Ex 01

Condensateur - Dipôle RC

On se propose d'étudier l'évolution de la tension aux bornes d'un condensateur dans le but de déterminer la capacité du condensateur.

Un générateur de tension de f.é.m. E alimente un conducteur ohmique de résistance $R = 100\Omega$ et un condensateur de capacité C associés en série.

1 A l'aide des mesures de la tension u_C aux bornes du condensateur, on a obtenu la courbe $u_C = f(t)$ *(figure-1-)*

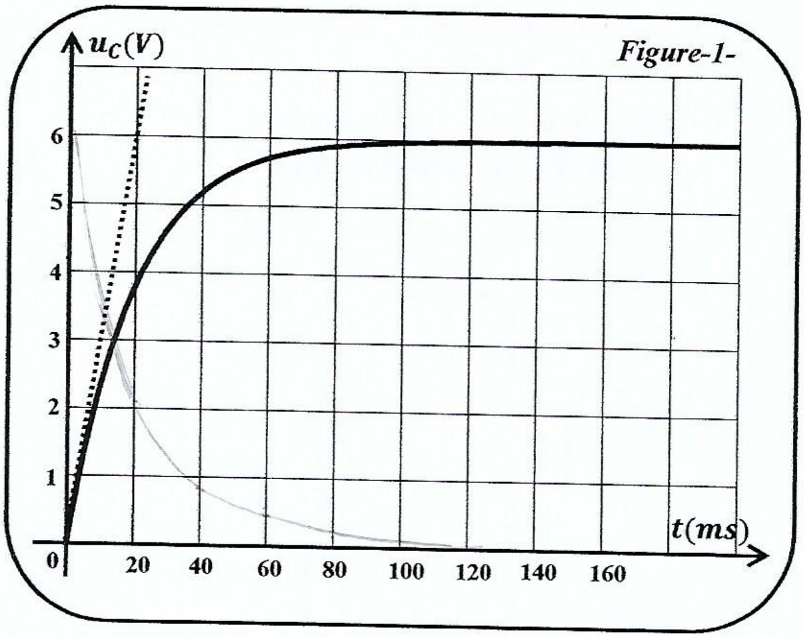
a) A l'aide de la courbe $u_C(t)$, déterminer la date t à partir de laquelle on peut considérer que la tension u_C est constante. Quel phénomène physique est mis en évidence par la portion de courbe située avant la date t.

b) Déterminer la valeur de E

c) Déterminer la valeur de la constante de temps τ.

d) En déduire la valeur de la capacité C

e) Faut-il augmenter ou diminuer la valeur de R pour charger rapidement le condensateur ? Justifier la réponse.



2. Etablir l'équation différentielle vérifiée par u_C

3. a) Sachant que $u_C = E(1 - e^{-t/RC})$ est solution de l'équation différentielle, établir l'expression de $i(t)$.

   b) A partir du graphe $u_C = f(t)$ déterminer $i(t = 0)$.

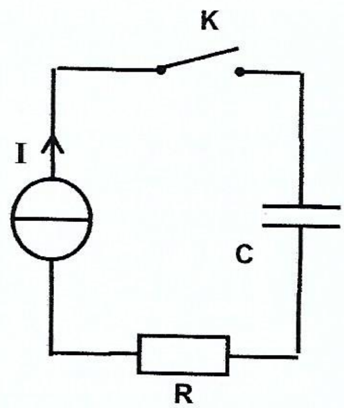
   c) Représenter l'allure de la courbe $i = f(t)$

4. Calculer la valeur de l'énergie E_C accumulée par le condensateur lorsque $u_R = u_C$

Ex 02

A) On considère le circuit électrique schématisé ci-contre :

Le générateur débite un courant d'intensité constante $I = 0,5\ mA$. Le condensateur, de capacité C, initialement déchargé. Le résistor à une résistance R. A $t = 0$, on ferme K. Un dispositif approprié permet de suivre l'évolution de l'énergie électrique E_C emmagasinée par le condensateur en fonction du carrée du temps. On obtient le graphe figure 1

