Laboratorio Nº4

Transformada de Fourier y filtros

Martín Josemaría Vuelta Rojas

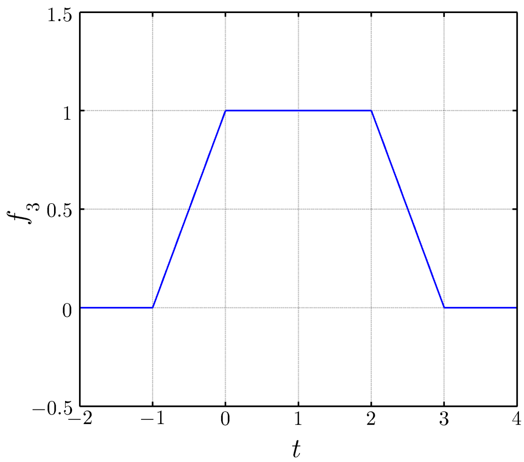
Problema 1

Graficar en MATLAB las señales a y b, y hallar la transformada de Fourier en forma analítica (usar propiedades):

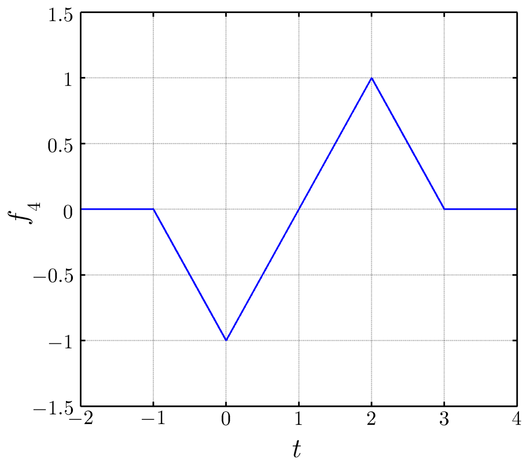
a) $f_1(t) = G\left(\frac{t}{2}\right) - G(t)$

b) $f_2(t) = 5G(t-1) - G(t+1)$

c) $f_3(t)$



d) $f_4(t)$



Nota: G es la función compuerta unitaria.

Solución

Definimos la función compuerta unitaria, G, empleando la función Θ de Heaviside de la siguiente manera

$$G(t) = \Theta\left(t + \frac{1}{2}\right) - \Theta\left(t - \frac{1}{2}\right).$$

Empleando la función G podemos definir la función triángulo, Λ, como

$$\Lambda(t) = (1 - |t|)\, G\left(\frac{t}{2}\right)$$

Con estas dos funciones definimos las funciones f_3 y f_4 como

$$f_3(t) = \Lambda(t) + \Lambda(t-1) + \Lambda(t-2),$$

$$f_4(t) = -\Lambda(t) + \Lambda(t-1).$$

Empleando la transformada de Fourier definida por

$$\mathcal{F}(f, t|\omega) = \widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t)\, dt$$

y que

$$\widehat{G}(\omega) = \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

$$\widehat{\Lambda}(\omega) = \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

tenemos

a) $\widehat{f_1}(\omega)$

$$\begin{aligned}
\widehat{f_1}(\omega) &= \mathcal{F}\left(G, \frac{t}{2}\middle|\, \omega\right) - \mathcal{F}(G, t|\omega) \\
&= 2\mathcal{F}(G, t|2\omega) - \mathcal{F}(G, t|\omega) \\
&= 2\operatorname{sinc}(\omega) - \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)
\end{aligned}$$

b) $\widehat{f_2}(\omega)$

$$\begin{aligned}
\widehat{f_2}(\omega) &= 5\mathcal{F}(G, t-1|\omega) - \mathcal{F}(G, t+1|\omega) \\
&= 5\exp(-i\omega)\,\mathcal{F}(G, t|\omega) - \exp(i\omega)\,\mathcal{F}(G, t|\omega) \\
&= 2\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)(2\cos(\omega) - 3i\sin(\omega))
\end{aligned}$$

c) $\widehat{f_3}(\omega)$

$$\begin{aligned}
\widehat{f_3}(\omega) &= \mathcal{F}(\Lambda, t|\omega) + \mathcal{F}(\Lambda, t-1|\omega) + \mathcal{F}(\Lambda, t-2|\omega) \\
&= \mathcal{F}(\Lambda, t|\omega) + \exp(-i\omega)\,\mathcal{F}(\Lambda, t|\omega) + \exp(-2i\omega)\,\mathcal{F}(\Lambda, t|\omega) \\
&= \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \exp(-i\omega)\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \exp(-2i\omega)\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
&= (1 + 2\cos(\omega))\exp(-i\omega)\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)
\end{aligned}$$

d) $\widehat{f_1}(\omega)$

$$\begin{aligned}
\widehat{f_3}(\omega) &= -\mathcal{F}(\Lambda, t|\omega) + \mathcal{F}(\Lambda, t-2|\omega) \\
&= -\mathcal{F}(\Lambda, t|\omega) + \exp(-i\omega)\,\mathcal{F}(\Lambda, t|\omega) \\
&= -\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \exp(-2i\omega)\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
&= (\exp(-2i\omega) - 1)\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)
\end{aligned}$$

