Lærebog i matematik hhx 1

Kort beskrivelse
Bind 1 med kernestof og supplerende stof til matematik B på hhx. Dækker sammen med Bind 2 kernestoffet til matematik B.
150 eksempler
265 øvelser
342 sider
Se, hvad du får adgang til

LÆREBOG I MATEMATIK HHX 1

ISBN 9788761685704

Indholdsfortegnelse

ISBN 9788761685704

ISBN 9788761685704

Kapitel 1. Tal og regneregler

1.1 De reelle tal

De reelle tal udgør de tal, vi normalt arbejder med, og som er kendt fra grundskolen. De er resultatet af tusinde års udvikling af regnekunsten og talerkendelse, hvor især tallet 0 (for ingenting) og de negative tal voldte problemer.

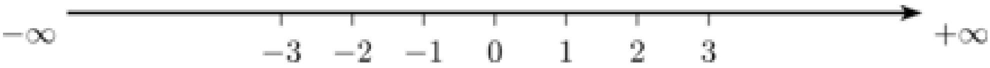
Vi vil her beskrive de reelle tal og udvalgte dele af de reelle tal ved hjælp af en tallinje og dele af denne.

1.1.1 Tallinjen

De reelle tal kan vi illustrere ved en tallinje, hvor ethvert punkt repræsenterer et tal.

Som udgangspunkt tegner vi en linje og vælger et punkt, der svarer til tallet 0. Desuden vælger vi en enhed, som vi benytter til at afsætte de hele tal med, som vist på figur 1111.

Endelig tegner vi en pil på tallinjen, der angiver den retning, hvori tallene vokser.



Figur 1111 *Den reelle tallinje*

Tegnet ∞ kalder vi *uendelig*, og her betyder tegnet, at tallinjen fortsætter uendeligt langt ud til begge sider.

De reelle tal $\mathbb{R}$ omfatter de *naturlige tal*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

de *hele tal*

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

de *rationale tal* $\mathbb{Q}$, dvs. brøker med hel tæller og nævner, f.eks.

$$-\frac{18}{5}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{11}{8}$$

og endelig de *irrationale tal*, dvs. de reelle tal, der ikke er rationale.

De naturlige tal er også hele tal, og de hele tal er også rationale tal. Tallet −3 kan vi f.eks. skrive som

$$-3 = -\frac{6}{2}$$

ISBN 9788761685704

De irrationale tal er de tal, som vi ikke kan skrive som en brøk bestående af hele tal i både tæller og nævner. F.eks. er $\sqrt{2}$, $-\sqrt[3]{7}$, π og $\frac{1}{\pi}$ irrationale tal.

Et rationalt tal har en decimalbrøkfremstilling, der er endelig eller periodisk. F.eks. er

$$\frac{1}{16} = 0{,}0625 \quad \text{og} \quad \frac{12}{7} = 1{,}714\,285\,714\,285\,714\,285\ldots = 1{,}\overline{714285}$$

rationale tal.

Et irrationalt tal har en uendelig, ikke-periodisk decimalbrøksfremstilling.

Øvelse 1111

Indsæt tallene

$$4,\ -8\frac{1}{3},\ \sqrt{9},\ \frac{11}{3},\ (-2)^3 \quad \text{og} -8{,}25$$

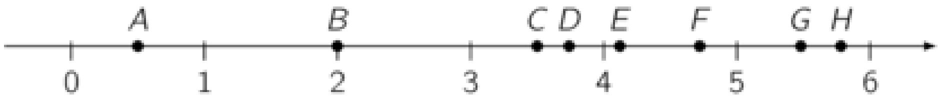
på samme tallinje.

Øvelse 1112

Match hvert af tallene

$$\sqrt{14} \qquad \sqrt{4} \qquad \sqrt{17} \qquad \sqrt{30}$$

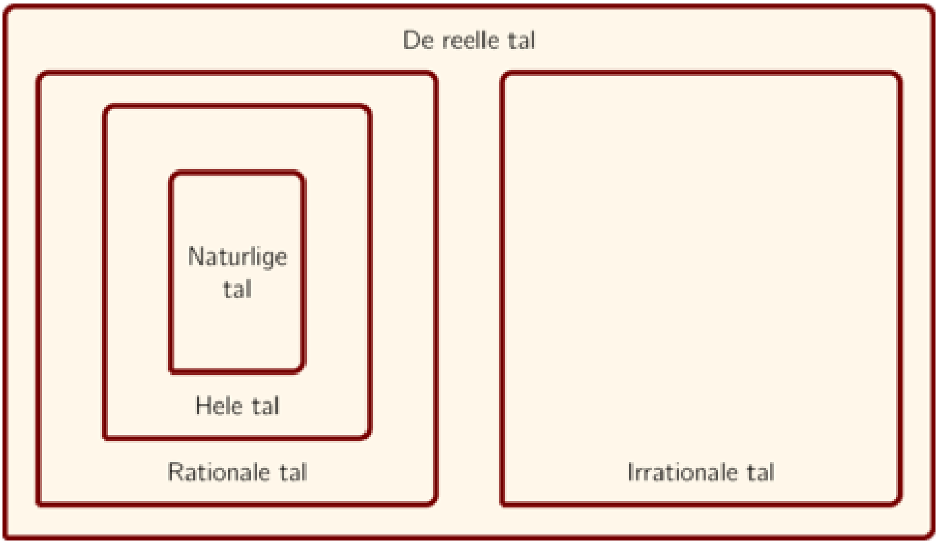
med punkterne på tallinjen nedenfor



ISBN 9788761685704

Øvelse 1113

De reelle tal kan illustreres ved en slags "kassediagram"