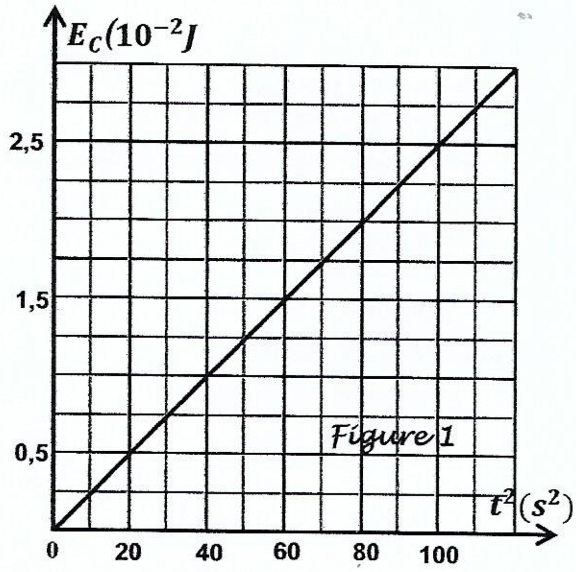


1. a) Trouver graphiquement l'équation de $E_C = f(t^2)$.

   b) Montrer que : $E_C = \frac{I^2}{2C} t^2$.

   c) En exploitant le graphe, déterminer la valeur de C du condensateur utilisé.

2. Sachant qu'à l'instant $t = 10s$, l'énergie E_C emmagasinée par le condensateur est égale à l'énergie E_{th} dissipée par effet joule dans le résistor, calculer la valeur de R. On rappelle qu'en courant continu : $E_{th} = RI^2t$.



B) On utilise le même condensateur et le même résistor pour réaliser le circuit électrique schématisé figure 2 :

Le générateur de tension idéal à une $fém\ E = 10V$. Le condensateur étant initialement déchargé, on bascule, à l'instant $t = 0$, le commutateur K sur la position 1.

3. Montrer que l'équation différentielle qui gère l'évolution de la tension u_C aux bornes du condensateur au cours du temps est : $\tau\left(\frac{du_C}{dt}\right) + u_C = E$ avec $\tau = RC$

4. Sur le graphe de la figure 3 ; on donne les courbes d'évolution de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur et de l'intensité $i(t)$du courant qui parcourt le circuit au cours du temps. Sachant que $u_C(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$:

   a) Identifier les courbes (a) et (b).

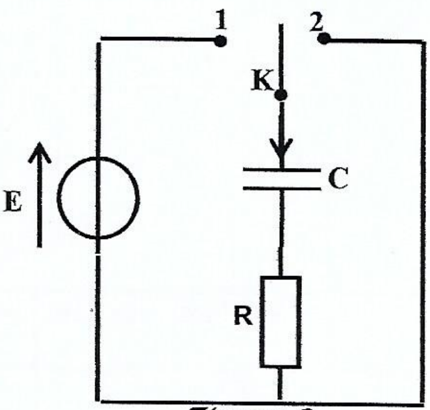
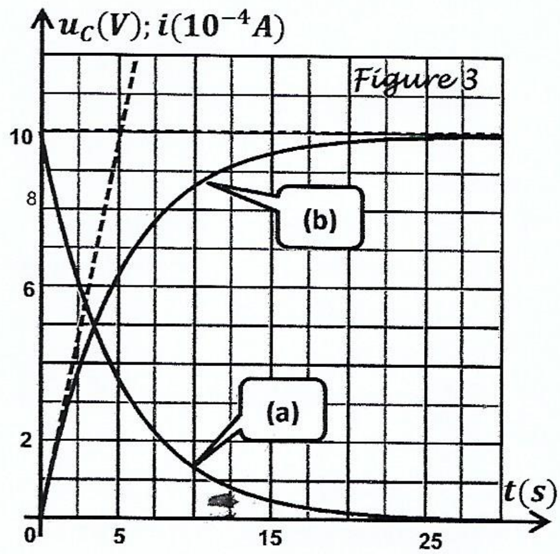