En MATLAB implementamos las funciones

Script 1 Función compuerta unitaria, $G(t)$.

```
function f = gate(t)
    f = heaviside(t+1/2)-heaviside(t-1/2);
end
```

Script 2 Función triángulo, $\Lambda(t)$.

```
function f = triangle(t)
    f = gate(t/2).*(1-abs(t));
end
```

Script 3 Función $f_1(t)$.

```
function f = p1_f1(t)
    f = gate(0.5*t) + gate(t);
end
```

Script 4 Función $f_2(t)$.

```
function f = p1_f2(t)
    f = 5*gate(t - 1) - gate(t + 1);
end
```

Script 5 Función $f_3(t)$.

```
function f = p1_f3(t)
    f = triangle(t)+triangle(t-1)+triangle(t-2);
end
```

Script 6 Función $f_4(t)$.

```
function f = p1_f4(t)
    f = -triangle(t)+triangle(t-2);
end
```

Figura 1 Gráfico de la función f_1 y su espectro de potencia normalizado.

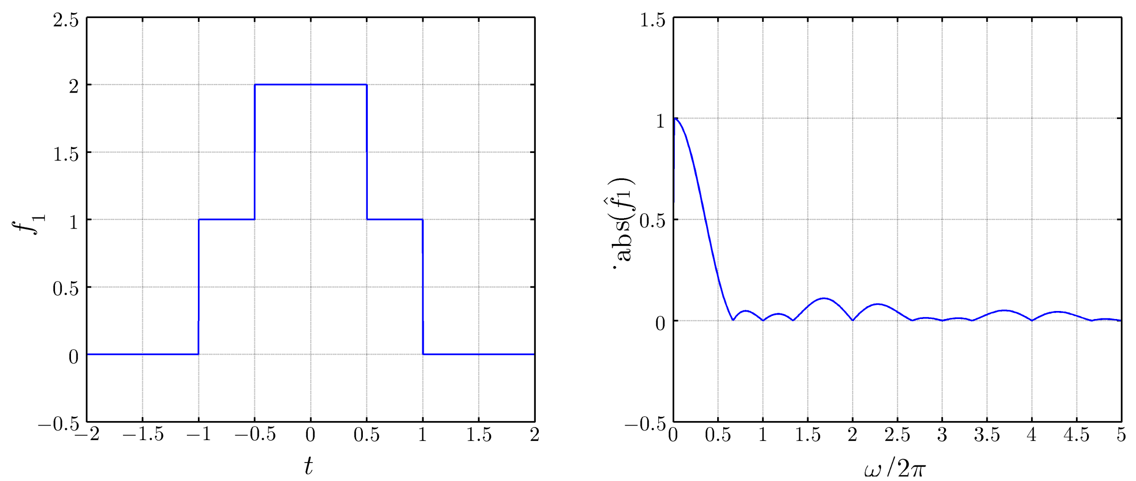


Figura 2 Gráfico de la función f_2 y su espectro de potencia normalizado.

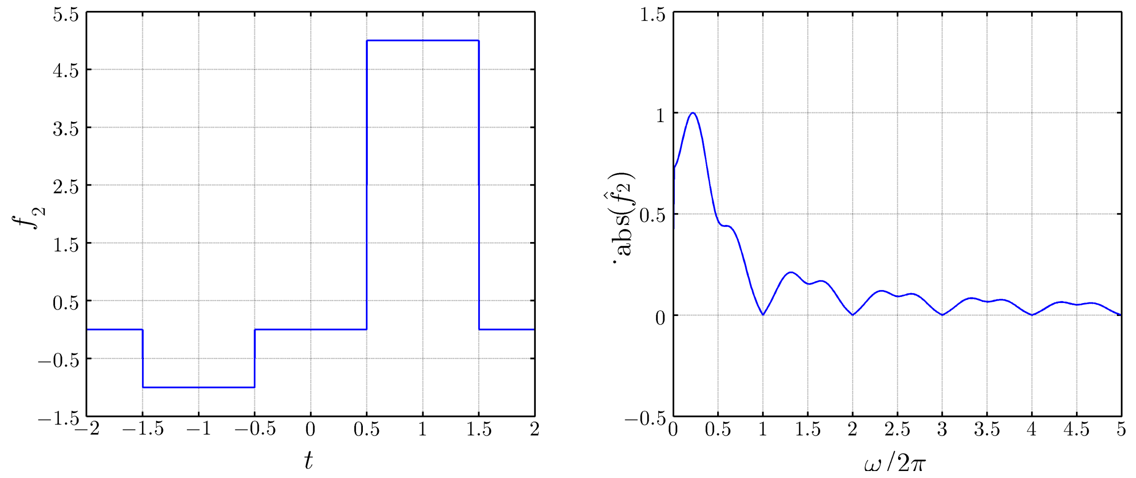


Figura 3 Gráfico de la función f_3 y su espectro de potencia normalizado.

