信号与系统

§3.1 引言

退出 开始

连续时间信号、连续时间系统

连续时间信号：

$f(t)$是连续变化的t的函数，除若干不连续点之外对于任意时间值都可以给出确定的函数值。函数的波形都是具有平滑曲线的形状，一般也称模拟信号。

模拟信号

抽样信号

量化信号

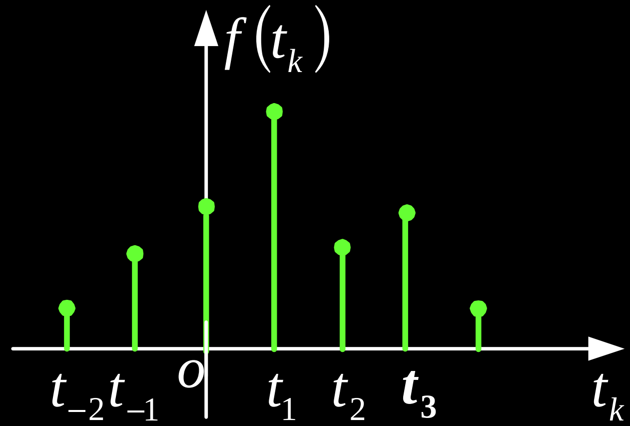
连续时间系统：

系统的输入、输出都是连续的时间信号。

离散时间信号、离散时间系统

离散时间信号：

时间变量是离散的，函数只在某些规定的时刻有确定的值，在其他时间没有定义。

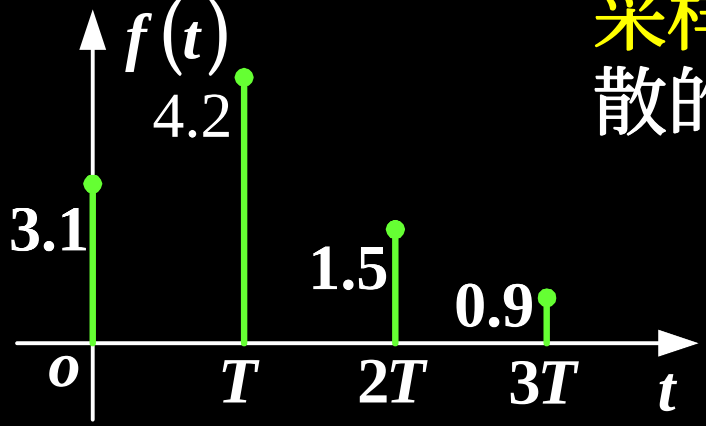


离散信号可以由模拟信号抽样而得，也可以由实际系统生成。

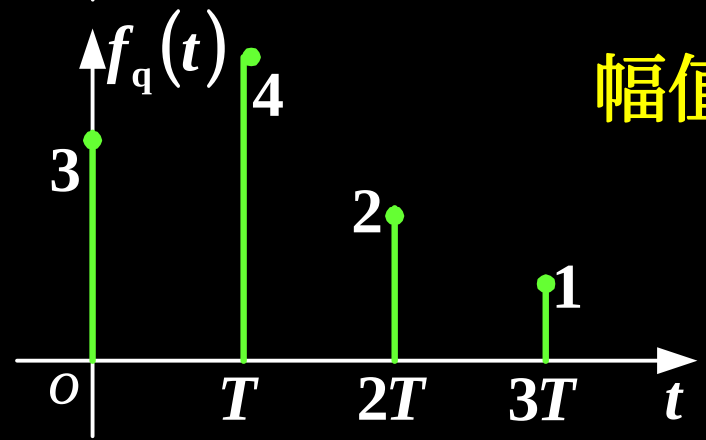
离散时间系统：

系统的输入、输出都是离散的时间信号。如数字计算机。

量化



采样过程就是对模拟信号的时间取离散的量化值过程——得到离散信号。



幅值量化——幅值只能分级变化。

数字信号：离散信号在各离散点的幅值被量化的信号。

离散时间系统的优点

•便于实现大规模集成，从而在重量和体积方面显示其优越性；

•容易作到精度高，模拟元件精度低，而数字系统的精度取决于位数；

•可靠性好；

•存储器的合理运用使系统具有灵活的功能；

•易消除噪声干扰；

•数字系统容易利用可编程技术，借助于软件控制，大大改善了系统的灵活性和通用性；

•易处理速率很低的信号。

离散时间系统的困难和缺点

高速时实现困难，设备复杂，成本高，通信系统由模拟转化为数字要牺牲带宽。

应用前景

由于数字系统的优点，使许多模拟系统逐步被淘汰，被数字（更多是模／数混合）系统所代替；

人们提出了“数字地球”、“数字化世界”、“数字化生存”等概念，数字化技术逐步渗透到人类工作与生活的每个角落。数字信号处理技术正在使人类生产和生活质量提高到前所未有的新境界。

混合系统

混合系统：

连续时间系统与离散时间系统联合应用。如自控系统、数字通信系统。 需要A/D、D/A转换。

不能认为数字技术将取代一切连续时间系统的应用

- 人类在自然界中遇到的待处理信号相当多的是连续时间信号，需经A/D、D/A转换。
- 当频率较高时，直接采用数字集成器件尚有一些困难，有时，用连续时间系统处理或许比较简便。
- 最佳地协调模拟与数字部件已成为系统设计师的首要职责。

系统分析

连续时间系统——微分方程描述

$$\begin{cases} 时域分析\begin{cases} 经典法：齐次解+特解 \\ 零输入响应+零状态响应 \end{cases} \\ 变换域分析：拉氏变换法 \end{cases}$$

离散时间系统——差分方程描述

差分方程的解法与微分方程类似

$$\begin{cases} 时域分析\begin{cases} 经典法：齐次解+特解 \\ 零输入响应+零状态响应 \end{cases} \\ 变换域分析：z变换法 \end{cases}$$

本章内容

- 离散时间信号及其描述、运算；
- 离散时间系统的数学模型——差分方程；
- 线性差分方程的时域解法；
- 离散时间系统的单位样值响应；
- 离散卷积。

学习方法

注意离散系统与连续系统分析方法上的联系、区别、对比，与连续系统有并行的相似性。和前几章对照，温故而知新。

§3.2 离散时间信号——序列

- 离散信号的表示方法
- 离散时间信号的运算
- 常用离散时间信号

退出 开始

一．离散信号的表示方法

$$x(t) \to x(nT) \xrightarrow{\text{等间隔}T} x(n) \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

- 数字序列 如 $\left\{ \cdots 0.9, \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{0}.8, 0.3, 0.1 \cdots \right\}$
- 有规则的，可以用函数表示：$x(n)$
- 波形表示：线段的长短表示各序列值的大小

例题

$\{x(n)\}$与$x(n)$概念上有区别，但为了书写方便，常以 $x(n)$ 表示整个序列，在应用场合一般不会混淆。

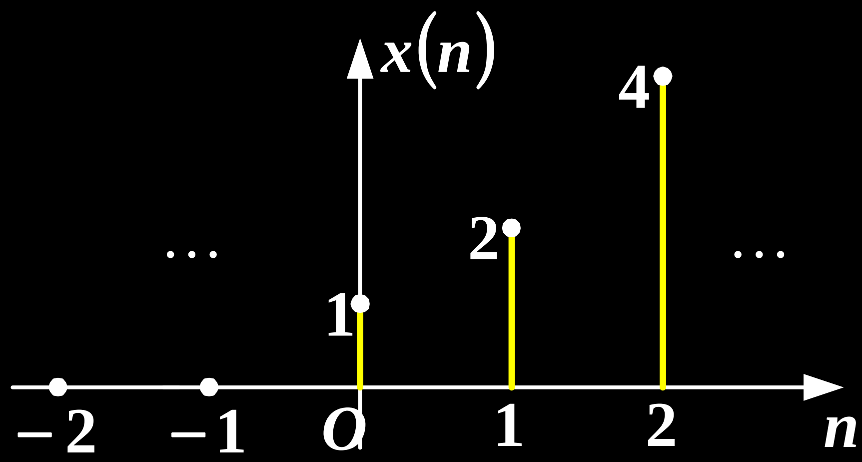
例7-2-1

$$x(n)=\begin{cases}2^n, n\geq 0\\ 0, n<0\end{cases}$$ 试写出其序列形式并画出波形。

解答

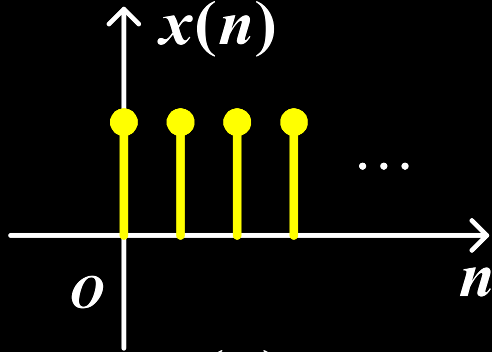
序列形式： $$x(n)=\left\{\cdots,0,0,\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{1},2,4,8,\cdots\right\}$$