Figure 2



   b) Trouver graphiquement la valeur de τ.
   c) Déduire de l'expression de $u_C(t)$ celle de $i(t)$.
   d) Déterminer la valeur de R et celle de C

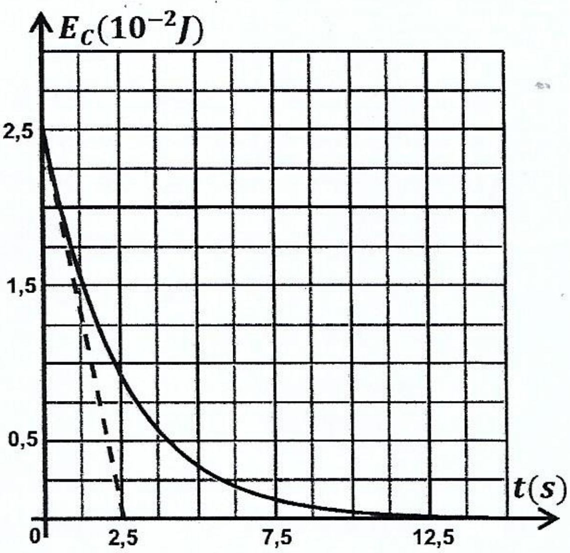
5. Calculer la valeur de l'énergie E_{Cm} stockée par le condensateur lorsque le régime permanent est établi.

C) Le condensateur étant initialement totalement chargé, on bascule, à l'instant $t = 0$, le commutateur K sur la position 2.

6. L'équation différentielle qui gère l'évolution de la tension u_C aux bornes du condensateur au cours du temps est : $\tau\left(\frac{du_C}{dt}\right) + u_C = 0$ avec $\tau = RC$

   Montrer que l'évolution au cours du temps de l'énergie électrique E_C stockée par le condensateur est gérée par l'équation différentielle :

$$\tau\left(\frac{dE_C}{dt}\right) + 2\,E_C = 0 \text{ avec } \tau = RC$$



7. On donne ci-contre la courbe d'évolution de E_C au cours du temps. Sachant que $E_C(t) = E_{Cm}e^{-2t/\tau}$:

Déterminer graphiquement les valeurs de E_{Cm} et de $(\frac{dE_C}{dt})_{t=0}$.

Déduire alors les valeurs de C et de R.

8. Calculer la valeur de l'énergie thermique E_{th} dissipée par effet Joule dans le résistor entre $t = 0$ et $t = \tau$.

Ex03

Un condensateur ne portant aucune charge de capacité $C = 10\mu F$ est utilisé dans le circuit ci-contre.

Le circuit comporte un générateur idéal de f.é.m. $E = 12V$, trois résistors de résistance $R_1 = 1K\Omega$, R_2 et R_3 sont inconnues et un commutateur à double position K.