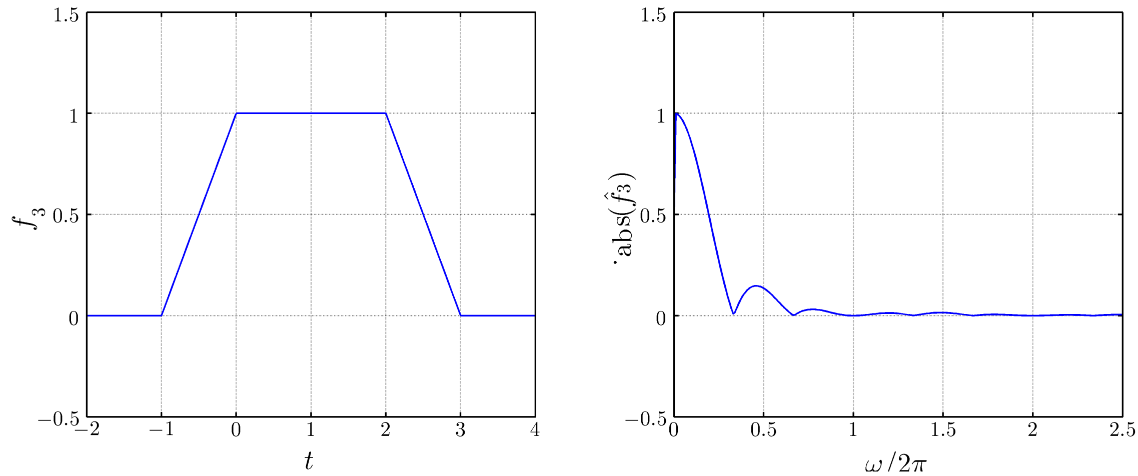
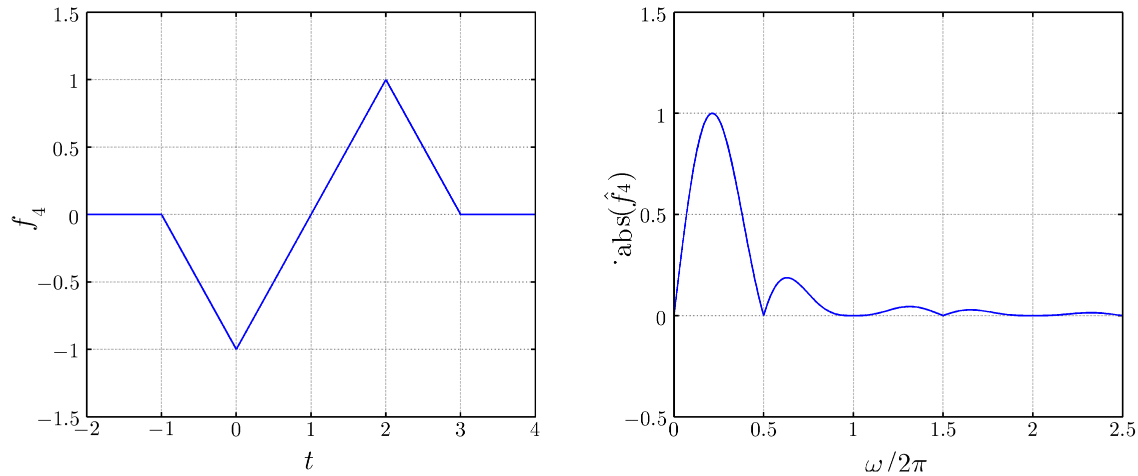


Figura 4 Gráfico de la función f_1 y su espectro de potencia normalizado.

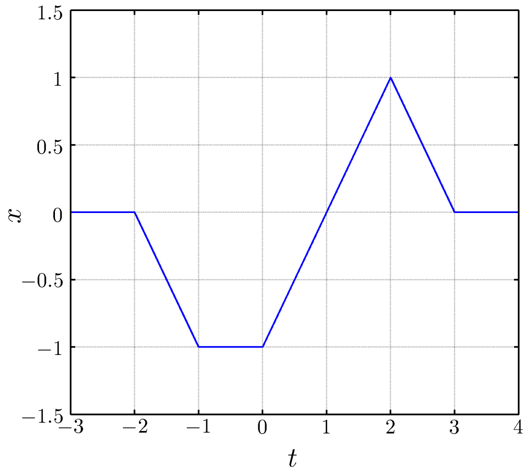


Script 7 Script para obtener las *figs.* 1, 2, 3 y 4.