波形：

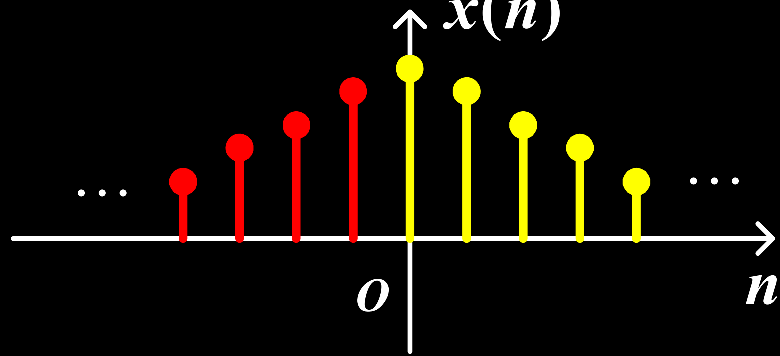


序列的三种形式

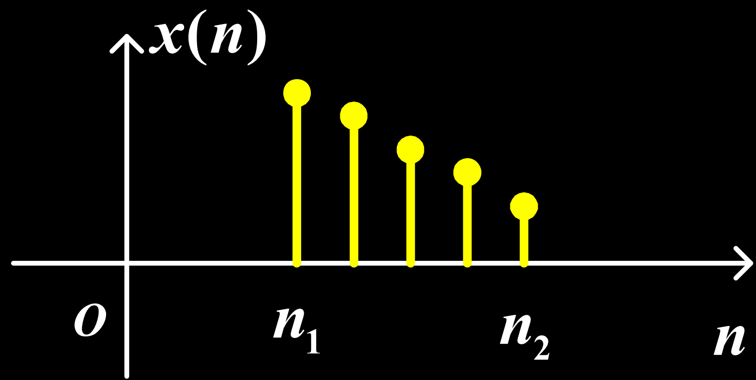
单边序列：$n \geq 0$；



双边序列：$-\infty \leq n \leq \infty$；



有限长序列：$n_1 \leq n \leq n_2$；



二．离散信号的运算

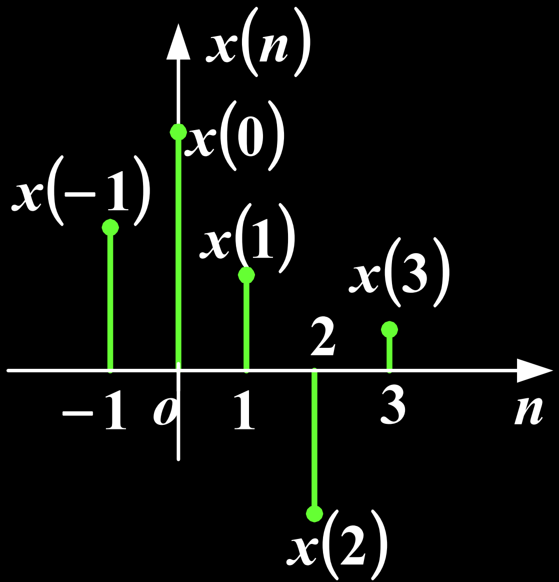
1．相加：$z(n)=x(n)+y(n)$

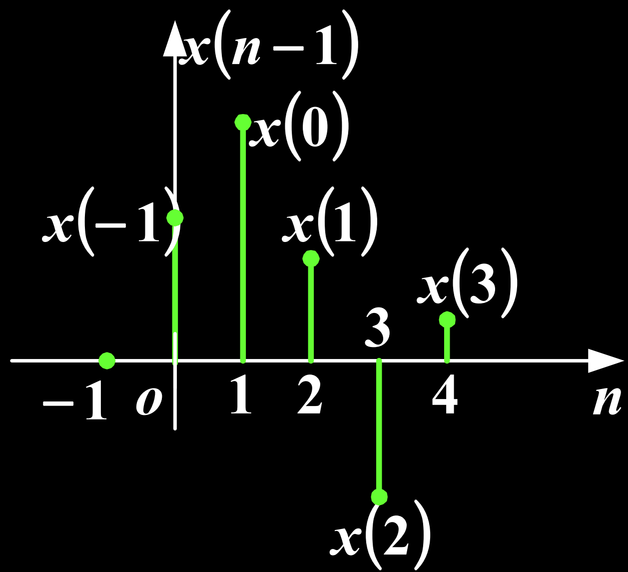
2．相乘：$z(n)=x(n)\cdot y(n)$

3．乘系数：$z(n)=ax(n)$

4．移位：$z(n)=x(n-m)$ 右移位

$z(n)=x(n+m)$ 左移位





5. 倒置： $z(n)=x(-n)$

6. 差分： 前向差分：$\Delta x(n)=x(n+1)-x(n)$

后向差分：$\nabla x(n)=x(n)-x(n-1)$

7. 累加： $z(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)$

8. 重排（压缩、扩展）：

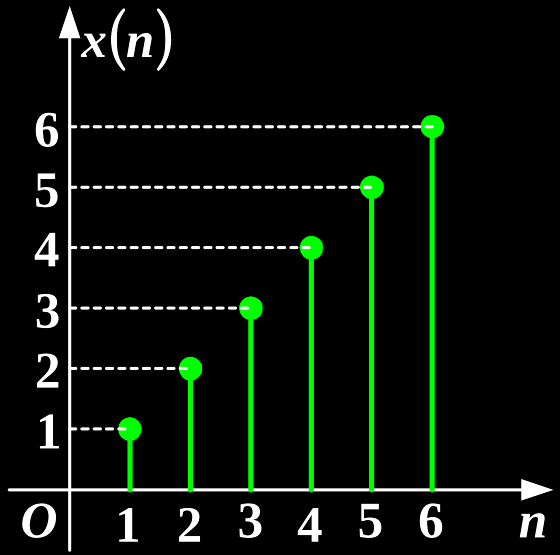
$x(n)\to x(an)$,或 $x(n)\to x\left(\frac{n}{a}\right)$ 例题

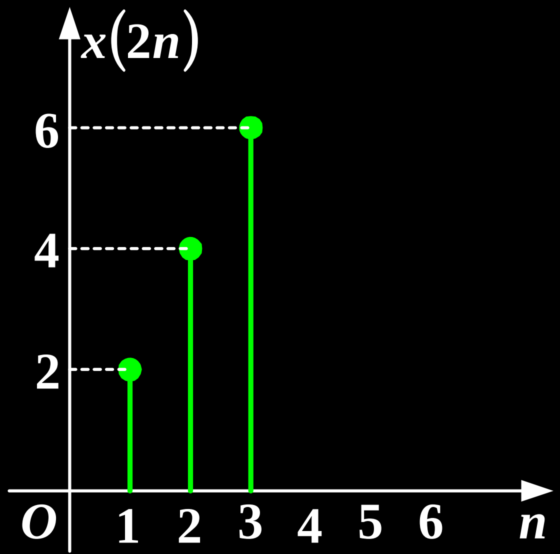
注意：有时需去除某些点或补足相应的零值。

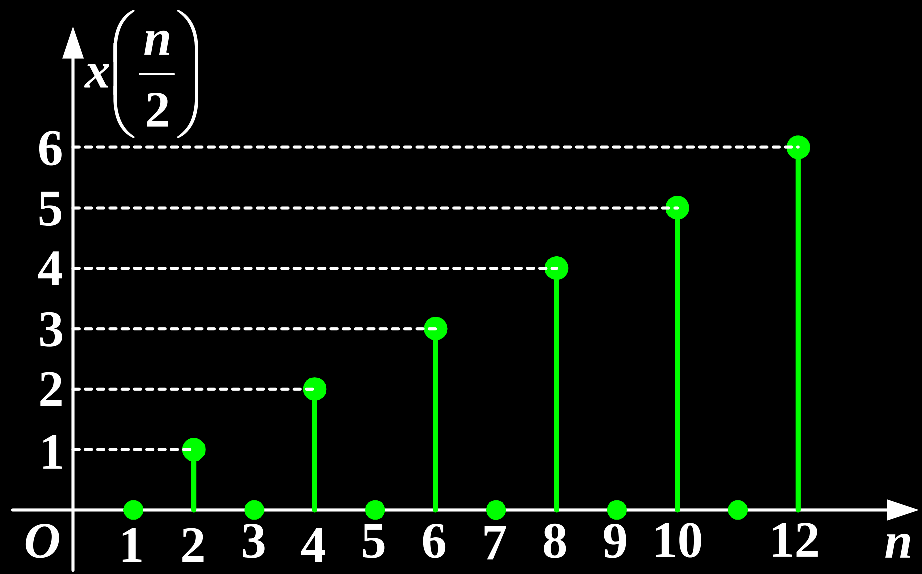
9. 序列的能量 $E=\sum_{n=-\infty}^{n}|x(n)|^2$

例7-2-2

已知$x(n)$波形，请画出$x(2n)$, $x\left(\dfrac{n}{2}\right)$波形。





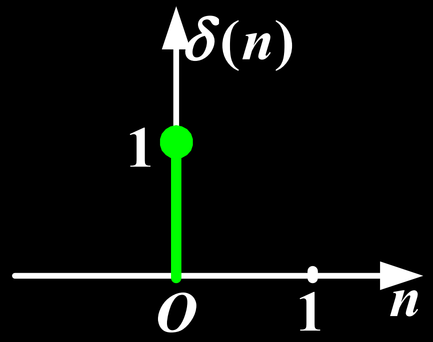


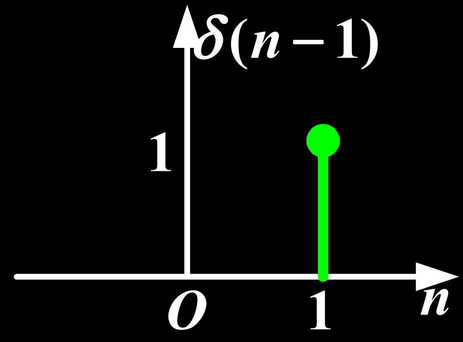
三．常用离散信号

- 单位样值信号
- 单位阶跃序列
- 矩形序列
- 斜变序列
- 单边指数序列
- 正弦序列
- 复指数序列

1. 单位样值信号

$$\delta(n)=\begin{cases}0, & n\neq 0\\ 1, & n=0\end{cases}$$





时移性 $\delta(n-j)=\begin{cases}0, & n\neq j\\ 1, & n=j\end{cases}$

比例性 $c\delta(n), c\delta(n-j)$

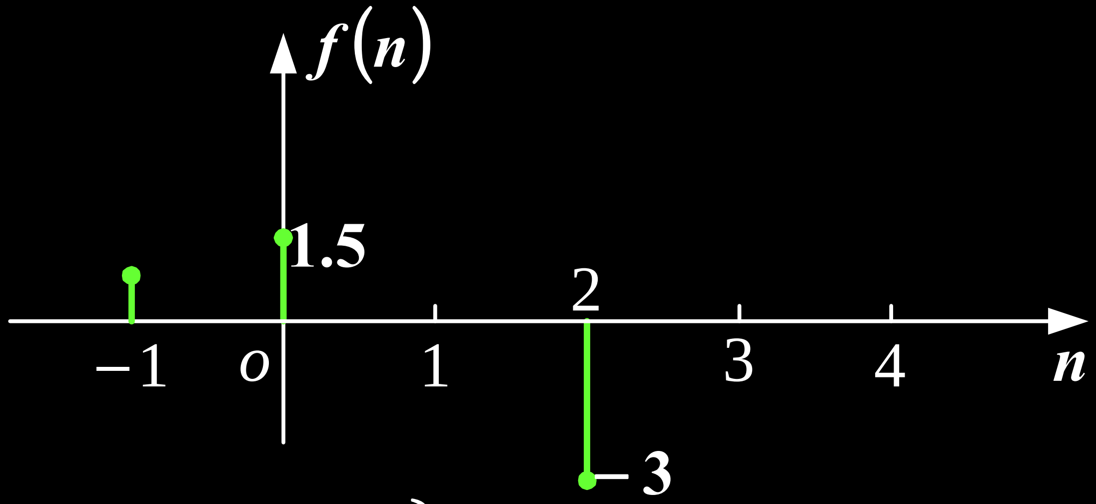
抽样性 $f(n)\delta(n)=f(0)\delta(n)$

注意： $\delta(t)$用面积（强度）表示,（$t\to 0$, 幅度为 ∞）;