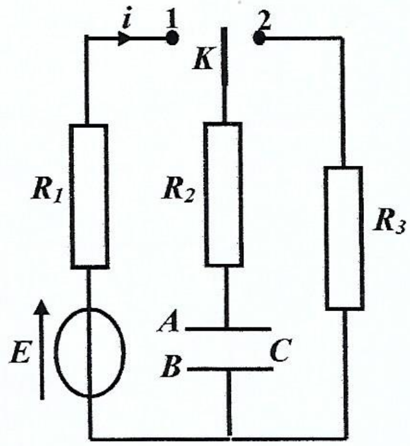


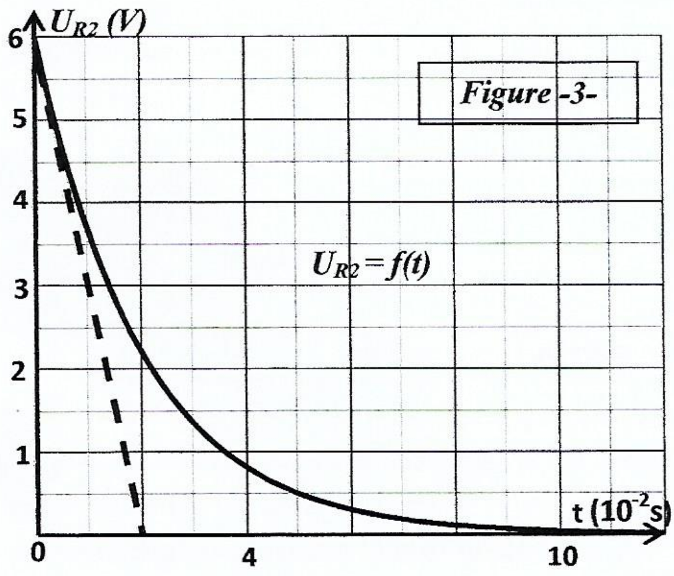
Figure-2-

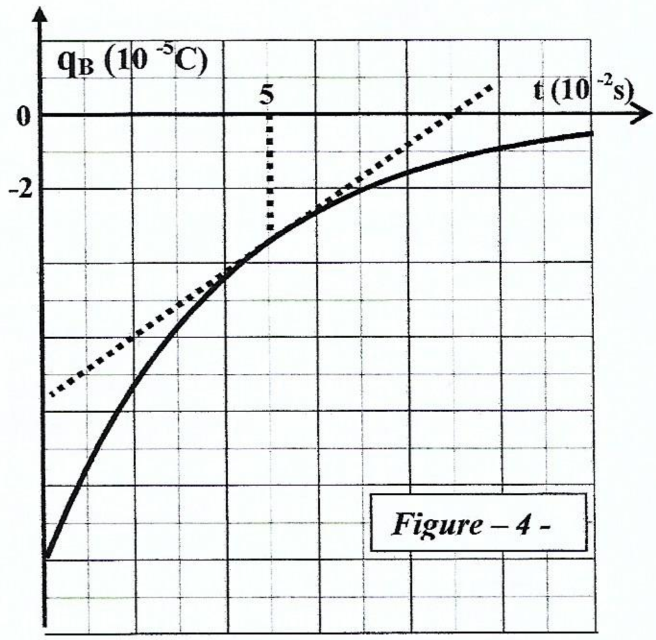
I. A un instant pris comme origine de temps, on bascule le commutateur K sur la position 1.

1. Etablir l'équation différentielle régissant les variations de la tension $u_{R2}(t)$) aux bornes de R_2.
2. La solution de l'équation différentielle précédemment établie s'écrit sous la forme $u_{R2}(t) = Ae^{-\alpha t}$, *montrer que* $A = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2}$ et $\alpha = \frac{1}{(R_1+R_2)C}$.
3. Sur le graphe de la figure 3, on donne la courbe $u_{R2}(t) = f(t)$.

a) En exploitant le graphe de la figure 3 :

- ✓ Déterminer la valeur de la résistance R_2
- ✓ Prélever la valeur de la constante de temps τ_1 et retrouver la valeur de la capacité C du condensateur





b) Déterminer, à l'instant $t_1 = 0{,}05s$ la charge portée par l'armature B du condensateur.

II - Le condensateur est complètement chargé, on bascule le commutateur K sur la position 2 à un instant pris comme origine de temps. A l'aide d'un dispositif approprié on a représenté $q_B = f(t)$ (figure 4).