Placér hvert af de følgende tal korrekt på denne figur

$$\frac{15}{12},\ -3\frac{3}{4},\ \sqrt{40},\ 6 \quad 0,\overline{4},\ 0{,}353739311\ldots\ ,\ \sqrt{16},\ 0,\ -\frac{36}{12}$$

1.1.2 Intervaller

Vi arbejder ofte med en udvalgt del af de reelle tal. Hertil svarer linjestykker og halvlinjer på tallinjen.

F.eks. svarer alle tallene fra og med –1 til og med 5 til linjestykket vist på figur 1121.

Figur 1121
Mængden af tal svarende til linjestykket skriver vi kort

$$[\,-1;\,5\,]$$

og vi kalder det det lukkede interval fra –1 til 5. Intervallet svarer til de reelle tal, der opfylder, at

$$-1 \le x \le 5$$

ISBN 9788761685704

Tallene –1 og 5 kalder vi intervallets *endepunkter*, og det venstre endepunkt skal altid være det mindste tal.

Når en intervalklamme vender væk fra et tal, er tallet ikke med i intervallet.
Således svarer intervallet

$$[-2;\, 7\,[$$

til alle reelle tal mellem –2 og 7, hvor –2 skal medregnes, mens 7 ikke skal medregnes. Altså de tal *x*, der opfylder, at

$$-2 \leq x < 7$$

Figur 1122
At vi ikke skal medtage tallet 7, viser vi ved at lave en ikke-udfyldt bolle i tallet 7.

Linjestykker på en tallinje svarer til *begrænsede intervaller*, hvor tallene i intervallet ligger mellem intervallets endepunkter.

Halvlinjer på en tallinje svarer til *ubegrænsede intervaller.*

Figur 1123
Halvlinjen på figur 1123 svarer til tallene, der højst er 2, dvs. til de tal *x*, der opfylder, at $x \leq 2$. Her er der ingen nedre grænse for, hvor små tallene kan blive, og det viser vi ved at bruge $-\infty$ som "endepunkt". Vi kan derfor opskrive det interval, som halvlinjen svarer til, som

$$]-\infty;\, 2\,]$$

Halvlinjen svarende til intervallet $]-4;\,\infty\,[$, dvs. de tal *x*, der opfylder, at *x* > –4, er vist på figur 1124.

Figur 1124
Læg mærke til, at intervalklammen altid skal vende væk fra $-\infty$ og ∞, da disse symboler ikke er tal.

Intervallet $[-3; 7]$ omtaler vi som det *lukkede* interval fra og med –3 til og med 7.

Intervallet $]-3; 7[$ omtaler vi som det *åbne* interval fra –3 til 7.

Det lukkede interval fra $-\infty$ til og med 1 er $]-\infty; 1]$, og det åbne interval fra 4 til ∞ er $]4; \infty[$.

Endelig opfatter vi de reelle tal $\mathbb{R}$ som intervallet $]-\infty; \infty[$.

ISBN 9788761685704

Øvelse 1121

Omform følgende sætninger til uligheder

a. *x* er større end 1
b. *x* er mindre end eller lig med –4
c. *x* er mindst –3
d. *x* er højst 11
e. *x* er mindst 2 og højst 5
f. *x* er negativ

Øvelse 1122

Angiv de intervaller, som svarer til følgende uligheder

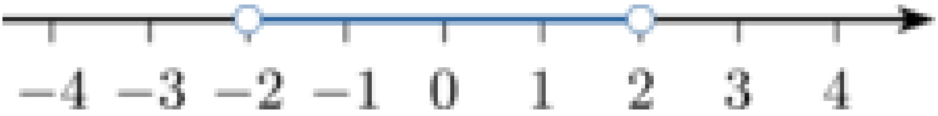
a. $x > 1$
b. $x \geq -7$
c. $x \leq -2$
d. $x < 5$
e. $-9 \leq x \leq 0$
f. $1 < x \leq 3$
g. $10 > x > 3$

ISBN 9788761685704

Øvelse 1123

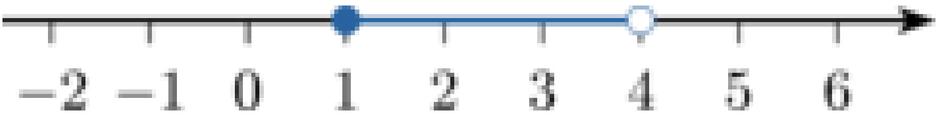
Angiv intervallerne svarende til hver af de følgende dele af tallinjen

a.