$\delta(n)$在$n=0$取有限值（不是面积）。

利用单位样值信号表示任意序列

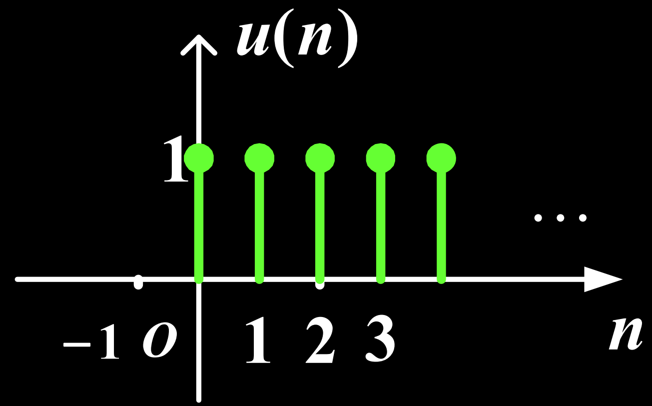
$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$



$$f(n)=\left\{\underset{\underset{n=0}{\uparrow}}{1,1.5,0,-3,0,0,}\right\}=\delta(n+1)+1.5\delta(n)-3\delta(n-2)$$

2. 单位阶跃序列

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\ge 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$



$u(n)$可以看作是无数个单位 样值之和：

$$u(n)=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\delta(n-3)+\cdots$$

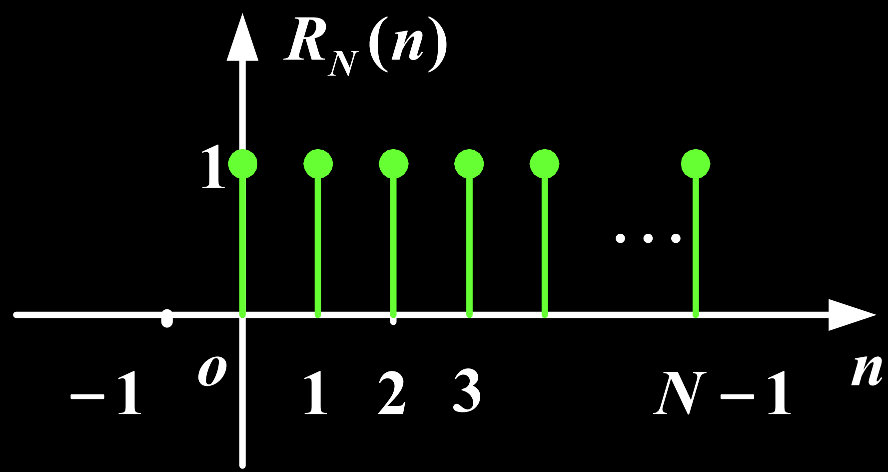
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)$$

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

$\delta(n)$与$u(n)$是差和关系，不再是微 商关系。

3. 矩形序列

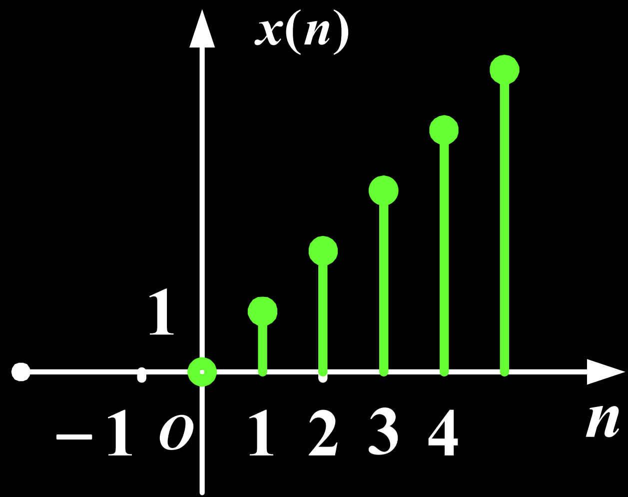
$$R_N(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & n<0,\ n\ge N\end{cases}$$



与$u(n)$的关系：$R_N(n)=u(n)-u(n-N)$

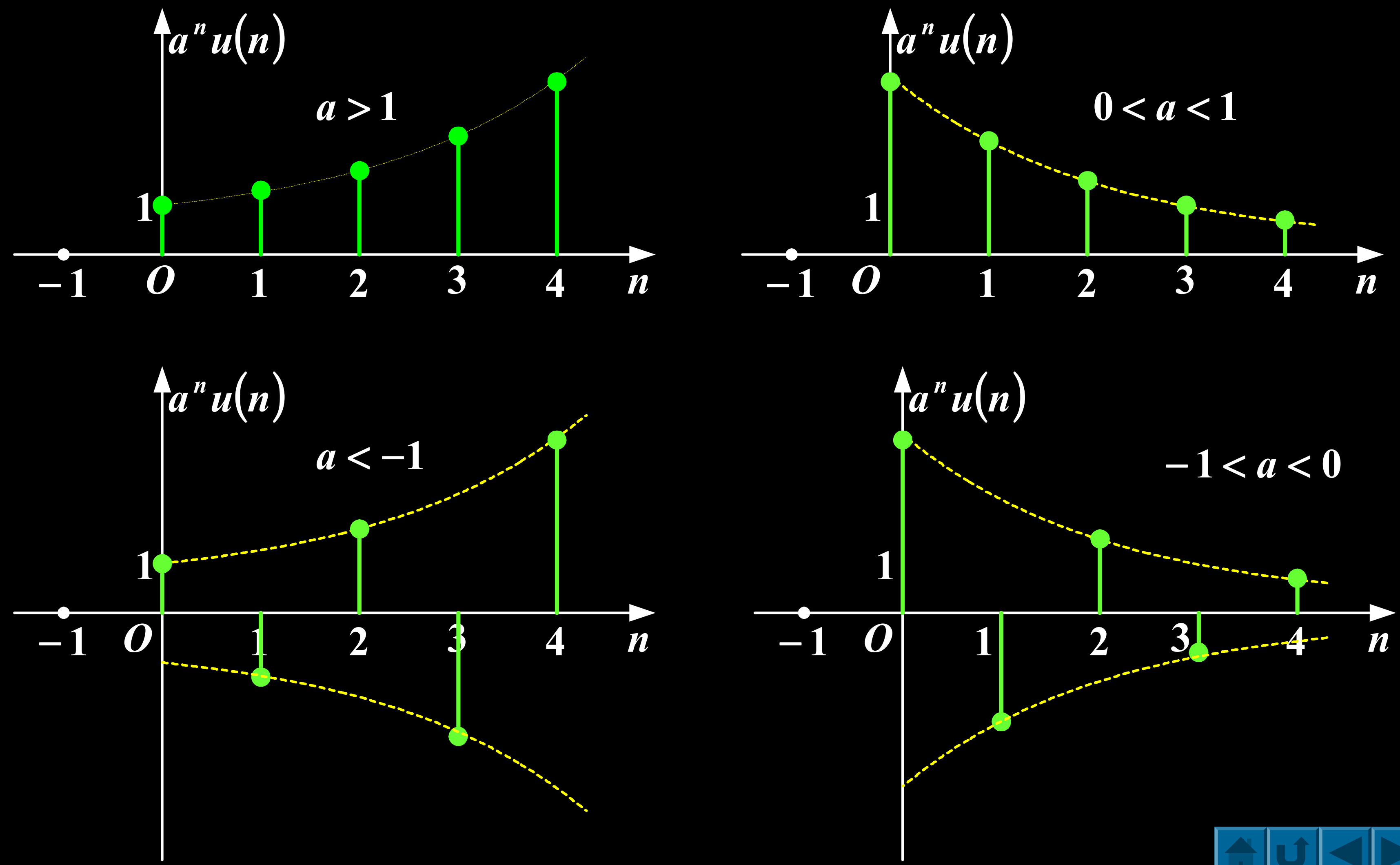
4. 斜变序列

$$x(n) = nu(n)$$



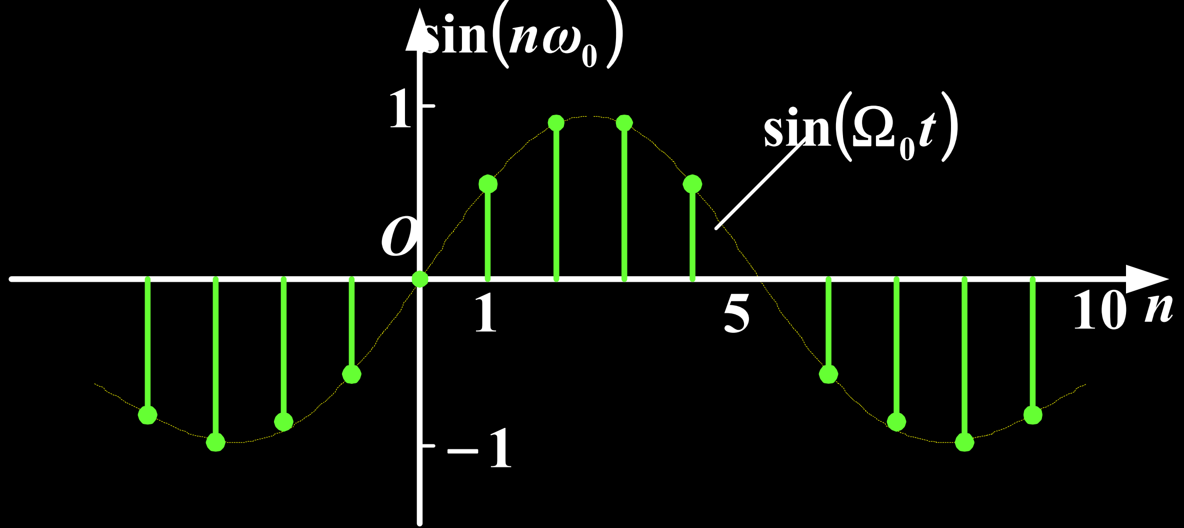
5. 单边指数序列

$$x(n)=a^n u(n)$$



6. 正弦序列

$x(n) = \sin(n\omega_0)$ 余弦序列：$x(n) = \cos(n\omega_0)$



ω_0：正弦序列的频率，序列值依次周期性重复 的速率。

当$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{10}$，则序列每10个重复一次正弦包络的数值。

离散正弦序列 $x(n) = \sin(\omega_0 n)$ 是周期序列应满足

$$x(n+N) = x(n)$$

N称为序列的**周期**，为任意**正整数**。

正弦序列周期性的判别

① $\dfrac{2\pi}{\omega_0}=N$，N是正整数　例题

$$\sin[\omega_0(n+N)]=\sin\left[\omega_0\left(n+\frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right]=\sin(\omega_0 n+2\pi)=\sin(\omega_0 n)$$

正弦序列是周期的

② $\dfrac{2\pi}{\omega_0}=\dfrac{N}{m}$，$\dfrac{N}{m}$为有理数　例题

$$\sin[\omega_0(n+N)]=\sin\left[\omega_0\left(n+m\frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right]=\sin(\omega_0 n+m\cdot 2\pi)=\sin(\omega_0 n)$$

