Wie kann man prüfen, ob eine affine Transformation des $\mathbb{R}^2$ kontrahierend ist?

Eine affine Abbildung $f(\vec{x}) = M \cdot \vec{x} + \vec{v}$, $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist (nach Definition) genau dann kontrahierend, wenn es eine Konstante $0 \le s < 1$ gibt, sodass für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\| f(\vec{x}) - f(\vec{y}) \| = \| M \cdot (\vec{x} - \vec{y}) \| \le s \cdot \| \vec{x} - \vec{y} \|$$

(es kommt also nur auf die Matrix an, die Translation ist egal!)

Man kann zeigen, dass sich die Eigenschaft „kontrahierend" wie folgt an der Matrix ablesen lässt:

Eine affine Abbildung $f(\vec{x}) = M \cdot \vec{x} + \vec{v}$ mit Matrix $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist genau dann kontrahierend, wenn für die Spalten(-vektoren) $\vec{m}_1$, $\vec{m}_2$ der Matrix M die folgende Bedingung erfüllt ist:

$\|\vec{m}_1\|^2 < 1$ und $\|\vec{m}_2\|^2 < 1$ und $\|\vec{m}_1\|^2 + \|\vec{m}_2\|^2 + (\vec{m}_1 \circ \vec{m}_2)^2 < 1 + \|\vec{m}_1\|^2 \cdot \|\vec{m}_2\|^2$

Dabei bezeichnet $\|\vec{m}_i\|$ den Betrag (die Länge) eines Spaltenvektors und $\vec{m}_1 \circ \vec{m}_2$ das Skalarprodukt der beiden Spaltenvektoren.