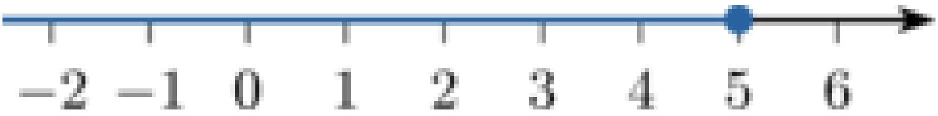
Figur 1125

b.



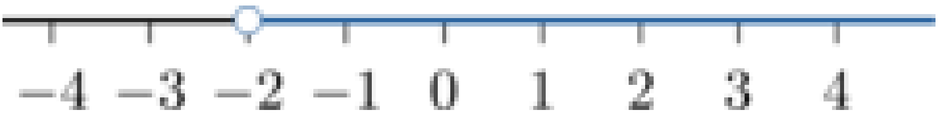
Figur 1126

c.



Figur 1127

d.

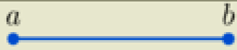
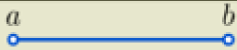
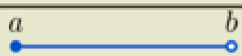
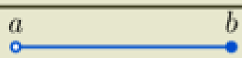
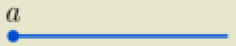
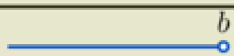
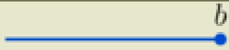


Figur 1128

Typer af intervaller

Tabel 1121 indeholder en oversigt over de forskellige typer af intervaller.

ISBN 9788761685704

Område	Svarer til	Interval	Beskrivelse
	$a \leq x \leq b$	$[a;\, b]$	begrænset, lukket
	$a < x < b$	$]a;\, b[$	begrænset, åbent
	$a \leq x < b$	$[a;\, b[$	begrænset
	$a < x \leq b$	$]a;\, b]$	begrænset
	$a < x$	$]a;\, \infty[$	ubegrænset, åbent
	$a \leq x$	$[a;\, \infty[$	ubegrænset, lukket
	$x < b$	$]-\infty;\, b[$	ubegrænset, åbent
	$x \leq b$	$]-\infty;\, b]$	ubegrænset, lukket

Tabel 1121

1.1.3 Fællesmængder

Tallet –2 er et tal i intervallet $[\,-6\,;\,4\,[$, og dette skriver vi som

$$-2 \in [-6\,;\,4\,[$$

Symbolet $\in$ læser vi som *tilhører*.

Tallet 10 er ikke med i intervallet $]\,12\,;\,15\,[$, hvilket vi skriver

$$10 \notin]\,12\,;\,15\,[$$

og vi siger, at 10 *ikke tilhører* intervallet $]\,12\,;\,15\,[$.

Med denne notation gælder

$$x \in [\,a\,;\,b\,] \quad \text{netop når} \quad a \leq x \leq b$$

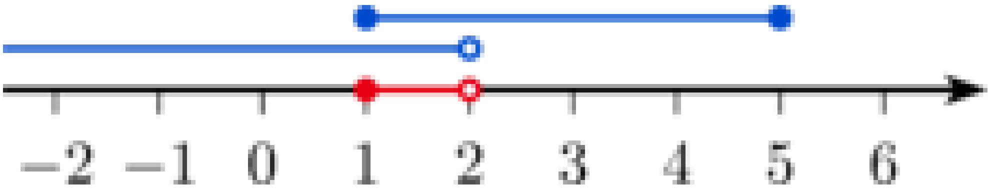
Vi ser nu på udsagnet

$$1 \leq x \leq 5 \quad \text{og} \quad x < 2 \quad (*)$$

Det første krav $1 \leq x \leq 5$, svarer til, at *x* skal ligge i intervallet $[\,1;\,5\,]$, mens det andet krav $x < 2$, svarer til, at *x* skal ligge i intervallet $]-\infty;\,2\,[$. Dermed svarer $(*)$ til, at *x* skal ligge i begge intervaller.

Vi kan illustrere det på en figur, som viser intervallerne

ISBN 9788761685704



Figur 1131
Af figuren ser vi, at de *x*-værdier, der ligger i begge intervaller, svarer til intervallet $[1;\,2\,[$. Dette interval kalder vi *fællesmængden* af intervallerne $[1;\,5]$ og $]-\infty;\,2\,[$. Vi skriver også

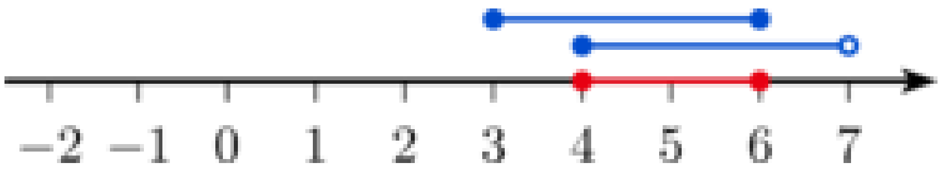
$$[1;\,5]\cap\,]-\infty;\,2\,[\;=\;[1;\,2\,[$$

Fællesmængden mellem to intervaller er de tal, som ligger i begge intervaller; altså de tal, som de to intervaller har "tilfælles".