1. **a)** Déterminer la valeur de l'intensité i du courant à l'instant $t_1 = 0,05s.$

b) Calculer l'énergie dissipée par effet joule dans les résistors R_1 et R_2 entre les instants $t_0 = 0s$ t_1

2. Sachant que l'expression de la charge portée par l'armature B est $q_B = -12.10^{-5}e^{-\frac{t}{\tau_2}}$ avec $\tau_2 = (R_2 + R_3)C$. Calculer la valeur de la résistance R_3 sachant qu'à l'instant $t_2 = 0,04s$ $q_B = -4,4110^{-5}C$

Ex04

On réalise un circuit électrique en série comportant deux résistors dont l'un est de résistance $R_1 = 100\ \Omega$ et l'autre est de résistance $R_2 = 100\ \Omega$ un condensateur initialement déchargé de capacité C et un interrupteur K. L'ensemble est alimenté par un générateur idéal de tension, de *f.é.m.* E et de masse flottante M ***(figure 4).*** Un oscilloscope à mémoire permet d'enregistrer :

- ✓ Sur la ***voie*** Y_1, la tension $u_{DA} = u_{R_1}(t)$ aux bornes du résistor de résistance R_1 ;
- ✓ Sur la ***voie*** Y_2, la tension $u_{AB} = u_C(t)$ aux bornes du condensateur.

A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K. Les courbes donnant l'évolution au cours du temps des tensions électriques u_{DA} et u_{AB} sont représentées sur la ***figure 5.***

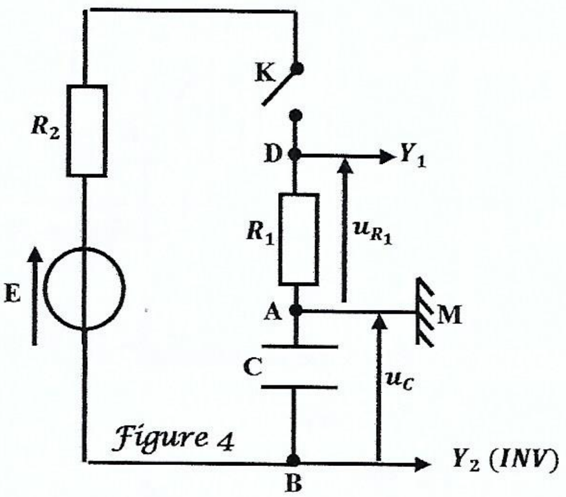


Figure 4

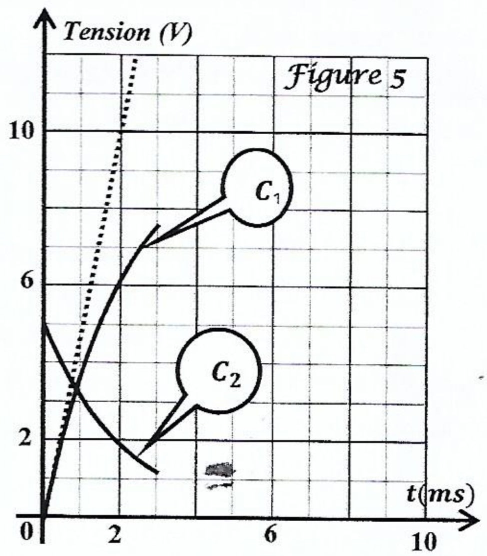


Figure 5

1. Justifier que la courbe (C_2) correspond à la tension $u_{R_1}(t)$.

2. **a)** Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution de la tension u_{R_1} aux bornes du résistor de résistance R_1.

b) La solution de l'équation différentielle peut s'écrire sous la forme $u_{R_1}(t) = U_{0_1}e^{-t/\tau}$. Exprimer U_{0_1} et τ en fonction des caractéristiques des dipôles

c) En déduire l'expression de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.

3. En exploitant le graphe de la ***figure 5,*** déterminer :

- ✓ La valeur de E ;
- ✓ La valeur de τ. En déduire la valeur de C

4. Déterminer à la date $t = \tau$:

- ✓ La valeur de l'intensité du courant i dans le circuit.
- ✓ La valeur de la charge q_B de l'armature B du condensateur .
- ✓ L'énergie emmagasinée par le condensateur.