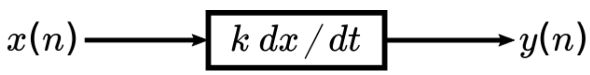
```
Fs = 1000;
T  = 1/Fs;
L  = 100000;

t = (-L/2:L/2)*T;
y = p1_f1(t);

plot(t,y)

Y = fft(y);
P2 = abs(Y/L);
P1 = P2(1:L/2+1);
P1(2:end-1) = 2*P1(2:end-1);
P1 = P1/max(P1);
f = Fs*(0:(L/2))/L;

plot(f,P1)

t = (-L/2:L/2)*T;
y = p1_f2(t);

plot(t,y)

Y = fft(y);
P2 = abs(Y/L);
P1 = P2(1:L/2+1);
P1(2:end-1) = 2*P1(2:end-1);
P1 = P1/max(P1);
f = Fs*(0:(L/2))/L;

plot(f,P1)

t = (-L/2:L/2)*T;
y = p1_f3(t);

plot(t,y)

Y = fft(y);
P2 = abs(Y/L);
P1 = P2(1:L/2+1);
P1(2:end-1) = 2*P1(2:end-1);
P1 = P1/max(P1);
f = Fs*(0:(L/2))/L;

plot(f,P1)

t = (-L/2:L/2)*T;
y = p1_f4(t);

plot(t,y)

Y = fft(y);
P2 = abs(Y/L);
P1 = P2(1:L/2+1);
P1(2:end-1) = 2*P1(2:end-1);
P1 = P1/max(P1);
f = Fs*(0:(L/2))/L;

plot(f,P1)
```

Problema 2

Hallar la transformada de Fourier de $x(t)$ y graficar en Matlab:



Si $x(t)$ pasa a través del bloque de la figura, calcule la transformada de Fourier de $y(t)$.



Solución

La función $x(t)$ se puede modelar empleando la función triángulo como

$$x(t) = -\Lambda(t+1) - \Lambda(t) + \Lambda(t-2).$$

Así, la transformada de fourier vendrá dada por:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\omega) &= -\mathcal{F}(\Lambda, t+1|\omega) - \mathcal{F}(\Lambda, t|\omega) + \mathcal{F}(\Lambda, t-2|\omega) \\
&= -\mathcal{F}(\Lambda, t+1|\omega) - \mathcal{F}(\Lambda, t|\omega) + \mathcal{F}(\Lambda, t-2|\omega) \\
&= -\exp(i\omega)\,\mathcal{F}(\Lambda, t|\omega) - \mathcal{F}(\Lambda, t|\omega) + \exp(-2i\omega)\,\mathcal{F}(\Lambda, t|\omega) \\
&= (-\exp(i\omega) - 1 + \exp(-2i\omega))\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)
\end{aligned}$$

En MATLAB implementamos la función $x(t)$ en términos de la función triángulo tal como muestra el *script* 8 y calculamos su espectro de potencia según el *script* 9 para obtner la *figura* 5

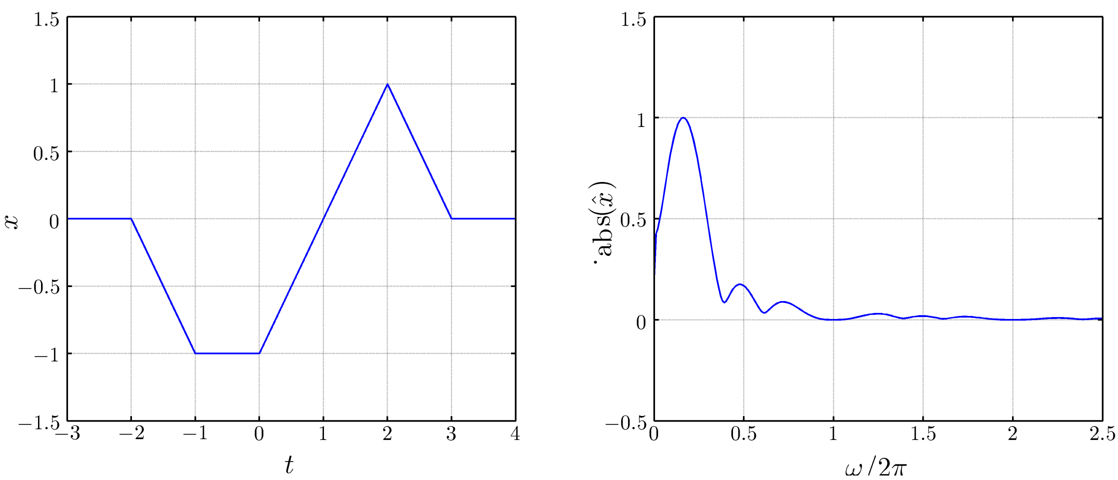
Script 8 Función $x(t)$.

```
function f = p2_x(t)
  f = -triangle(t+1)-triangle(t)+triangle(t-2);
end
```