$\sin(\omega_0 n)$仍为周期的　周期：$N=m\dfrac{2\pi}{\omega_0}$

③ $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$为无理数　例题

找不到满足 $x(n+N)=x(n)$的N值，为非周期的

例7-2-3

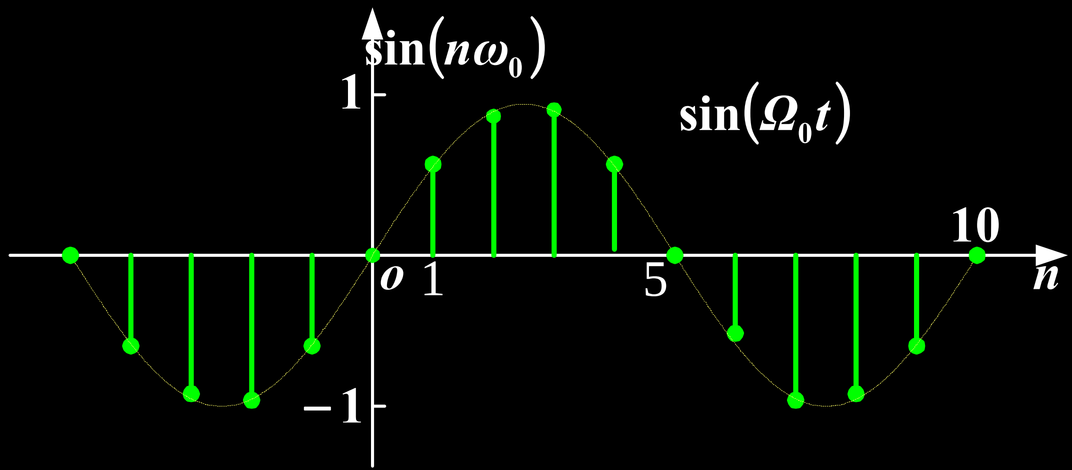
设N=10，说明正弦序列的包络线每隔10个样值重复一次，周期为10。

解答

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{10} = 0.2\pi$$

表示相邻两个序列值间的弧度数为 0.2π。

ω_0反映每个序列值出现的 速 率，ω_0小，两个序列值间弧度 小。

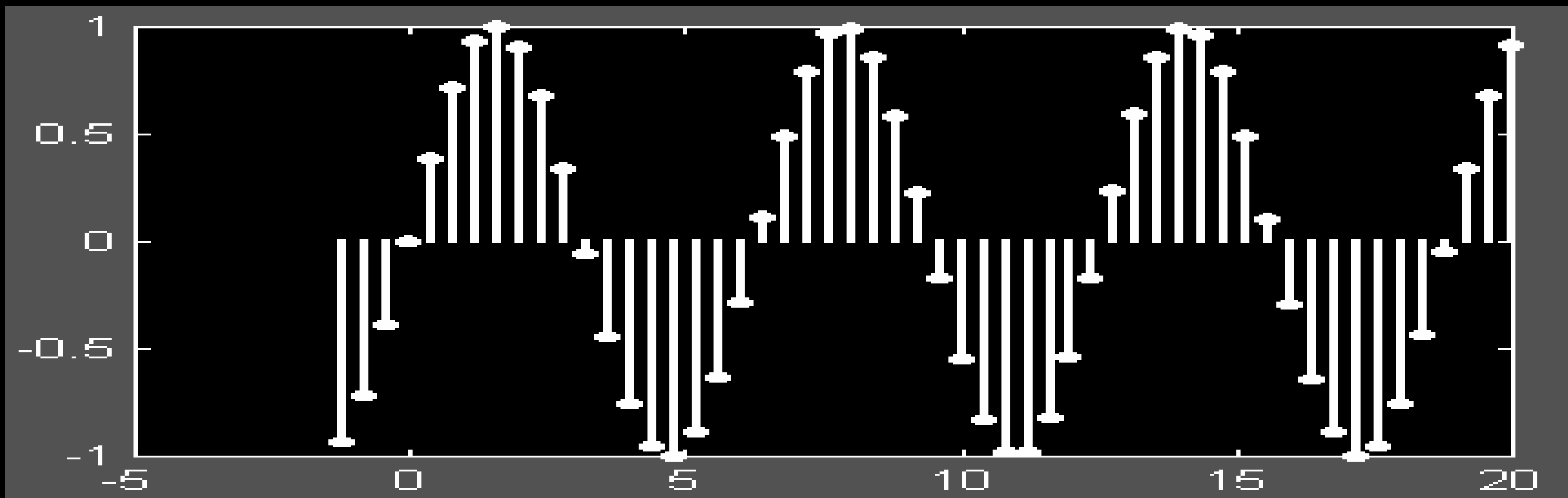


例7-2-5

信号$x(n)=\sin(0.4n)$是否为周期信号？

解答

$\omega_0 = 0.4$　　$\frac{2\pi}{\omega_0} = 5\pi$是无理数 所以为非周期的序列

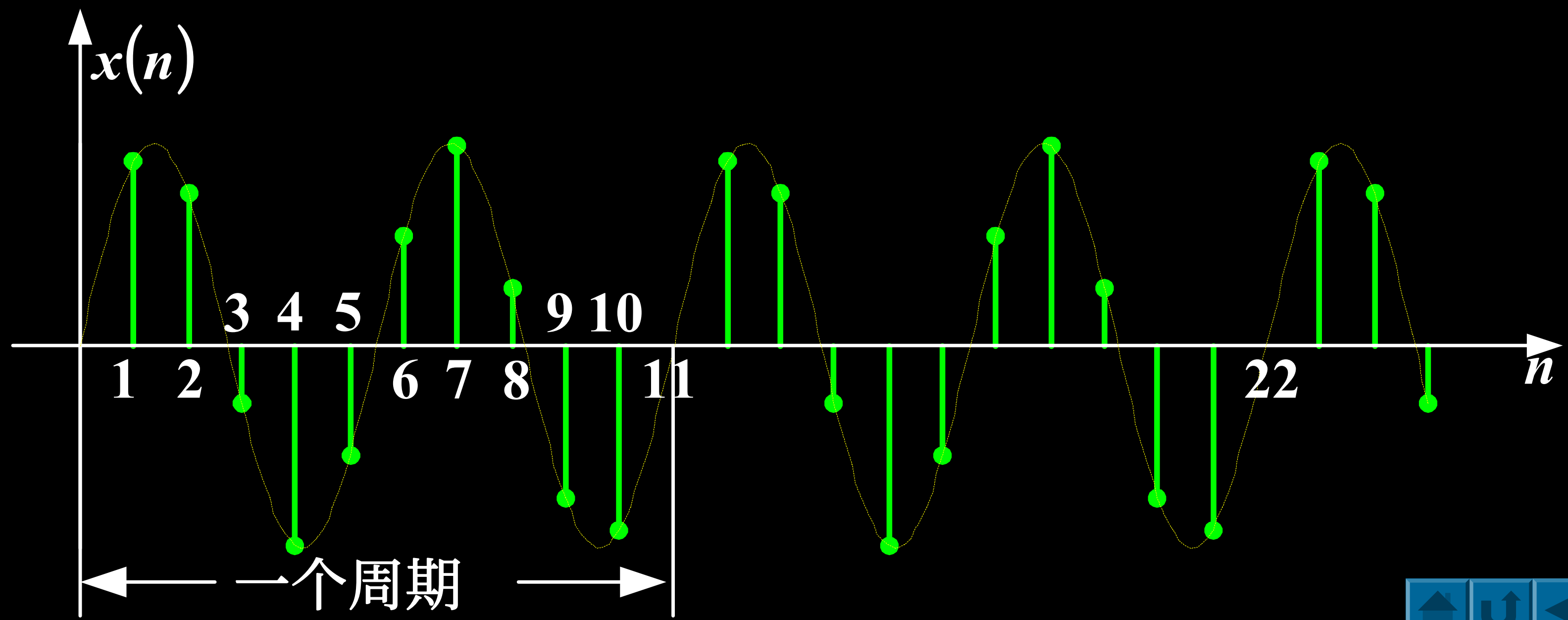


例7-2-4

已知 $\sin\frac{4\pi}{11}n$，求其周期。

解答 $\omega_0=\frac{4\pi}{11}$，则有 $\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\frac{11}{4\pi}=\frac{11}{2}=\frac{N}{m}$

所以 $N=11$，即周期为11。（2π 中有5.5个ω_0）



离散信号 $\sin(n\omega_0)$与连续信号 $\sin(\Omega_0 t)$的关系与区别

$$f(t)=\sin(2\pi f_0 t)=\sin(\Omega_0 t)\quad\left(\Omega_0=\frac{2\pi}{T}\right)$$

离散点（时刻）nT上的正弦值

$$x(nT)=\sin(\Omega_0 nT)$$

令 $\omega_0=\Omega_0 T$，离散正弦信号

$$x(n)=\sin(\omega_0 n)$$

区别:

$$\begin{cases}\Omega_0 & \text{单位 弧度/秒} \quad \text{连续} \quad \text{连续域的正弦频率}\\ \omega_0 & \text{单位 弧度} \quad \text{连续} \quad \text{离散域的频率}\end{cases}$$

$$\omega_0\in(-\pi,\ \pi)$$

7. 复指数序列

$$x(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}=\cos\omega_0 n+\mathrm{j}\sin\omega_0 n$$