Série 2

Ex 2

A/ 1) a) $E_c = f(t^2)$ est une droite linéaire d'éq : $E_c = \alpha . t^2$ avec $\alpha = 25.10^{-5}\ j.s^{-2}$

d'où $\left[E_c = 25.10^{-5}.\ t^2\right]$ ①

b) $\begin{cases} E_c = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \\ q = I.t \end{cases}$

$\Rightarrow \left[E_c = \frac{I^2}{2C}.t^2\right]$ ②

c) Par identification de ① et ②

$\frac{I^2}{2.C} = 25.10^{-5}$

$\Leftrightarrow C = \frac{I^2}{2.25.10^{-5}}$

$C = 5.10^{-4}\ F$

2) $E_c(t=10s) = E_{th} = R.I^2.t$

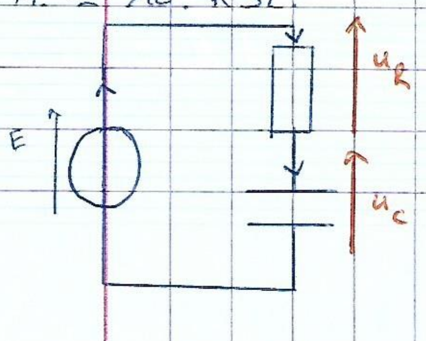
$R = \frac{E_c(t=10s)}{I^2.t}$

$= \frac{2,5.10^{-2}}{(0,5)^2.10^{-6}.10}$

$= 10^4\ \Omega$

$R = 10\ K\Omega$

B/



3) * Loi des mailles :

$u_R + u_C - E = 0$

sig $\begin{cases} R.i + u_C(t) = E \\ i = C.\frac{du_C}{dt} \end{cases}$

$\Rightarrow R.C.\frac{du_C}{dt} + u_C(t) = E$

4) (b) = $u_C(t)$ car $u_C(0) = 0$

(a) = $i(t)$ car $u_R(0) + u_C(0) = E$

sig $R.i = E$

sig $i(0) = \frac{E}{R} \neq 0$.

b) $\tau = 5\,s$.

c) $u_R(t) + u_C(t) = E$

$\Leftrightarrow R.i(t) = E - u_C(t)$

$\Rightarrow R.i(t) = E\left(1 - 1 + e^{-t/5}\right)$

$\Leftrightarrow i(t) = \frac{E}{R}.e^{-t/\tau}$

d) $i(0) = \frac{E}{R} \Rightarrow R = \frac{E}{i(0)}$

$\Rightarrow R = \frac{10}{10.10^{-4}}$

$= 10^4\ \Omega$

$R = 10\ K\Omega$

Or on a $\tau = R.C$

$\Leftrightarrow C = \frac{\tau}{R} = \frac{5}{10^4}$

$C = 5.10^{-4}\ F$

5) $E_c = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_c^2$

or $u_c = E$ (régime permanent)

d'où $E_c = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_c^2$

$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^2$

$= 2,5 \cdot 10^{-2}$ J.

C/ 6) Décharge

$\tau \cdot \frac{du_c}{dt} + u_c = 0$. ①

$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2} C \cdot u_c^2 \\ \frac{dE_c}{dt} = C \cdot u_c \cdot \frac{du_c}{dt} \end{cases}$

① devient $\left[\tau \cdot \frac{du_c}{dt} + u_c = 0\right] \times C \cdot u_c$

$\Leftrightarrow \tau \cdot C \cdot u_c \cdot \frac{du_c}{dt} + C \cdot u_c^2 = 0$

$\Leftrightarrow \tau \cdot \frac{dE_c}{dt} + 2 E_c = 0$.

7) graphe : $\begin{cases} E_{cm} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ J.} \\ \left(\frac{dE_c}{dt}\right)_{t=0} = \left[\text{pente de la tangente à } E_c = f(t) \text{ au pt } t = 0s\right] \end{cases}$

d'où $\left(\frac{dE_c}{dt}\right)_{t=0} = -10^{-2} \text{ J.s}^{-1}$

* On a $E_{cm} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot E^2$

$\Leftrightarrow C = \frac{2 E_{cm}}{E^2} = 5 \cdot 10^{-4}$ F

On a $\tau \cdot \frac{dE_c}{dt} + 2 E_c(t) = 0$.