Script 9 Función $x(t)$.

```
Fs = 1000;
T  = 1/Fs;
L  = 100000;

t = (-L/2:L/2)*T;
x = p2_x(t);

plot(t,x)

X = fft(x);
P2 = abs(X/L);
P1 = P2(1:L/2+1);
P1(2:end-1) = 2*P1(2:end-1);
P1 = P1/max(P1);
f = Fs*(0:(L/2))/L;

plot(f,P1)
```

Figura 5 Función $x(t)$ y espectro su espectro de potencia normalizado.



La respuesta del sistema, representado por el bloque, al paso de la señal $x(t)$ será

$$y(t) = kx(\tau) * \frac{dx(\tau)}{d\tau}$$

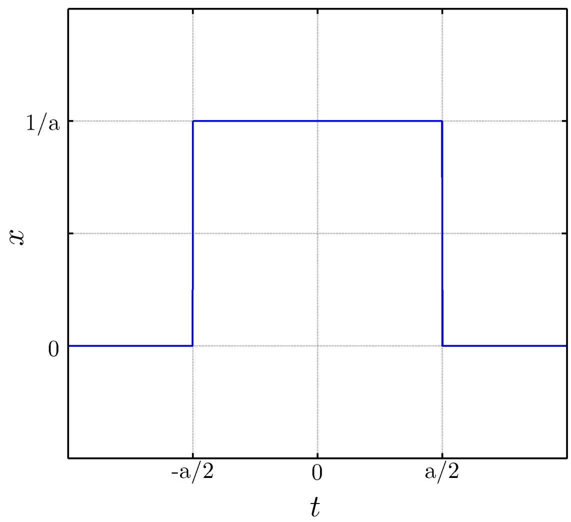
La transformada de Fourier de la salida $y(t)$ estará dada por

$$\begin{aligned}
\widehat{y}(\omega) &= \mathcal{F}\left(kx * \frac{dx}{dt}, t \middle| \omega\right) \\
&= k\mathcal{F}(x, t|\omega)\,\mathcal{F}\left(\frac{dx}{dt}, t \middle| \omega\right) \\
&= i\omega k\mathcal{F}(x, t|\omega)\,\mathcal{F}(x, t|\omega) \\
&= i\omega k\left(-\exp(i\omega) - 1 + \exp(-2i\omega)\right)^2 \operatorname{sinc}^4\left(\frac{\omega}{2}\right)
\end{aligned}$$

Problema 3

Halle y grafíque la transformada de Fourier de las siguientes señales:

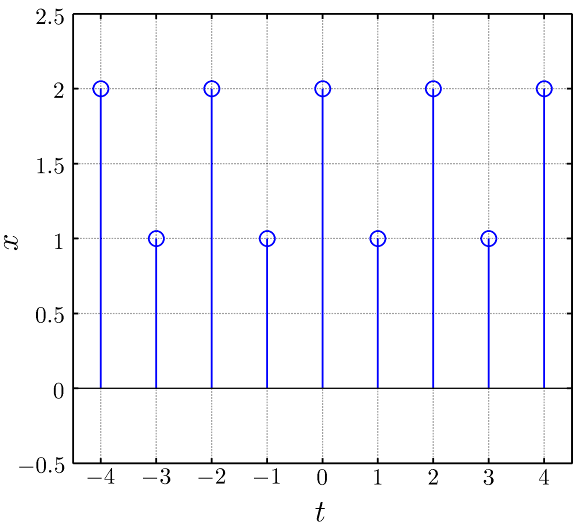
a) $x(t)$



b) La función periódica mostrada en la figura:

$$x(n) = \begin{cases} 1 & ; \quad \text{Si } n \text{ impar} \\ 2 & ; \quad \text{Si } n \text{ par} \end{cases}$$

con $n \in \mathbb{Z}$.



c) $f(t)$

$$f(t) = t^2 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Solución

a) Modelamos la función $x\left(t\right)$ empleando la función Θ de Heavisde.

$$x\left(t\right)=\frac{1}{a}\left(\Theta\left(t+\frac{a}{2}\right)-\Theta\left(t-\frac{a}{2}\right)\right).$$