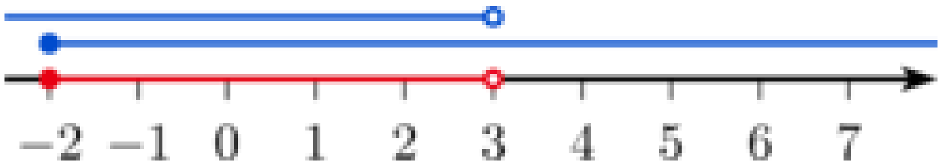
Er en fællesmængde et eller flere enkelte tal, lister vi disse tal i mængdeklammer $\{\ \}$. Hvis der ikke er nogle fælles tal mellem to intervaller, er fællesmængden tom, og den tomme mængde angiver vi med Ø.

Eksempel 1131

Af figur 1132



Figur 1132



Figur 1133

ISBN 9788761685704

Eksempel 1132

Vi ser, at

$$[-5;\ 2] \cap]2;\ 4[= \emptyset$$

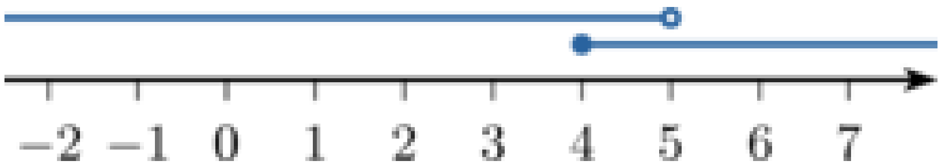
og at

$$[0;\ 3] \cap [3;\ 12[= \{3\}$$

Øvelse 1131

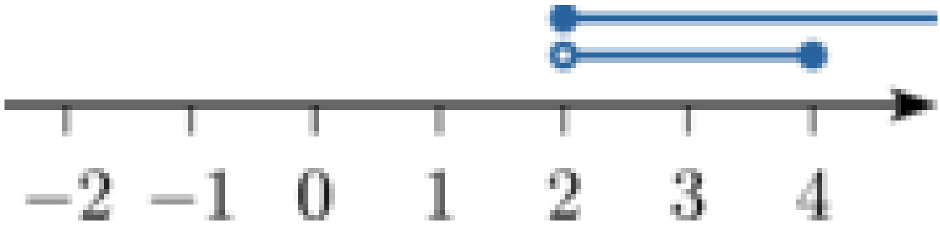
Aflæs fællesmængden ud fra figuren

a.



Figur 1134

b.



Figur 1135

Øvelse 1132

Bestem fællesmængden af *A* og *B*

a. når $A = [\,7\,;\,12\,[$ og $B =]\,3\,;\,9\,]$
b. når $A = [\,-4\,;\,9\,[$ og $B =]\,6\,;\,10\,[$
c. når $A =]-3\,;\,8\,]$ og $B =]-1\,;\,4\,]$
d. når $A =]-14\,;\,15\,]$ og $B = [\,15\,;\,18\,]$

Øvelse 1133

Bestem fællesmængden af *A* og *B*

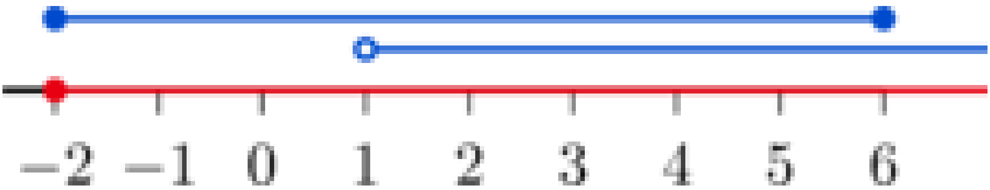
a. når $A = [\,-10\,;\,2\,]$ og $B =]-\infty\,;\,1\,[$
b. når $A =]-5\,;\,5\,[$ og $B =]-1\,;\,\infty\,[$
c. når $A = [\,1-\sqrt{3}\,;\,1+\sqrt{2}\,]$ og $B = [\,\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\,[$

1.1.4 Foreningsmængder

Et udsagn på formen

$$-2 \leq x \leq 6 \quad \text{eller} \quad x > 1 \quad (*)$$

svarer til, at *x* skal ligge i intervallet $[\,-2;\,6\,]$ eller i intervallet $]\,1;\,\infty\,[$. Tallet *x* skal altså ligge i mindst ét af intervallerne, men må gerne ligge i begge. Vi tegner igen en figur, der viser intervallerne.



Figur 1141
Af figuren ser vi, at *x* skal ligge i intervallet $[\,-2;\,\infty\,[$. Dette interval kalder vi *foreningsmængden* af $[\,-2;\,6\,]$ og $]\,1;\,\infty\,[$, som vi skriver

$$[\,-2;\,6\,] \cup]\,1;\,\infty\,[\,=\, [\,-2;\,\infty\,[$$

Foreningsmængden mellem to intervaller kan ikke blive tom. Nogle gange bliver foreningsmængden ét interval, men det er ikke altid tilfældet.