~~sig $RC \cdot (-10^{-2}) + 2$.~~

$R \cdot C \times \frac{dE_c}{dt} = -2 E_c(t)$

sig $R = \frac{-2 \cdot E_c(t)}{C \cdot \left(\frac{dE_c}{dt}\right)_{t=0}} = \frac{-2 \cdot 2,5 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-4} \cdot (-10^{-2})}$

$= 10^4 \ \Omega = 10 \ K\Omega$.

8) L'énergie thermique :

$E_{th} = E_c(0) - E_c(\tau)$

↳ Energie électrique au cours de la décharge.

$\begin{cases} E_c(0) = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ J} \\ E_c(\tau) = E_{cm} \cdot e^{-2} \\ \quad = 2,5 \cdot 10^{-2} \cdot e^{-2} \\ \quad = 0,34 \cdot 10^{-2} \text{ J.} \end{cases}$

$E_{th} = 2,16 \cdot 10^{-2}$ J.

Rq : E_{th} ne dépend de R.

→ Plus R ↗, τ ↗

d'où l'énergie se dissipe plus rapidement.

(Mais c'est la même énergie).

Ex 3

I/ 1) * Schéma.

* loi des mailles.

$u_{R_2} + u_{R_1} + u_C = E$

$$\begin{cases} u_{R_2} = R_2 . i & \Rightarrow i = \dfrac{u_{R_2}}{R_2} \\ u_{R_1} = R_1 . i & \\ i = C . \dfrac{du_C}{dt} & \Rightarrow u_{R_1} = \dfrac{u_{R_2}}{R_2} . R_1 \end{cases}$$

d'où $\frac{d}{dt}\left(u_{R_2}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) + u_C = E\right)$

$\Leftrightarrow \left[\frac{R_2 + R_1}{R_2} . \frac{d u_{R_2}}{dt} + u_{R_2} \frac{1}{R_2 C} = 0\right] \times R_2 C$

$\Leftrightarrow (R_2 + R_1) . C . \frac{d u_{R_2}}{dt} + u_{R_2} = 0.$

2) $u_{R_2} = A . e^{-\alpha . t}$

* On a $u_{R_2}(0) = A = i(0) . R_2$

or $(R_2 + R_1) . i(0) + u_C(0) = E$

$\Leftrightarrow i(0) = \frac{E}{R_1 + R_2}$

$\Leftrightarrow A = \frac{R_2 . E}{R_1 + R_2}$

* $\frac{d u_{R_2}}{dt} = -\alpha . A . e^{-\alpha t}$

d'où $C . (R_2 + R_1) . (-\alpha) . A . e^{-\alpha t} + \frac{A . e^{-\alpha t}}{\cancel{R_2}} = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{A . e^{-\alpha t}}_{\neq 0} \left[-C(R_2 + R_1)\alpha + \frac{1}{\cancel{R_2}}\right] = 0$

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{C(R_1 + R_2)} = \frac{1}{\tau_1}$

3) a) On a $u_{R_2}(0) = A = \frac{R_2 . E}{R_1 + R_2} = 6.$

$\Leftrightarrow R_2 = 1 \, K\Omega.$

* $\tau_1 = 2 . 10^{-2}$ s

$\tau_1 = (R_1 + R_2) . C$

$\Leftrightarrow C = \frac{\tau_1}{R_1 + R_2} = \frac{\cancel{2} . 10^{-2}}{\cancel{2} . 10^{3}}$

$C = 10^{-5}$ F

b) $q_B = -q.$

$q(t = 0{,}05 s) = C . u_C(t = 0{,}05 s).$

or $u_{R_2}(t) + u_{R_1}(t) + u_C(t) = E$; $R_1 = R_2$

sig $u_C(t) = \frac{E - 1}{\text{[illegible]}} = \text{[illegible]}\ 11$

$q = C . u_C (t = 0{,}05 s)$
$= 10^{-5} . 11$

$q_B = -11 . 10^{-5}$ C.