De modo que la transformada de Fourier estará dada por

$$\begin{aligned}\widehat{x}\left(\omega\right)&=\frac{1}{a}\left(\mathcal{F}\left(\Theta,t+\frac{a}{2}\middle|\,\omega\right)-\mathcal{F}\left(\Theta,t-\frac{a}{2}\middle|\,\omega\right)\right)\\&=\frac{1}{a}\left(\exp\left(i\omega\frac{a}{2}\right)\mathcal{F}\left(\Theta,t|\omega\right)-\exp\left(-i\omega\frac{a}{2}\right)\mathcal{F}\left(\Theta,t|\omega\right)\right)\\&=\frac{1}{a}\left(-\frac{i}{\omega}\exp\left(i\omega\frac{a}{2}\right)+\frac{i}{\omega}\exp\left(-i\omega\frac{a}{2}\right)\right)\\&=\operatorname{sinc}\left(\frac{a\omega}{2}\right)\end{aligned}$$

b) La transformada de $f\left(t\right)$ viene dada por

$$\begin{aligned}\widehat{f}\left(\omega\right)&=\mathcal{F}\left(f,-\frac{t}{\tau}\middle|\,\omega\right)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}t^2\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\exp\left(-i\omega t\right)dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}t^2\exp\left(-i\left(\omega-\frac{i}{\tau}\right)t\right)dt\\&=-2\pi\delta''\left(\omega-\frac{i}{\tau}\right)\end{aligned}$$

Donde δ es la función Delta de Dirac.

Problema 4

Dada la señal en el dominio del tiempo:

$$y(t) = \sin(t) + 0{,}25\sin(10t)$$

a) Hacer un programa para graficar la señal para 4 periodos, con una frecuencia de muestreo de $100\ Hz$.

b) Hacer un programa para graficar el espectro de frecuencias de la señal.

c) ¿Cuál es la amplitud y la frecuencia correspondiente a cada pico?

Solución

a) El período de la función dada es de 2π.

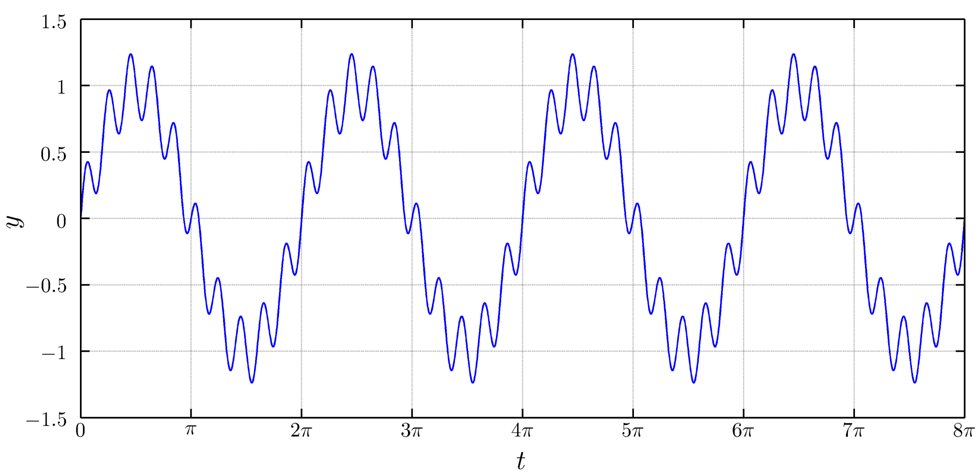
Script 10 Función $y(n)$

```
function f = p4_y(t)
    f = sin(t) + 0.25*sin(10*t);
end
```

Script 11 Función $y(n)$

```
Fs = 100;
T  = 1/Fs;
t = 0:T:8*pi;
y = p4_y(t);
plot(t, y)
```