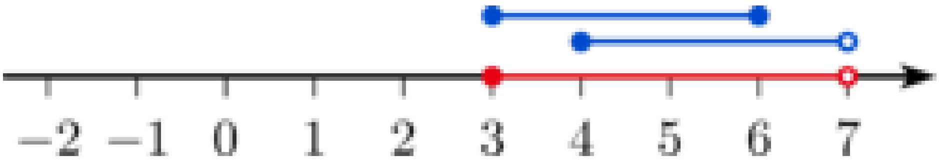
ISBN 9788761685704

Eksempel 1141

Vi har

$$[\,3;\,6\,]\;\cup\;[\,4;\,7\,[\,=\;[\,3;\,7\,[$$

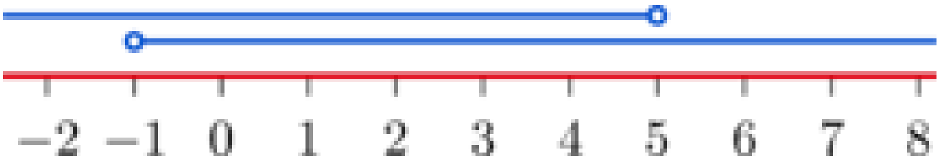
hvilket vi ser af figur 1142.



Figur 1142

Foreningsmængden $[\,1;\,5\,]\cup\,]-3;\,0\,[$ kan vi derimod ikke skrive simplere.

Foreningsmængden af $]-\infty;\,5\,]\cup\,]-1;\,\infty\,[\,=\mathbb{R}$, som illustreret på figur 1143.



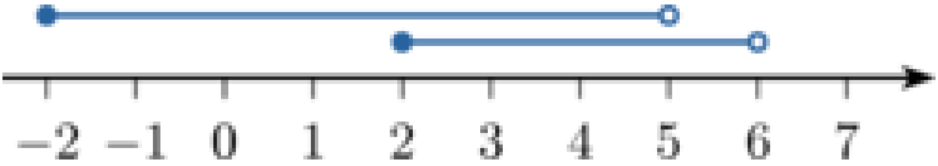
Figur 1143

ISBN 9788761685704

Øvelse 1141

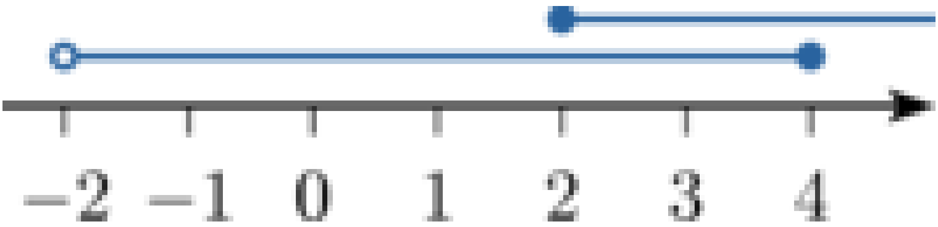
Aflæs foreningsmængden ud fra figuren.

a.



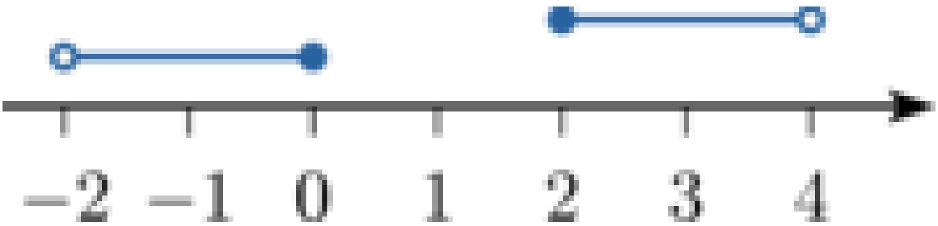
Figur 1144

b.



Figur 1145

c.



Figur 1146

ISBN 9788761685704

Øvelse 1142

Bestem foreningsmængden af A og B

a. når $A =]-\infty\,;\,12\,[$ og $B =]\,5\,;\,15\,]$
b. når $A = [\,-8\,;\,14\,[$ og $B = [\,-6\,;\,5\,]$
c. når $A =]-\infty\,;\,5\,]$ og $B =]\,7\,;\,12\,]$
d. når $A =]-\infty\,;\,3\,[$ og $B =]\,3\,;\,\infty[$

Øvelse 1143

Bestem foreningsmængden af A og B

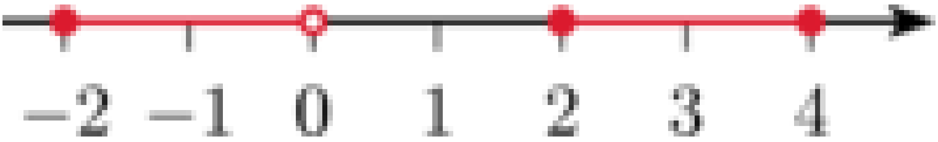
a. når $A = [\,-10\,;\,2\,]$ og $B =]-\infty\,;\,1\,[$
b. når $A =]-5\,;\,5\,[$ og $B =]-1\,;\,\infty\,[$
c. når $A = [\,1-\sqrt{3}\,;\,1+\sqrt{2}\,]$ og $B = [\,\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\,[$

ISBN 9788761685704

Øvelse 1144

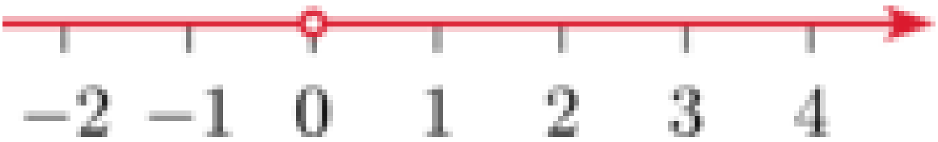
Skriv følgende talmængder som foreningsmængden af to intervaller.

a.



