = 1.*(x>=0);
        case 2, f = 1.*(x>=y);
        case 3, f = z.*(x>=y);
        otherwise
            fprintf('Error: Revise los argumentos de entrada')
    end
```

Script 15 Función $x(n)$

```
function f = p6_X( n )
    f = ((-1).^n).*(escalon(n)-escalon(-n-8));
end
```

Script 16 Función $h(n)$

```
function f = p3_H( n )
    f = escalon(n)-escalon(n-8);
end
```

Figura 7 Gráfico de la función $x(n)$ del *script 15*.

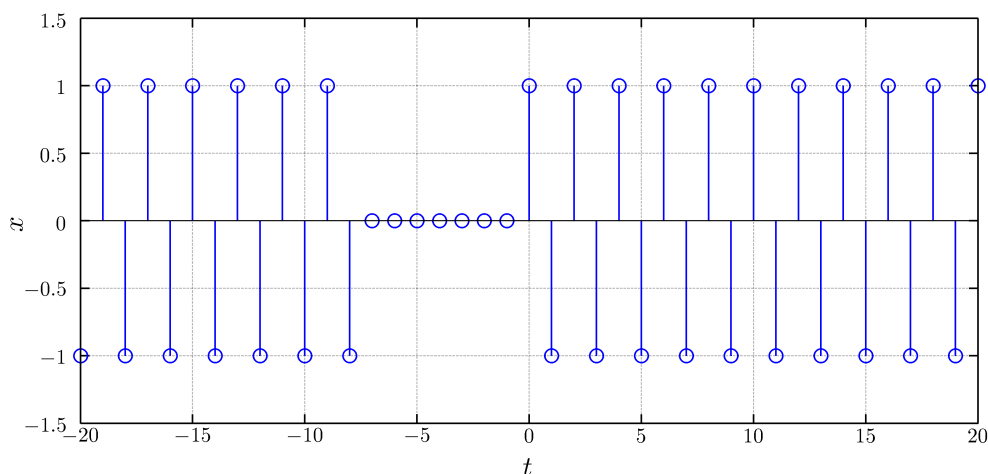
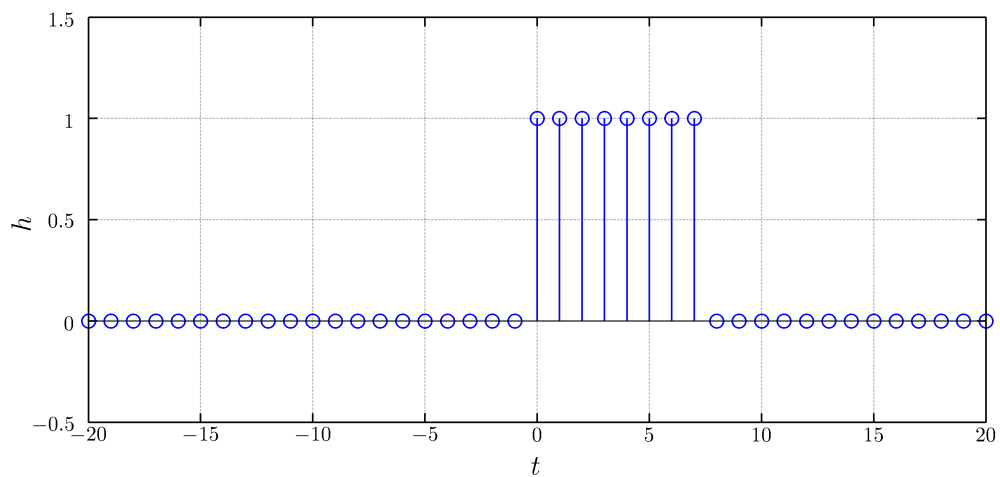


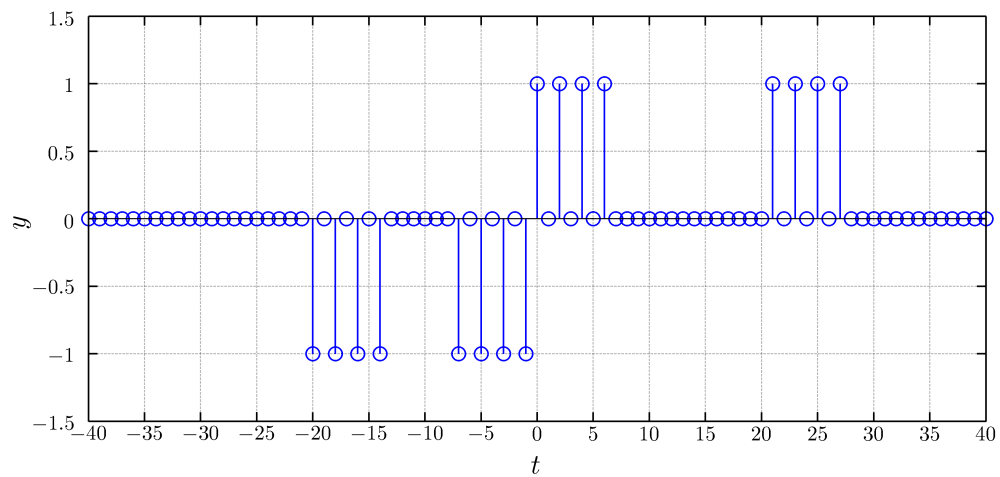
Figura 8 Gráfico de la función $x(n)$ del *script 16*.



Script 17 Convolución de las señales $x(n)$ y $h(n)$

```
n = -20:1:20;  
X = p6_X(n);  
H = p6_H(n);  
Y = conv(X,H);  
stem(-40:1:40,Y)
```

Figura 9 Gráfico de la función $y(n) = x(n) * h(n)$ del *script 17*.



Problema 7

Considere un sistema lineal e invariante en el tiempo, causal, cuya entrada $x(n]$ y salida $y(n]$ estén relacionadas por la ecuación de diferencias:

$$y(n) = 0,25y(n-1) + x(n)$$

Determine $y(n]$ si $x(n) = \delta(n-1)$.

Grafique en MATLAB la salida $y(n]$, use el comando `stem`.

Solución

Para $n = 1$ tenemos

$$\begin{aligned} y(1) &= 0,25y(0) + x(1) \\ &= 0,25y(0) + \delta(0) \\ &= 0,25y(0) + 1 \end{aligned}$$

Suponiendo que la señal $y(n]$ es nula antes de $n = 1$ tenemos

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y(1) &= 1 \end{aligned}$$

Con estos valores en la definición de $y(n]$ obtenemos que

$$y(n) = \frac{1}{4^{n-1}}u(n-1)$$

La implementación y la gráfica que se obtienen de MATLAB se muestran en el *script 18* y la *script 10* respectivamente.

Script 18 Función $y(n]$

```
function f = p7_Y( n )  
    f = ((0.25).^(n-1)).*escalon(n-1);  
end
```

Figura 10 Gráfico de la función $y(n]$ calculada *figura 18*.