II) 1) a)

On a $i(t) = \frac{dq}{dt}$

$i(t_2) = \left.\frac{dq}{dt}\right|_{t = t_2} = \frac{6}{7} . 10^{-3}$ A

$\simeq 0{,}85 . 10^{-3}$ A.

b) $E_{dissipée} = E_C(0) - E_C(t_1)$

$= \frac{1}{2} . C E^2 - \frac{1}{2} . \frac{q_B^2(t_1)}{C}$

$= 65{,}87 . 10^{-5}$ J.

2) $q_3(t) = -12.10^{-5} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}}$

avec $\tau_2 = (R_1 + R_2) C$

On a $-12.10^{-5} \cdot e^{-t_2/\tau_2} = -4,411.10^{-5}$

sig $e^{-t_2/\tau_2} = \frac{4,411}{12}$.

sig $-\frac{t_2}{\tau_2} = \ln\left(\frac{4,411}{12}\right) = -1$.

sig $t_2 = \tau_2 = 4.10^{-2} = (R_2 + R_3) C$.

sig $R_3 = \frac{\tau_2}{C} - R_2 = 3 \text{ K}\Omega$.

Ex 4

1) à $t=0$; $u_c(0) = 0$: (C_1).

d'où (C_2) : u_{R_2}

* ou : en régime permanent ; $I_{\infty} = 0$

$\Leftrightarrow u_{R_1} \to 0$.

2) a/ Eq diff : $(R_1 + R_2) \cdot C \cdot \frac{du_{R_1}}{dt} + u_{R_1}(t) = 0$.

b/ $u_{R_1}(t) = U_{0_1} \cdot e^{-t/\tau}$.

* à $t = 0$ s ; $u_{R_1}(0) = U_{0_1} = R_1 \cdot i(0)$.

$\Leftrightarrow u_{R_1}(0) = R_1 \cdot \frac{E}{R_1 + R_2}$

* $\frac{du_{R_1}}{dt} = \frac{-U_{01}}{\tau} \cdot e^{-t/\tau}$

l'équation diff. s'écrit :

$\underbrace{U_{0_1} \cdot e^{-t/\tau}}_{\neq 0} \left(-\frac{(R_1 + R_2) C}{\tau} + 1 \right) = 0$

$\Leftrightarrow \tau = (R_1 + R_2) C$

c) Loi des mailles :

$u_{R_1}(t) + u_{R_2}(t) + u_c(t) = E$

$\Leftrightarrow (R_1 + R_2) \cdot i(t) + u_c(t) = E$

$\Leftrightarrow \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot u_{R_1}(t) + u_c(t) = E$

$\Leftrightarrow u_c(t) = E - \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot \frac{R_1 \cdot E}{R_1 + R_2} \cdot e^{-t/\tau}$

$\Leftrightarrow u_c(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

3) $u_{R_1}(t) = R_1 \cdot \frac{E}{R_1 + R_2} = 5 \text{ V} = U_{0_1}$

$\Rightarrow E = 10 \text{ V}$

$\tau = 2.10^{-3} \text{ s} = (R_1 + R_2) \cdot C$

$\Leftrightarrow C = \frac{\tau}{R_1 + R_2} = 10 \ \mu\text{F}$.

4) $t = \tau \begin{cases} u_c(\tau) = 0,63 E = 6,3 \text{ V} \\ (R_2 + R_1) \cdot i(\tau) = E - u_c(\tau) \end{cases}$

$\Rightarrow i(\tau) = \frac{E - u_c(\tau)}{200 \ \Omega}$

$= 18,5 \cdot 10^{-3} \text{ A}$

$q_B = -q(\tau)$

$= -C \cdot u_C(\tau) = -6,3 \cdot 10^{-5}\ C$

$E_C(\tau) = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} = 19,84 \cdot 10^{-5}\ J.$