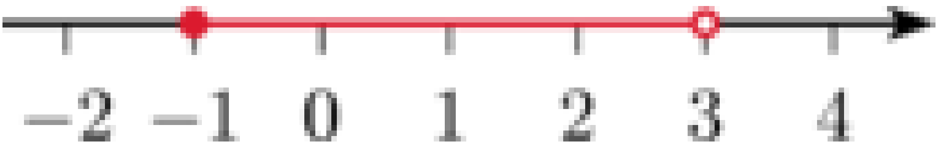
Figur 1147

b.



Figur 1148

c.



Figur 1149

1.2 Regning med tal

At regne med tal kræver at vi har overblik over regnereglerne. Dels skal vi vide, i hvilken rækkefølge regneoperationerne skal udføres, og dels er det vigtigt, at vi har kendskab til de forskellige omskrivningsregler, vi kan anvende, når vi ønsker at reducere matematiske udtryk.

I dette afsnit gennemgår vi de væsentlige regneregler i forbindelse med regning med tal og symboler samt regnereglerne for parenteser, brøker, potenser og rødder.

1.2.1 Regningsarterne

ISBN 9788761685704

De fire grundlæggende regningsarter er

addition	at lægge sammen
subtraktion	at trække fra
multiplikation	at gange
division	at dele

Når vi lægger tal sammen, kalder vi resultatet for *summen*, mens vi kalder resultatet af en subtraktion for *differensen*. De tal, vi lægger sammen eller trækker fra hinanden, omtaler vi som *led*.

Ved multiplikation kalder vi resultatet for *produktet* og tallene for *faktorer*. Hvis vi f.eks. har tallene 6 og 7, er deres sum 13 og deres produkt 42, mens differensen 6 – 7 er –1.

Ved en division kalder vi resultatet for *kvotienten*, og når vi f.eks. dividerer 36 med 12, bliver kvotienten 3.

Herudover kan vi udføre en række andre simple regneoperationer som f.eks. *potensopløftning*

$$4^2 = 4 \cdot 4 = 16 \qquad 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81 \qquad x^3 = x \cdot x \cdot x$$

og *uddragning af rødder*

$$\sqrt{9} = 3 \qquad \sqrt[3]{125} = 5 \qquad \sqrt[4]{16} = 2$$

Når vi har et regneudtryk som f.eks.

$$7^2 - 4 \cdot 3 + \sqrt{64}$$

skal vi *først* udregne potensen og uddrage roden, så vi får

$$49 - 4 \cdot 3 + 8$$

Herefter udregner vi produktet og samler leddene

$$49 - 4 \cdot 3 + 8 = 49 - 12 + 8 = 37 + 8 = 45$$

Den rækkefølge, de forskellige regneoperationer bliver udført i, kalder vi for *regningsarternes hierarki*. Rækkefølgen er

1. Først skal vi udregne parenteser.
2. Derefter skal vi udregne potenser og rødder.
3. Så skal vi gange og dividere. I brøker udregner vi tæller og nævner, før vi udregner selve brøken.
4. Til sidst skal vi lægge sammen og trække fra.

ISBN 9788761685704

Øvelse 1211

Udregn følgende tal

a. $13 + 4 \cdot 5$
b. $12 + 6:3 - 4$
c. $3(8 + 2) - 9$
d. $16 + 4^2 \cdot 3$

Øvelse 1212

Udregn følgende tal

a. $4 + 8 \cdot 5 - 1$
b. $5 \cdot 2 - \frac{12}{4} + \frac{9}{3} - 8$
c. $3(5 + 4) - 4 + 3 \cdot 5 - 4(8 - 5)$
d. $\frac{8 \cdot 6}{2^2} + 3 \cdot 2 \cdot 5 - \frac{24}{12} \cdot 3 - (3 + 3^2)$
e. -7^2
f. $(-7)^2$

1.2.2 Parenteser

Parenteser anvender vi i matematik for at fortælle, hvilke tal (eller bogstaver), der hører sammen, og som vi skal udregne først. Dog anvender vi også parenteser for at undgå sammenstød mellem en regneoperation og et fortegn for et tal, så vi skriver f.eks. $7 \cdot (-3)$.

Hvis vi skal udregne tallet

$$4 \cdot (3 - 5) - \frac{-7}{7 - 4}$$

udregner vi først parentesen og nævneren. Den første parentes giver –2, og for at undgå sammenstød med gangetegnet sætter vi en parentes omkring tallet –2

$$4 \cdot (3 - 5) - \frac{-7}{7 - 4} = 4 \cdot (-2) - \frac{-7}{3} = -8 + \frac{7}{3} = \frac{-24}{3} + \frac{7}{3} = \frac{-17}{3}$$

Også når vi arbejder med regneudtryk, der indeholder ubekendte eller bogstaver, er det nødvendigt både at kunne hæve og sætte parenteser korrekt. Vi skelner mellem *plusparenteser* og *minusparenteser*.