Figura 6 Gráfica de la función $y(t)$

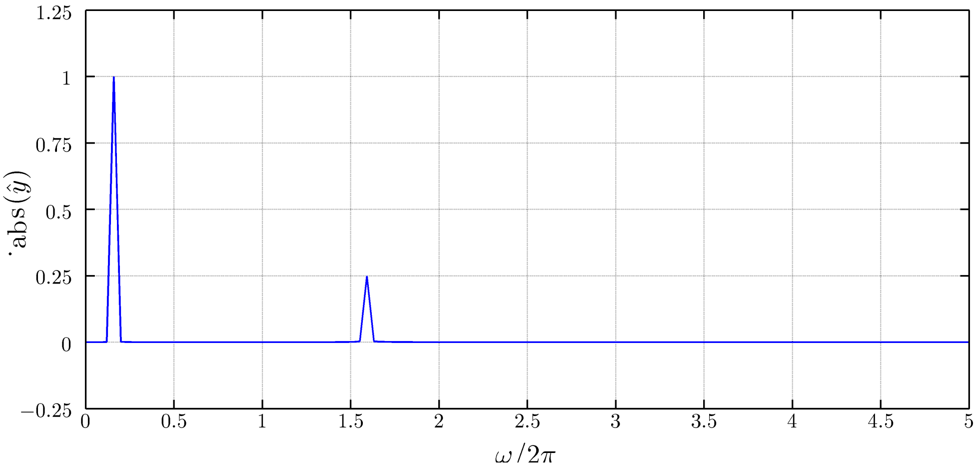


b) Calculamos la transformada de Fourier y graficamos el espectro de potencias

Script 12 Función $y(n)$

```
L = length(t);
Y = fft(y);
P = abs(Y/L);
P = P(1:L/2+1);
P(2:end-1) = 2*P(2:end-1);
f = Fs*(0:(L/2))/L;
plot(f, P)
```

Figura 7 Gráfica del espectro de potencias de $y\,(t)$



c) En el espectro de potencias se encuentran dos picos con frecuencias de $1{,}5911$ Hz y $0{,}1591$ Hz con amplitudes de $0{,}2499$ y $0{,}9999$ respectivamente, que coinciden con los valores calculados de las amplitudes de $0{,}25$ y $1{,}00$ para las frecuencias $0{,}1592$ Hz y $1{,}5915$ Hz respectivamente.

Problema 5

Descargue el archivo `datos.txt`[1] de la web, que representa una señal de audio. La frecuencia de muestreo es de $F_s = 8000\ Hz$. Hacer un programa en Matlab para que realice lo siguiente:

a) Hallar el número de datos N.

b) Hallar la duración de la señal.

c) Hallar el valor medio de la señal.

d) Graficar la señal $x(t)$.

e) Graficar el espectro de frecuencias.

Solución

Script 13 Script para graficar la funcion $y(n)$, su espectro de frecuencias y los parámetros solicitados.

```
Fs = 8000;
T  = 1/Fs;
y = load('datos.txt');
L = length(y);
t = (1:L)*T;
plot(t, y)

Y = fft(y);
P = abs(Y/L);
P = P(1:floor(L/2)+1);
P(2:end-1) = 2*P(2:end-1);
f = Fs*(0:floor(L/2))/L;
plot(f, P)

fprintf('Señal y(t) contenida en el archivo ''datos.txt'':\n')
fprintf('* Cantidad de datos: %d\n', L)
fprintf('* Duracion         : %.5f s\n', max(t))
fprintf('* Valor medio      : %.5f\n', mean(y))
```

Script 14 Resultado de la ejecución del *script* 13

```
>> problema05
Señal y(t) contenida en el archivo 'datos.txt':
* Cantidad de datos: 76709
* Duracion         : 9.58863 s
* Valor medio      : 0.00007
```