复序列用极坐标表示：

$$x(n)=|x(n)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arg[x(n)]}$$

复指数序列：

$$|x(n)|=1$$

$$\arg[x(n)]=\omega_0 n$$

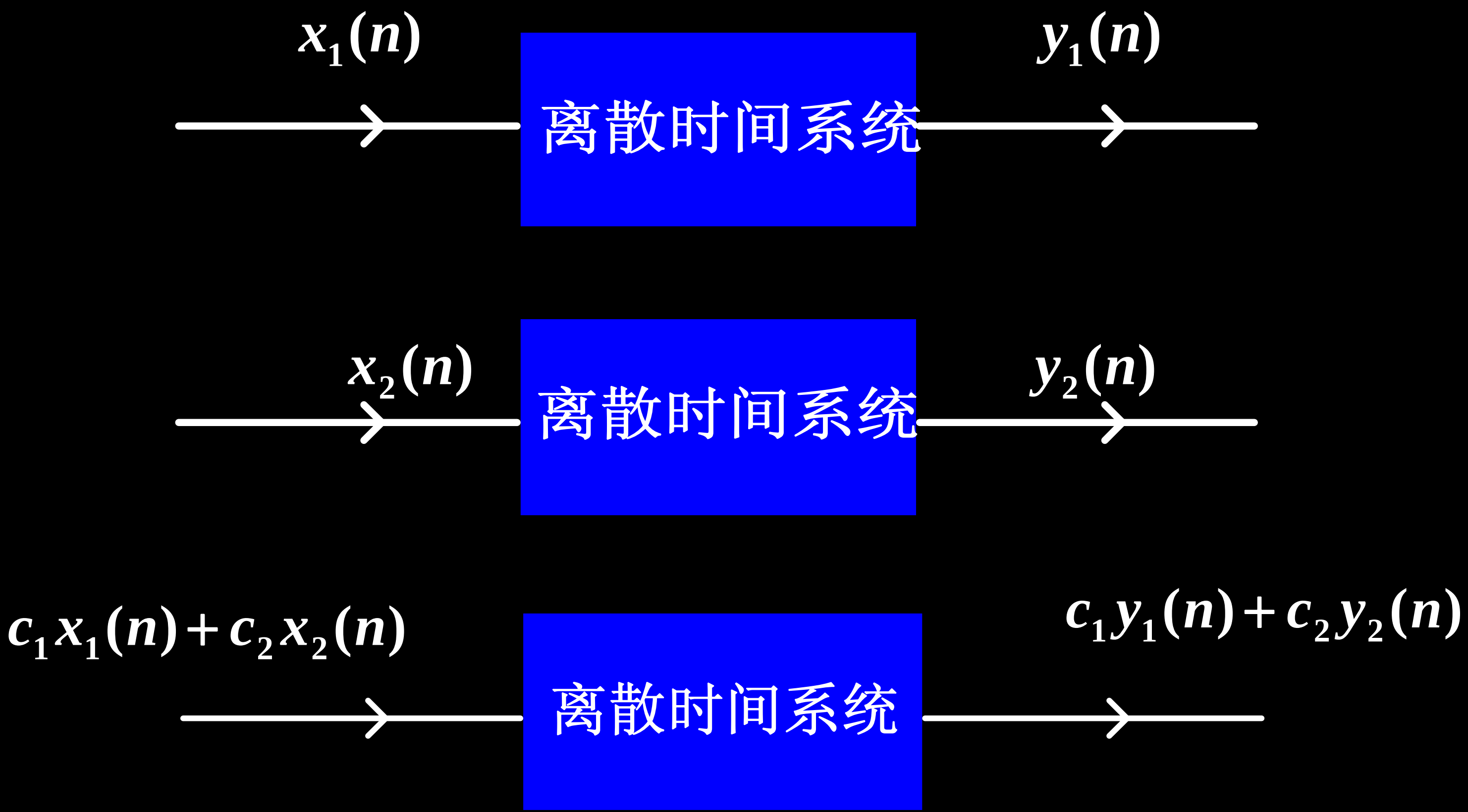
§3.3 离散时间系统的数学模型—差分方程

- 用差分方程描述线性时不变离散系统
- 由实际问题直接得到差分方程
- 由微分方程导出差分方程
- 由系统框图写差分方程
- 差分方程的特点

退出 开始

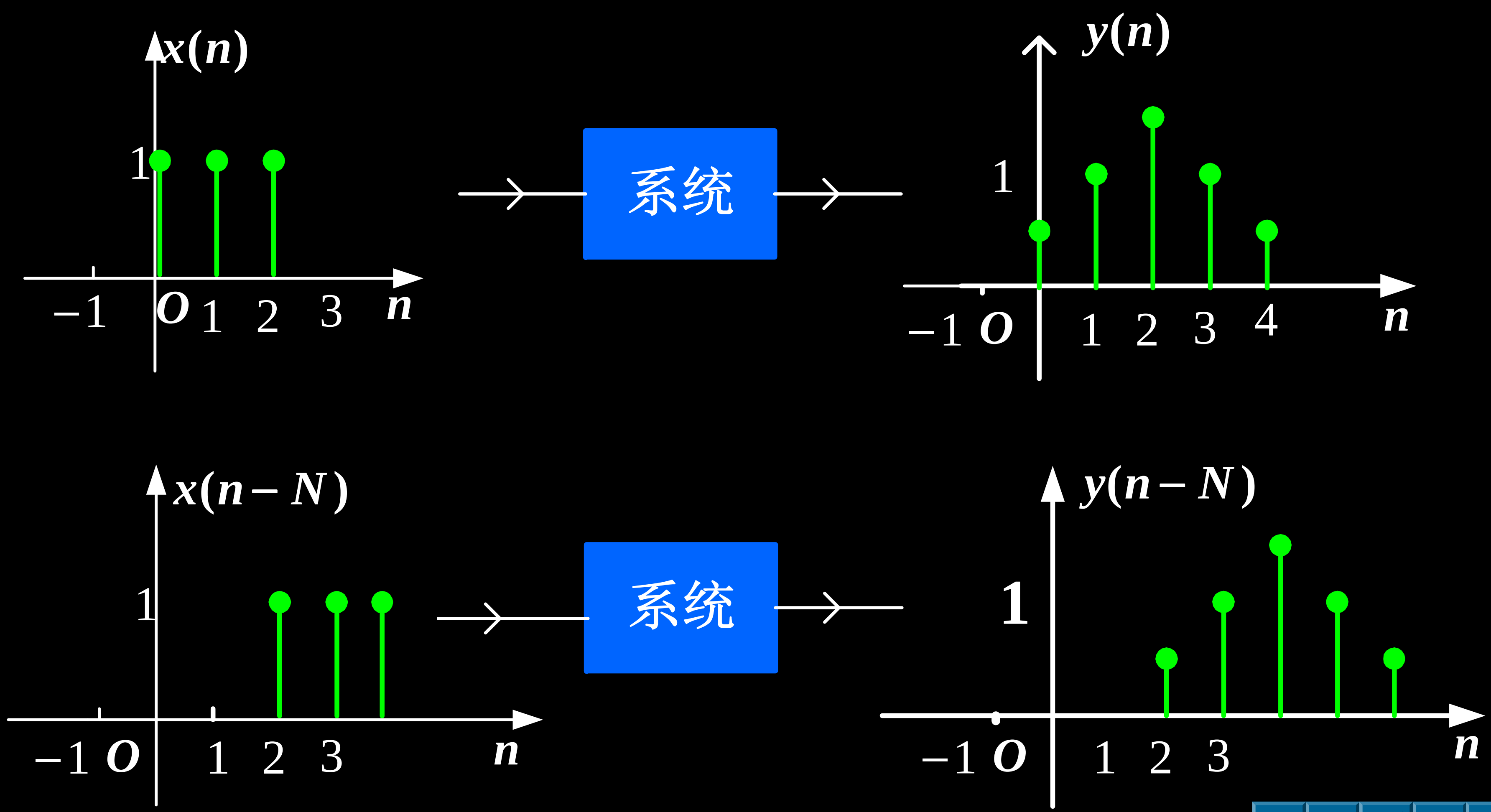
一. 用差分方程描述线性时不变离散系统

线性：均匀性、可加性均成立；



时不变性

$x(n) \rightarrow y(n)$, $x(n-N) \rightarrow y(n-N)$ 整个序列右移 N位



二. 由实际问题直接得到差分方程

例如：

$y(n)$表示一个国家在第n年的人口数

a(常数)：出生率

b(常数): 死亡率

设$x(n)$是国外移民的净增数

则该国在第$n+1$年的人口总数为：

$$y(n+1)=y(n)+ay(n)-by(n)+x(n)$$

$$=(a-b+1)y(n)+x(n)$$

三．由微分方程导出差分方程

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = ay(t) + f(t)$$

$y(t)$：输出

$f(t)$：输入

时间间隔：T

后差 $$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \approx \frac{y(t) - y(t-T)}{T}$$

或前差 $$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \approx \frac{y(t+T) - y(t)}{T}$$

列差分方程

若用后差形式

$$\frac{y(t)-y(t-T)}{T}=ay(t)+f(t)$$

若在$t=nT$ 各点取得样值

$$y(t)=y(nT)\rightarrow y(n)$$

$$f(t)=f(nT)\rightarrow f(n)$$

n代表序号

$$\frac{y(n)-y(n-1)}{T}=ay(n)+f(n)$$

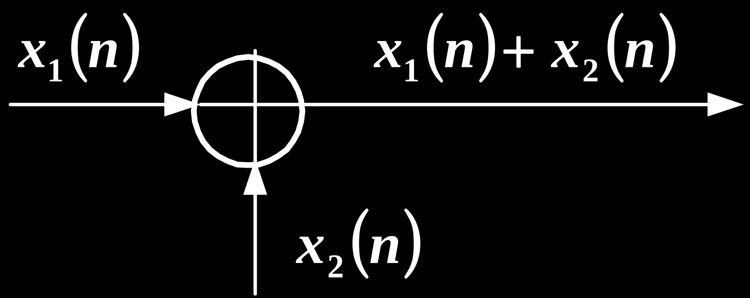
$$y(n)=\frac{1}{1-aT}y(n-1)+\frac{T}{1-aT}f(n)$$

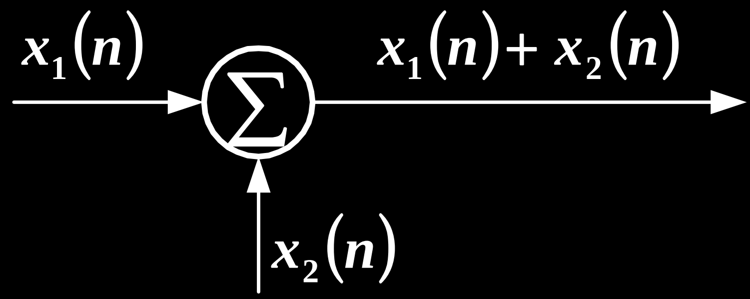
当前输出　　前一个输出　　输入

四. 由系统框图写差分方程

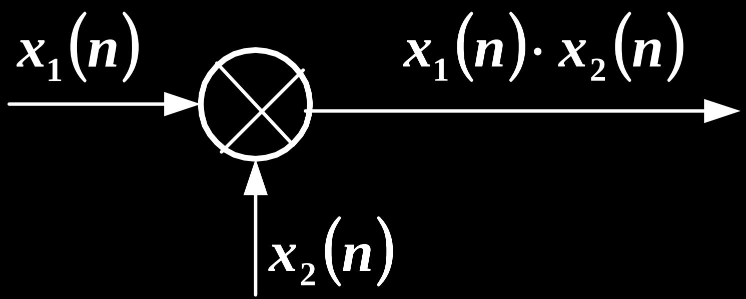
1. 基本单元

加法器:



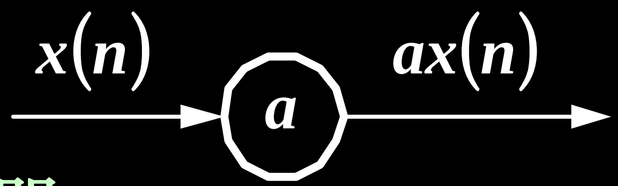


乘法器：

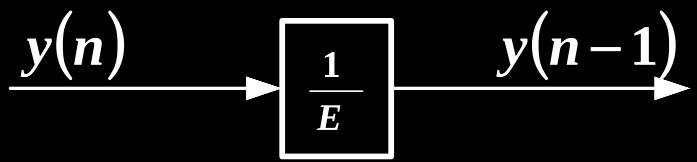


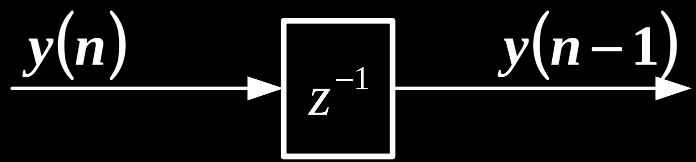
系统框图

标量乘法器



延时器



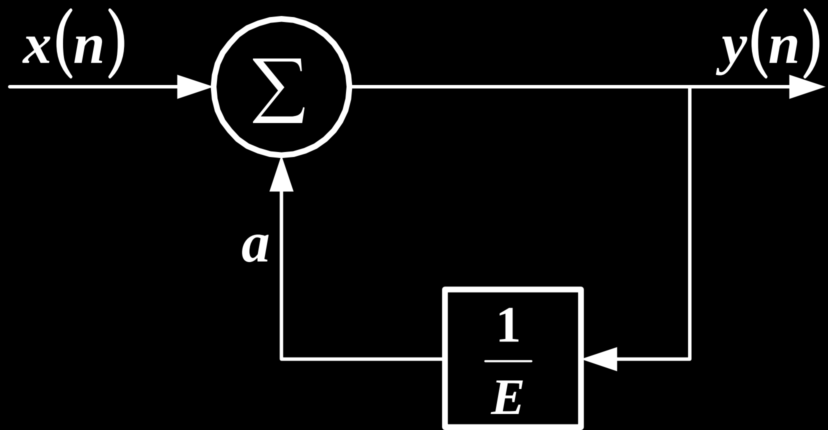


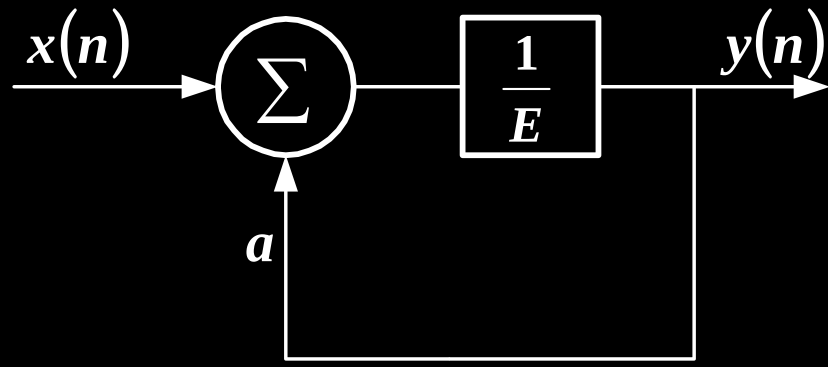
单位延时实际是一个移位寄存器，把前一个离散值顶出来，递补。

例题

例7-3-1

框图如图，写出差分方程





解：

$$y(n)=x(n)+ay(n-1) \qquad y(n+1)=x(n)+ay(n)$$

或 $y(n)=\frac{1}{a}[y(n+1)-x(n)]$

一阶后向差分方程　　一阶前向差分方程

五．差分方程的特点

(1)输出序列的第n个值不仅决定于同一瞬间的输入样值，而且还与前面输出值有关，每个输出值必须依次保留。

(2)差分方程的阶数：差分方程中变量的最高和最低序号差数为阶数。

如果一个系统的第n个输出决定于刚过去的几个输出值及输入值，那么描述它的差分方程就是几阶的。

通式：$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$

差分方程的特点

(3)微分方程可以用差分方程来逼近，微分方程解是精确解，差分方程解是近似解，两者有许多类似之处。

(4)差分方程描述离散时间系统，输入序列与输出序列间的运算关系与系统框图有对应关系，应该会写会画。

信号与系统

§3.4 常系数线性差分方程的求解

退出 开始

解法

1.迭代法

2.时域经典法：齐次解+特解

3.零输入响应+零状态响应
利用卷积求系统的零状态响应

4. z变换法→反变换→$y(n)$

一. 迭代法

解差分方程的基础方法

差分方程本身是一种递推关系,

但得不到输出序列$y(n)$的解析式

例题

例7-4-1

已知$y(n)=3y(n-1)+u(n)$，且$y(-1)=0$,求解方程。

解答

$$n=0 \quad y(0)=3y(-1)+1=1$$

$$n=1 \quad y(1)=3y(0)+1=4$$

$$n=2 \quad y(2)=3y(1)+1=13$$

$$n=3 \quad y(3)=3y(2)+1=40$$

$$\cdots\cdots$$

由递推关系,可得输出值：

$$y(n)=\left\{\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{1},\ 4,\ 13,\ 40,\ \cdots\right\}$$

二. 时域经典法

1. 齐次解：齐次方程的解

$$y(n)-ay(n-1)=0$$

但起始状态$y(-1), y(-2), \cdots y(-N)$不能全为零

$$y(-1)\neq 0, \quad \frac{y(0)}{y(-1)}=\frac{y(1)}{y(0)}=\cdots=\frac{y(n)}{y(n-1)}=a$$

说明 $y(n)$是一个公比为 a的几何级数 ，所以

$$y(n)=Ca^n$$

或由特征方程 $r-a=0$, 可得$r=a$

指数形式

$$y(n)=Cr^n=Ca^n$$

求待定系数 C由边界决定

设$y(-1)=\frac{2}{a}$, 代入原方程, 令$n=0$

$$y(0)=ay(-1)=2$$

由方程解 $y(n)$

$$y(0)=Ca^0=C$$ 所以$C=2$

齐次解

$$y(n)=2a^n$$

求差分方程齐次解步骤

差分方程→

特征方程→特征根→

$y(n)$的解析式→由起始状态定常数

根据特征根，解的三种情况

1.无重根 $r_1 \neq r_2 \neq \cdots \neq r_n$ n阶方程

$$y(n) = C_1(r_1)^n + C_2(r_2)^n + \cdots + C_n(r_n)^n$$

例题

2.有重根

例题

3.有共轭复数根

例题

例7-4-2

求解二阶差分方程 $y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=0$

已知$y(0)=2,\quad y(1)=1$。

解答

特征方程 $r^2-5r+6=0 \quad (r-2)(r-3)=0$

特征根 $r_1=2,\quad r_2=3$

齐次解 $y(n)=C_1(2)^n+C_2(3)^n$

定 C_1，C_2 $n=0 \quad y(0)=C_1+C_2=2$

$n=1 \quad y(1)=2C_1+3C_2=1$

解出 $C_1=5,\ C_2=-3$

所以$y(n)=5(2)^n-3(3)^n$

例7-4-3

求方程$y(n)+6y(n-1)+12y(n-2)+8y(n-3)=0$的解。

解答

特征方程

$$r^3+6r^2+12r+8=0 \quad (r+2)^3=0$$

所以$r=-2$　三重根

$$y(n)=C_1(-2)^n+C_2n(-2)^n+C_3n^2(-2)^n$$

给定边界条件即可求出常数　C_1，C_2，C_3

例7-4-4

设 $r_1 = Me^{j\varphi} \quad r_2 = Me^{-j\varphi}$

$$y(n) = C_1(r_1)^n + C_2(r_2)^n$$

$$= C_1\left(Me^{j\varphi}\right)^n + C_2\left(Me^{-j\varphi}\right)^n$$

$$= C_1 M^n(\cos n\varphi + j\sin n\varphi) + C_2 M^n(\cos n\varphi - j\sin n\varphi)$$

$$= PM^n \cos n\varphi + QM^n \sin n\varphi$$

P,Q为待定系数

$M = 1 \qquad y(n)$ 为等幅正弦序列

$M > 1 \qquad y(n)$ 为增幅正弦序列

$M < 1 \qquad y(n)$ 为减幅正弦序列

2. 特解

例题

线性时不变系统输入与输出有相同的形式

输入	输出
$x(n)=\mathrm{e}^{an}$	$y(n)=A\mathrm{e}^{an}$
$x(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}$	$y(n)=A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}$
$x(n)=\cos(\omega n)$	$y(n)=A\cos(\omega n+\theta)$
$x(n)=\sin(\omega n)$	$y(n)=A\sin(\omega n+\theta)$
$x(n)=n^k$	$y(n)=A_k n^k+A_{k-1}n^{k-1}+\cdots+A_1 n+A_0$
$x(n)=A$	$y(n)=C$
$x(n)=(r)^n$	$y(n)=C(r)^n$
$x(n)=(r)^n$ （r与特征根重）	$y(n)=C_1 n(r)^n+C_2(r)^n$

例7-4-5

$$\left.\begin{array}{l} y(n)+2y(n-1)=5u(n) \\ \text{且}\quad y(-1)=1 \end{array}\right\}\text{求全解。}$$

解答

$$r+2=0 \qquad r=-2$$

齐次解 $\quad y_h(n)=C_1(-2)^n$

特解 $\quad$ 因为$x(n)=5u(n) \quad n\geq 0$ 时全为 5（常数）

所以$y_p(n)=C$

代入原方程求特解 $\quad C+2C=5 \quad (n\geq 0)$

所以$C=\dfrac{5}{3}$

全解形式

$$y(n)=y_h(n)+y_p(n)=C_1(-2)^n+\frac{5}{3}$$

由边界条件定系数

由$y(-1)=1$迭代出

$$n=0 \qquad y(0)=5-2y(-1)=3$$

代入　解 $y(n)=C_1(-2)^n+\frac{5}{3}$，得

$$y(0)=3=C_1+\frac{5}{3}$$

$$\text{所以}C_1=\frac{4}{3}$$

$$\text{所以}\,y(n)=\frac{4}{3}(-2)^n+\frac{5}{3} \qquad n\geq 0$$

三. 零输入响应+零状态响应

1. 零输入响应：输入为零，差分方程为齐次

齐次解：$C(r)^n$

C由初始状态定（相当于0_-的条件）

例题

2. 零状态响应：初始状态为0，即

$$y(-1)=y(-2)=\ldots=0$$

求解方法
- 经典法：齐次解+特解
- 卷积法

例7-4-6

LTIS的差分方程 $y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)-x(n-1)$

已知$x(n)=(-2)^n u(n)$ $\qquad y(0)=y(1)=0$

求系统的零输入响应。

解答

零输入响应 $y_{zi}(n)$,即当$x(n)=0$时的解。

$$y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=0$$

$$r^2+3r+2=0 \qquad r_1=-2, \qquad r_2=-1$$

$$y_{zi}(n)=C_1(-2)^n+C_2(-1)^n$$

求初始状态（0_-状态）

题目中 $y(0)=y(1)=0$,是激励加上以后的,不能说明状态为0,需迭代求出 $y(-1), y(-2)$ 。

$n=1 \quad y(1)+3y(0)+2y(-1)=(-2)u(1)+(-2)^0 u(0)$

$$0+0+2y(-1)=(-2)+1=-1$$

$$\text{所以} y(-1)=-\frac{1}{2}$$

$n=0 \quad y(0)+3y(-1)+2y(-2)=(-2)^0 u(0)+(-2)^{-1} u(-1)$

$$0+3y(-1)+2y(-2)=1$$

$$\text{所以} y(-2)=\frac{5}{4}$$

由初始状态（0_状态）定C_1，C_2

以$y(-1)$, $y(-2)$代入方程

$$\begin{cases} y_{zi}(-1) = C_1(-2)^{-1} + C_2(-1)^{-1} = -\dfrac{1}{2} \\ y_{zi}(-2) = C_1(-2)^{-2} + C_2(-1)^{-2} = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} C_1 = -3 \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