ISBN 9788761685704

En plusparentes er en parentes, hvor der enten står plus umiddelbart foran parentesen, eller en parentes, hvor der ikke står noget tegn foran. Disse plusparenteser kan vi altid bare sætte eller fjerne.

En minusparentes er en parentes, hvor der står et minus umiddelbart foran parentesen, og når vi hæver eller sætter en minusparentes, skal vi skifte fortegn på hvert led i parentesen.

$$2x + (x - 3) = 2x + x - 3 = 3x - 3$$
$$2x - (x - 3) = 2x - x + 3 = x + 3$$

Hvis der står en faktor uden for en parentes, hæver vi parentesen ved at gange tallet ind på hvert led i parentesen.

$$3(x - 4) = 3 \cdot x - 3 \cdot 4 = 3x - 12$$
$$(-3x - 4)8 = (-3x) \cdot 8 + (-4) \cdot 8 = -24x - 32$$
$$-2(5 + 3x) = (-2) \cdot 5 + (-2) \cdot 3x = -10 + (-6x) = -10 - 6x$$

Den sidste regning kan vi også udføre ved først at gange 2 ind og huske at sætte en minusparentes, som vi så hæver.

$$-2(5 + 3x) = -(2 \cdot 5 + 2 \cdot 3x) = -(10 + 6x) = -10 - 6x$$

Når vi skal gange to parenteser sammen, ganger vi hvert led i den ene parentes med hvert led i den anden.

$$\begin{aligned}(2x - 1)(x - 3) &= 2x \cdot x + 2x \cdot (-3) + (-1) \cdot x + (-1) \cdot (-3) \\ &= 2x^2 - 6x - x + 3 \\ &= 2x^2 - 7x + 3\end{aligned}$$

Vi kan også få brug for at skulle sætte en faktor uden for parentes for at få et regneudtryk reduceret.

$$10 - 25x = 5 \cdot 2 - 5 \cdot 5x = 5(2 - 5x)$$
$$6a - 2a^2 = 2a \cdot 3 - 2a \cdot a = 2a(3 - a)$$

Tallet, som vi sætter uden for parentesen er faktor i hvert led, og vi kalder den en *fælles faktor*. Normalt foranstiller vi den fælles faktor som i ovenstående eksempler, men vi kan også efterstille den fælles faktor

$$10 - 25x = (2 - 5x)5$$

Denne operation på et udtryk kalder vi en *faktorisering*.

ISBN 9788761685704

Øvelse 1221

Reducér følgende udtryk

a. $12x - 49x$
b. $3a + 5a$
c. $s + 6s$
d. $y - 0{,}21y$

Øvelse 1222

Reducér

a. $5x + 2(4 - x)$
b. $(4 + 10)x - (x + 2)$
c. $5 - (-a) + 9(a + b)$
d. $4(3 + 2x) - 2(1 + 2x)$
e. $(2 + x)(x + 8)$
f. $6 - (x + 2)(x - 3)$

Øvelse 1223

Sæt en fælles faktor uden for parentes i følgende udtryk

a. $3x + 4xb$
b. $17x + yx$
c. $6a^2 + 9ab$
d. $R_1 \cdot I + R_2 \cdot I$
e. $3x^2 - x$
f. $K + K \cdot r^2$
g. $5(a + b) - 3a(a + b)$
h. $(a - 1)^2 - (a - 1)$

ISBN 9788761685704

Øvelse 1224

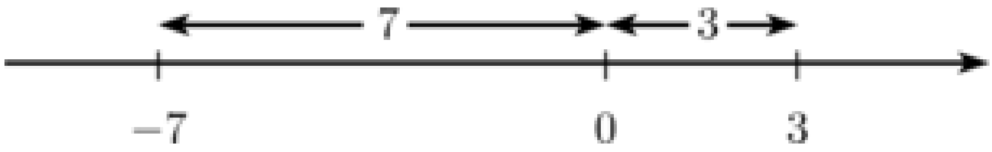
Sæt fælles faktorer uden for parentes i følgende udtryk

a. $3xz - 12xy$
b. $16y + 4xyz$
c. $2pq + p^2 - q^2p$
d. $30xyz - 12xy + 6yz$
e. $4pqr - 2pr + 8q$

1.2.3 Afstand og numerisk værdi

Vi har brug for at kunne angive afstanden mellem to tal på en tallinje, og vi starter med at se på, hvordan vi finder et tals afstand til tallet 0.

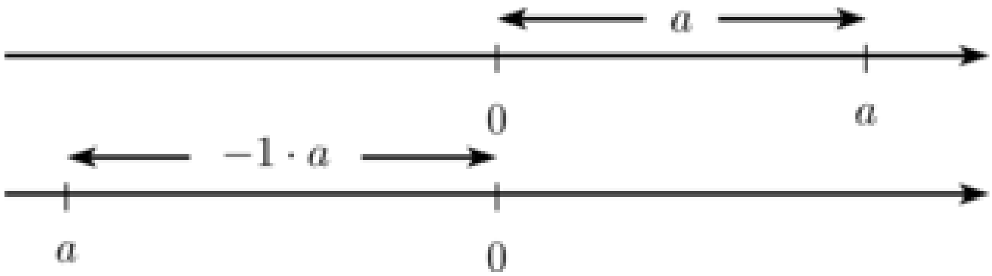
På tallinjen ligger tallet 3 tre enheder fra tallet 0, så afstanden er 3, mens tallet –7 ligger 7 enheder fra tallet 0.