[1] http://fenlab.9k.com/pds/datos.rar

Figura 8 Gráfica de $y\,(t)$

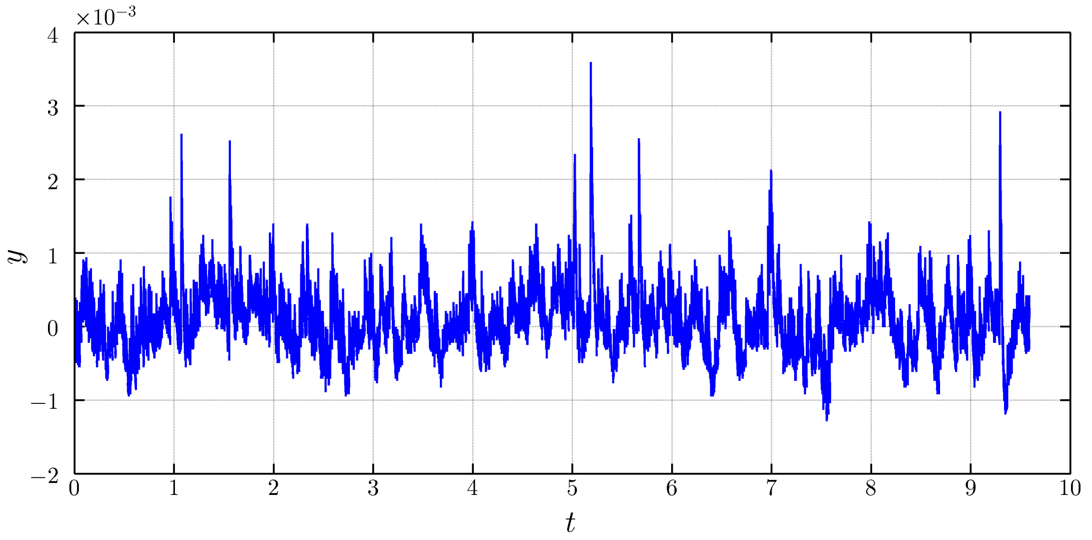
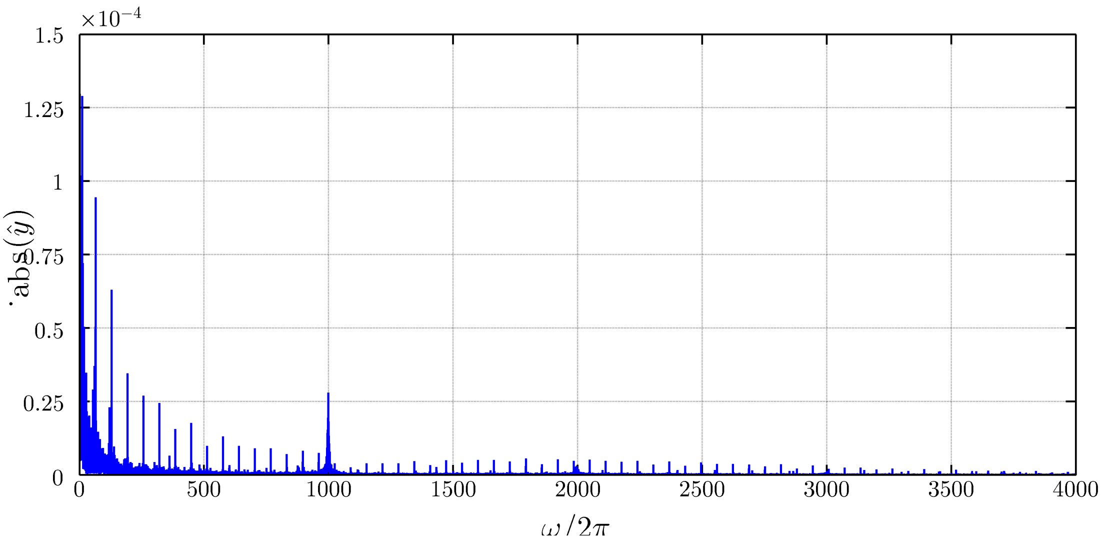


Figura 9 Gráfica del espectro de potencias de $y\,(t)$



Problema 6

En MATLAB realizar lo siguiente

a) Calcule y grafique la transformada de Fourier de la función triángulo:

$$x(t) = \Lambda\left(\frac{t}{2}\right)$$

b) La integral que define la transformada de Fourier puede calcularse numéricamente, para cada valor de frecuencia, utilizando la suma de Riemman. Para subdominios de longitud T se tiene:

$$X(f) = \sum_{N=-\infty}^{\infty} \Lambda\left(\frac{NT}{2}\right)\exp(-2\pi j f NT)T$$

Calcular para $T = 0{,}8$ y para el rango de frecuencia de 0 a 2 con intervalos de $0{,}125$ ejecutando las siguientes sentencias en Matlab:

```
T = 0.8;
n = [-2:2];
f = [0:0.125:2];
X = zeros(size(f)) ;
for i = 1: length(f)
    X(i) = sum(T*triangle(n*T/2).*exp(-j*2*pi*f(i)*n*T));
end
```

c) Repetir para T 10 veces menor.

Nota: La función Λ es la función triángulo $\Lambda(t)$ que Ud. debe implementar en MATLAB.

Solución

Implementamos la función triangulo $\Lambda(t)$ como se indica en el *script 15*[2].

Script 15 Implementación de la función $\Lambda(t)$

```
function f = triangle(t)
    f = gate(t/2).*(1-abs(t));
end
```

La tranformada de Fourier de $x(t) = \Lambda(t/2)$ vendrá dada por.

$$\begin{aligned}
\widehat{x}(\omega) &= \mathcal{F}(x, t|\omega) \\
&= \mathcal{F}\left(\Lambda, \frac{t}{2}\middle|\,\omega\right) \\
&= 2\mathcal{F}(\Lambda, t|2\omega) \\
&= 2\,\mathrm{sinc}^2(\omega) \\
&= 2\,\mathrm{sinc}^2(2\pi f)
\end{aligned}$$

$$\widehat{x}(f) = 2\,\mathrm{sinc}^2(2\pi f)$$

[2]Véase el problema 1 para mas detalles de las implementación

Ejecutamos el *script* dado en el enunciado para t = 0.8 y t = 0.08 y graficámos $|\hat{x}|$ vs. f

Figura 10 Gráfico de la función $\hat{x}(f)$ para $T = 0{,}8$ y $T = 0{,}08$