所以$y_{zi}(n) = -3(-2)^n + 2(-1)^n$

零输入响应与输入无关

注意

在求零输入响应时，要排除输入的影响——找出输入加上以前的初始状态。

由初始状态再以 $x(n)=0$代入方程，可以求出初始值 $y(0)\neq 0, y(1)\neq 0$。

§3.5 离散时间系统的单位样值（单位冲激）响应

- 单位样值响应
- 因果性、稳定性

退出 开始

一．单位样值响应

即$\delta(n)$作用下，系统的零状态响应，表示为 $h(n)$

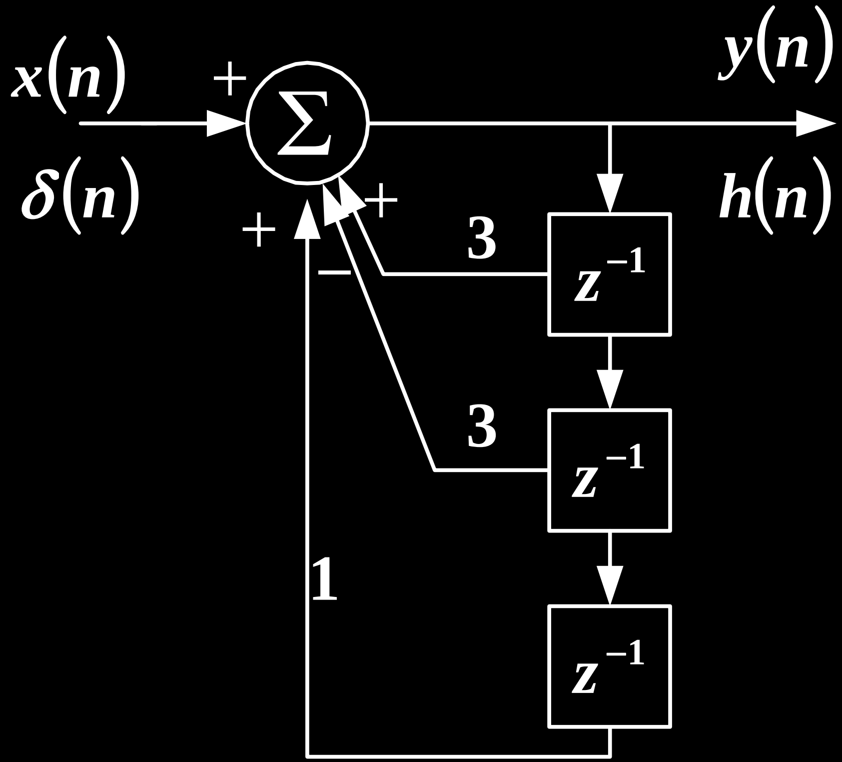
$$h(-k)=0 \quad k=1,2,3,\cdots N$$

例题　　例题

例7-5-1

已知系统框图，

求系统的单位样值响应。



解答 列方程

从加法器出发：

$$x(n)+3y(n-1)-3y(n-2)+y(n-3)=y(n)$$

$$y(n)-3y(n-1)+3y(n-2)-y(n-3)=x(n)$$

求解$h(n)$

单位样值信号　$\delta(n)$作用于系统：

$$h(n)-3h(n-1)+3h(n-2)-h(n-3)=\delta(n)$$

当$n>0$时

$$h(n)-3h(n-1)+3h(n-2)-h(n-3)=0$$

方程成为齐次方程

特征方程

$$r^3-3r^2+3r-1=0\ ,\quad (r-1)^3=0$$

特征根

$$r_1=r_2=r_3=1$$

所以$h(n)=C_1n^2+C_2n+C_3$

如何求待定系数？ 先求边界条件

零状态 $h(-1)=h(-2)=h(-3)=0$

可迭代出$h(0)$, $h(1)$, $h(2)$

$$h(0)=3h(-1)-3h(-2)+h(-3)+\delta(0)=1$$

$$h(1)=3h(0)-3h(-1)+h(-2)=3$$

$$h(2)=3h(1)-3h(0)+h(-1)=6$$

代入$h(n)=C_1n^2+C_2n+C_3$得

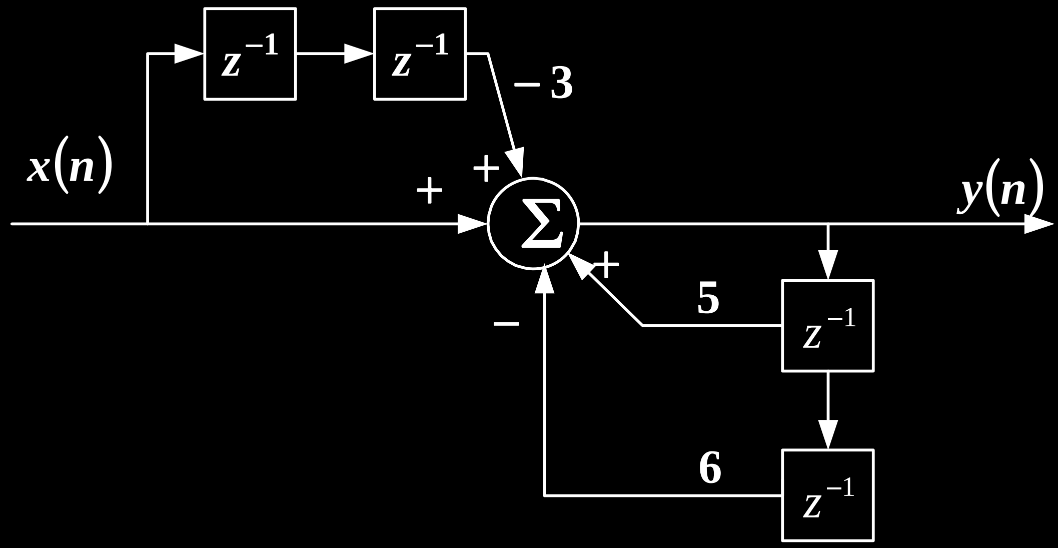
$$C_1=\frac{1}{2},\quad C_2=\frac{3}{2},\quad C_3=1$$

所以$h(n)=\left(\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1\right)u(n)$

对于求$h(n)$，边界条件中至少有一项是$n\geq 0$的。

例7-5-2

系统图为

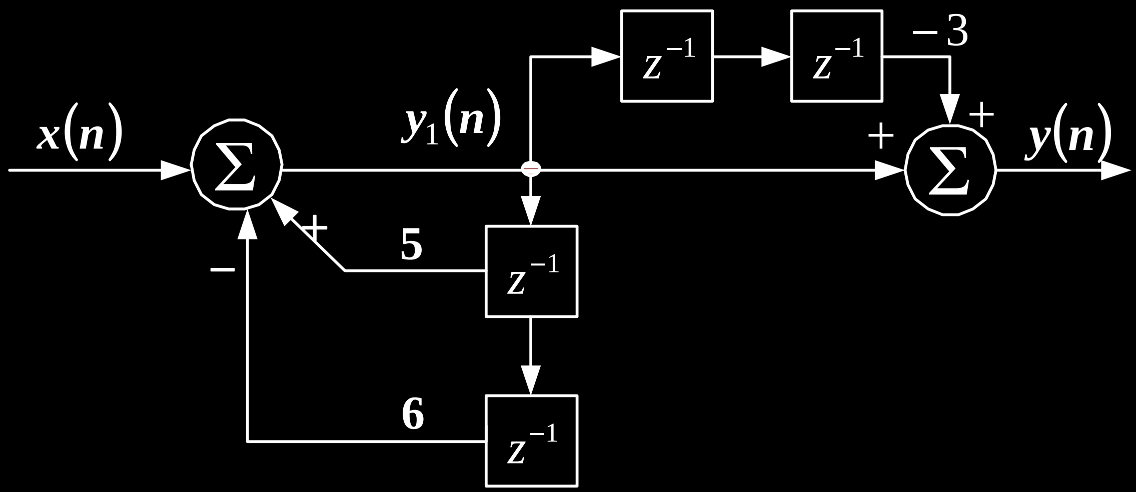


$$y(n)=x(n)-3x(n-2)+5y(n-1)-6y(n-2)$$

$$y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)-3x(n-2)$$

可以用线性、时不变特性求解

$$y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)-3x(n-2)$$



二. 因果性、稳定性

因果系统：输出变化不领先于输入变化的系统。

对于线性时不变系统是因果系统的充要条件：

$$n<0 \qquad h(n)=0$$

一个非因果系统的示例

稳定性的充要条件：

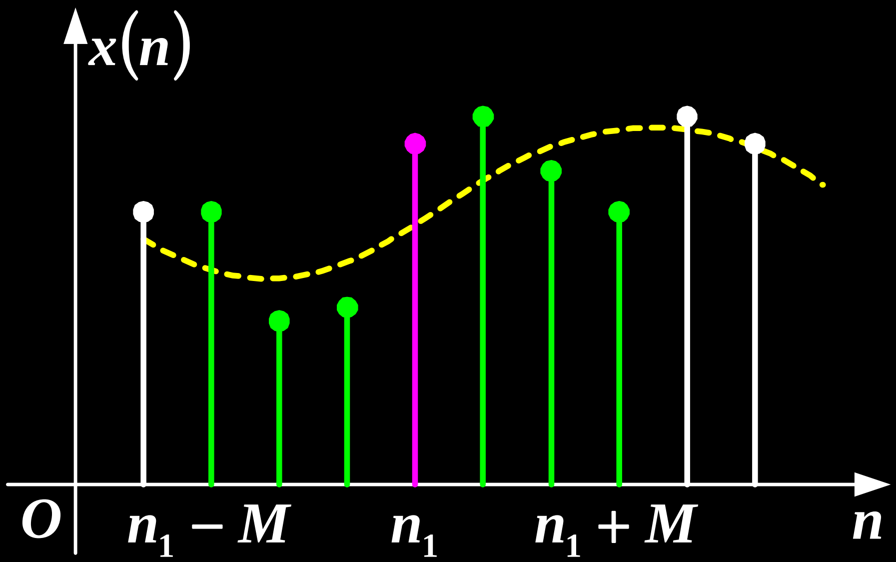
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=P<\infty$$

