

软件工程学院形式语言与自动机理论作业

实验课程：形式语言与自动机理论

年级：2023 级

姓名：顾翌炜

实验编号：ch-1

学号：10235101527

作业日期：2025/02/26

课后作业

- Fibonacci numbers

- basis: $F_0 = 0, F_1 = 1$

- recursion: if $F_i = m, F_{i+1} = n$ then $F_{i+2} = m + n$ for $i \geq 0$

- 使用数学归纳法证明:

$$F_k = \frac{\varphi^k - \psi^k}{\varphi - \psi} \text{ where } \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

解答

1. 基础步骤:

首先证明公式对于 $k = 0$ 和 $k = 1$ 成立。

对于 $k = 0$: $F_0 = \frac{\varphi^0 - \psi^0}{\varphi - \psi} = \frac{1-1}{\varphi - \psi} = 0$

对于 $k = 1$: $F_1 = \frac{\varphi^1 - \psi^1}{\varphi - \psi} = \frac{\varphi - \psi}{\varphi - \psi} = 1$

2. 归纳步骤:

假设对 $k = n$ 成立, 即: $F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi}$

假设对 $k = n + 1$ 也成立, 即: $F_{n+1} = \frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\varphi - \psi}$

3. 证明对 $k = n + 2$ 成立:

根据递推公式: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

可以得到:

$$F_{n+2} = \left(\frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\varphi - \psi} \right) + \left(\frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi} \right)$$

$$F_{n+2} = \frac{\varphi^{n+1} + \varphi^n - (\psi^{n+1} + \psi^n)}{\varphi - \psi}$$

由于 φ 和 ψ 满足: $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$,

而这两个数字有以下公式: $\varphi^2 = \varphi + 1, \psi^2 = \psi + 1$,

则可以得到: $\phi^{n+2} = \phi^{n+1} + \phi^n$ 、 $\psi^{n+2} = \psi^{n+1} + \psi^n$

从而可以得到: $F_{n+2} = \frac{\phi^{n+2} - \psi^{n+2}}{\phi - \psi}$

根据数学归纳法, 题目中的公式

$$F_k = \frac{\varphi^k - \psi^k}{\varphi - \psi} \left(\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)$$

在 $k = n$ 和 $k = n + 1$ 成立的时候, 对于 $k = n + 2$ 也成立, 即对于任意非负整数均成立

故得到结论: 原式对于所有的 $k \geq 0$ 成立。