单位样值响应绝对和为有限值（绝对可和）收敛。

例题

滑动平均滤波器

$$y(n)=\frac{1}{2M+1}\sum_{k=-M}^{M}x(n-k)$$



非因果系统

例7-5-3　$h(n)=a^n u(n)$

(1)讨论因果性：

因为是单边有起因，　即$n<0$时，$h(n)=0$

所以系统是因果的。

(2)讨论稳定性：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty}|a^n| = \begin{cases} \dfrac{1}{1-|a|} & |a|<1 \\ \infty & |a|\geq 1 \end{cases}$$

只有当 $|a|<1$时，$h(n)$收敛，即

即$|a|<1$,系统是稳定的

信号与系统

§3.6 卷积（卷积和）

- 卷积和定义
- 离散卷积的性质
- 卷积计算

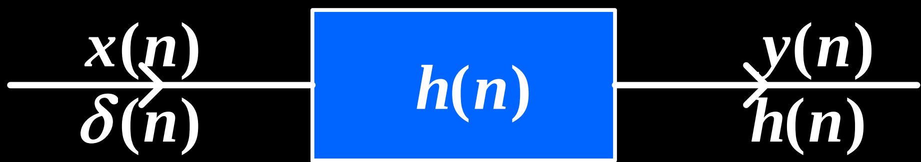
退出 开始

一． 卷积和定义

任意序列$x(n)$表示为$\delta(n)$的加权移位之线性组合：

$$x(n)=\cdots x(-1)\delta(n+1)+x(0)\delta(n)+x(1)\delta(n-1)+\cdots+x(m)\delta(n-m)+\cdots$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$



时不变 $\delta(n-m) \to h(n-m)$

均匀性 $x(m)\delta(n-m) \to x(m)h(n-m)$

可加性 $x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)$

输出 $y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = x(n) * h(n)$

系统对 $x(n)$的响应 = 每一样值产生的响应之 和，在各处由 $x(m)$加权。

卷积和的公式表明：

$h(n)$将输入输出联系起来，即零状态响应 $= x(n) * h(n)$。

二. 离散卷积的性质

1. 交换律

$$x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$$

不存在微分、积分性质。

2. 结合律

$$x(n)*h_1(n)*h_2(n)=x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]$$

3. 分配律

$$x(n)*\left[h_1(n)+h_2(n)\right]=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)$$

4. $x(n)*\delta(n)$

$$x(n)*\delta(n)=x(n) \qquad x(n)*\delta(n-n_0)=x(n-n_0)$$

$$x(n)*u(n)=\sum_{m=-\infty}^{n}x(m)=\sum_{m=0}^{\infty}x(n-m)$$

$$x_1(n-n_1)*x_2(n-n_2)=x_1(n)*x_2(n)*\delta(n-n_1-n_2)$$

三．卷积计算

$$x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

m范围由$x(n),h(n)$范围共同决定。

离散卷积过程：序列倒置→移位→相乘→取和

1.解析式法

2.图解法

3.对位相乘求和法求卷积

4.利用性质

5.列表法

例7-6-1

已知 $x(n)=\alpha^n u(n)\quad(0<\alpha<1)$，$h(n)=u(n)$，求卷积 $y(n)=x(n)*h(n)$。

解答

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\alpha^m u(m)u(n-m)$$

要点：
定上下限

宗量：$m\geq 0,\quad m\leq n$ 即 $0\leq m\leq n, n\geq 0$

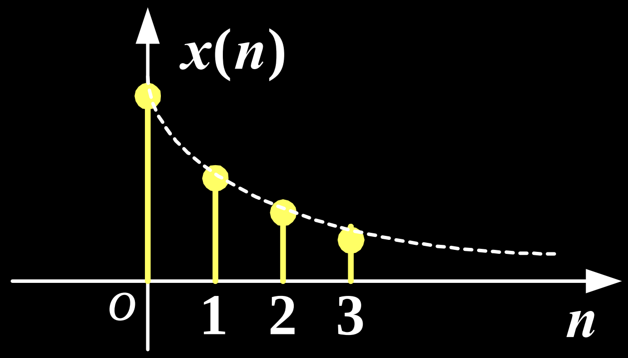
从图中可见求和上限n，下限0

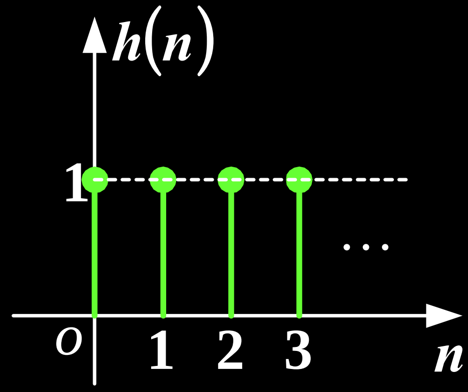
$$y(n)=\left(\sum_{m=0}^{n}\alpha^m\right)\cdot u(n)=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}u(n)$$

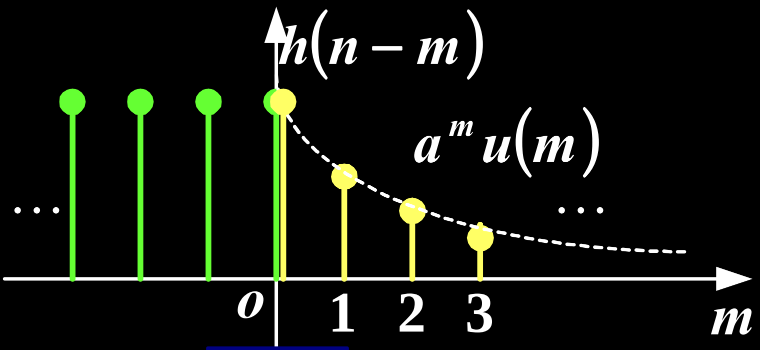
当$n\to\infty$时

$$y(n)=\frac{1}{1-\alpha}$$

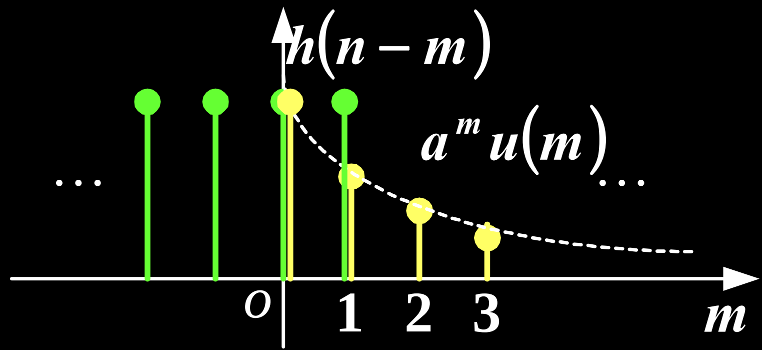
波形





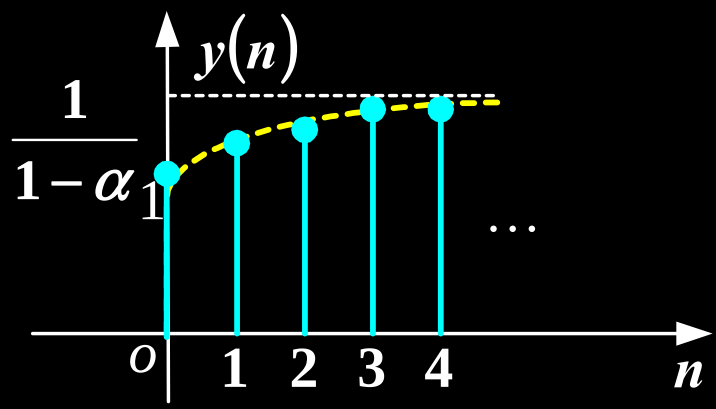


$n=0$



$n=1$

$$y(n)=u(n)\cdot\sum_{m=0}^{n}\alpha^{m}=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}u(n)$$



当$n\to\infty$时，$y(n)=\dfrac{1}{1-\alpha}$

例7-6-2

$$\text{已知}x_1(n)=\left\{\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{4},\ 3,\ 2,\ 1\right\},\quad x_2(n)=\left\{\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{3},\ 2,\ 1,\right\},$$

求：$y(n)=x_1(n)*x_2(n)$

使用对位相乘求和法求卷积

步骤：

两序列右对齐→

逐个样值对应相乘但不进位→

同列乘积值相加（注意$n=0$的点）

解答

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & x_1(n) & : & & & \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{4} & 3 & 2 & 1 \\
\times & x_2(n) & : & & & & \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{3} & 2 & 1 \\
\hline
 & & & & & 4 & 3 & 2 & 1 \\
 & & & & 8 & 6 & 4 & 2 & \\
+ & & & 12 & 9 & 6 & 3 & & \\
\hline
 & y(n) & : & \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{12} & 17 & 16 & 10 & 4 & 1
\end{array}
$$

$$
\text{所以} y(n) = \left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{12}, \quad 17, \quad 16, \quad 10, \quad 4, \quad 1 \right\}
$$

例7-6-4

已知$x(n)=R_3(n), h(n)=\left\{\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{1},2,3\right\}$，求$x(n)*h(n)$。

解答

$$x(n)=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)$$

$$h(n)=\delta(n)+2\delta(n-1)+3\delta(n-2)$$

利用分配律

$$\begin{aligned}
&x(n)*h(n)\\
&=\delta(n)+2\delta(n-1)+3\delta(n-2)\\
&\qquad+\delta(n-1)+2\delta(n-2)+3\delta(n-3)\\
&\qquad\qquad+\delta(n-2)+2\delta(n-3)+3\delta(n-4)\\
&=\delta(n)+3\delta(n-1)+6\delta(n-2)+5\delta(n-3)+3(n-4)
\end{aligned}$$

例7-6-5

列表法

分析卷积和的过程，可以发现有如下特点：

① $x(n)$ 与 $h(n)$的所有各点都要遍乘一次；

② 在遍乘后，各点相加时，根据 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$，参与相加的各点都具有 $x(k)$ 与 $h(n-k)$的之和为 n 的特点。

		$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$
$h(n)$	$x(n)$	1	0	2	1
$h(-1)$	1	1	0	2	1
$h(0)$	2	2	0	4	2
$h(1)$	0	0	0	0	0
$h(2)$	3	3	0	6	3
$h(3)$	1	1	0	2	1

$y(-1)$ $y(0)$ $y(1)$ $y(2)$ $y(3)$ $y(4)$ $y(5)$ $y(6)$

优点：计算非常简单。

缺点：①只适用于两个有限长序列的卷积和；

②一般情况下，无法写出 $y(n)$ 的封闭表达式。

$y(n)$的元素个数?

$x(n)$ n_A

$h(n)$ n_B

$y(n)$ $n_C = n_A + n_B - 1$

若： $x(n)$序列 $n_1 \le n \le n_2$,

$h(n)$序列 $n_3 \le n \le n_4$

则$y(n)$序列 $(n_1 + n_3) \le n \le (n_2 + n_4)$

例如： $x(n)$： $0 \le n \le 3$ 4个元素

$h(n)$： $0 \le n \le 4$ 5个元素

$y(n)$： $0 \le n \le 7$ 8个元素