Figur 1231

Eksemplerne illustrerer, at et positivt tal *a* ligger *a* enheder fra 0, mens vi finder afstanden fra et negativt tal til 0 ved at skifte fortegn på tallet. Fortegnsskiftet kan vi opnå ved at gange tallet med –1, så

$$\text{afstanden fra et tal a til } 0 = \begin{cases} a, & \text{hvis } a \geq 0 \\ -1 \cdot a, & \text{hvis } a < 0 \end{cases}$$



Figur 1232
Dette fører til følgende definition.

ISBN 9788761685704

Definition 1231 (Numerisk værdi)

Lad a være et reelt tal. Den numeriske værdi $|a|$ af tallet er defineret ved

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{hvis } a \geq 0 \\ -1 \cdot a, & \text{hvis } a < 0 \end{cases}$$

Vi benytter en *definition* i matematik, når vi skal forklare, hvad vi forstår ved et begreb. En definition er en vedtægt, der beskriver begrebet fuldstændigt, og vi kan ikke bevise en definition.

Den numeriske værdi af et tal er altså tallets afstand til tallet 0, og vi finder den numeriske værdi af et tal ved at fjerne et eventuelt negativt fortegn på tallet. Det gør vi i definitionen ved at gange tallet med −1.

Eksempel 1231

Vi har

$$|-11| = 11\,, \quad |2| = 2\,, \quad |-0{,}459| = 0{,}459 \text{ og } \quad |0| = 0$$

Eksempel 1232

Hvis $|x| = 5$, må tallet x ligge i afstanden 5 fra 0, så $x = 5$ eller $x = -5$.

Eksempel 1233

Hvis $|x-1| = 11$, må $x-1$ ligge i afstanden 11 fra 0.

Altså må $x - 1 = 11$ eller $x - 1 = -11$, og så må $x = 12$ eller $x = -10$.

ISBN 9788761685704

Øvelse 1231

Bestem tallet *a*, når

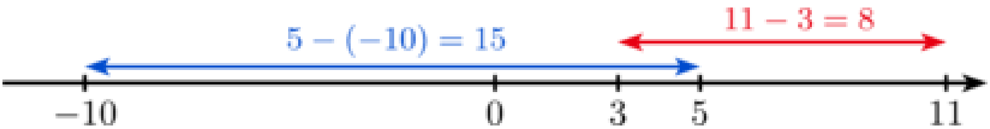
a. $|a| = 3$
b. $|a - 3| = 2$
c. $|a + 4| = 7$

Vi kan også beregne afstanden mellem to tal på tallinjen. Den finder vi ved at trække det mindste tal fra det største, så afstanden mellem 11 og 3 er 8, fordi

$$11 - 3 = 8$$

Afstanden mellem 5 og –10 er 15, fordi

$$5 - (-10) = 15$$



Figur 1233
Kalder vi de to tal *a* og *b*, er

$$\begin{aligned} \text{afstanden mellem } a \text{ og } b &= \text{det største tal} \\ &\quad \text{minus det mindste tal af } a \text{ og } b \qquad (*) \end{aligned}$$

Ifølge Definition 1231 (se side 24) er

$$|a - b| = \begin{cases} a - b, & \text{hvis } a - b \geq 0 \\ -1(a - b), & \text{hvis } a - b < 0 \end{cases}$$

som vi omskriver til

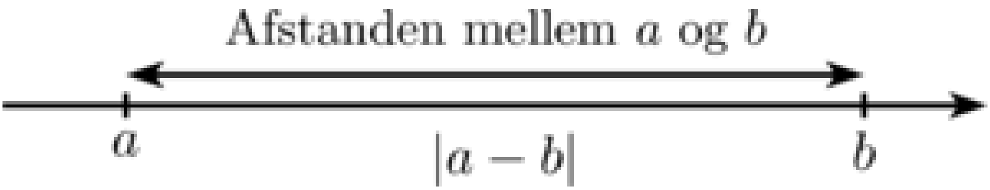
$$|a - b| = \begin{cases} a - b, & \text{hvis } a \geq b \\ b - a, & \text{hvis } a < b \end{cases}$$

Sammenligninger vi dette udtryk for $|a - b|$ med $(*)$, har vi hermed bevist følgende sætning

Sætning 1231 (Afstand mellem to tal)

Lad *a* og *b* være to tal. Så er $|a - b|$ afstanden mellem *a* og *b*.

ISBN 9788761685704



Figur 1234
I matematikken er en *sætning* en sand påstand, som vi kan bevise ud fra nogle forudsætninger.

Eksempel 1234

Afstanden mellem –12 og 29 er

$$|-12-29|=|-41|=41$$

Når

$$|x-12|=3$$

ligger tallet x i afstanden 3 fra 12. Altså er

$$x=15 \qquad \text{eller} \qquad x=9$$

Hvis

$$|x+2|=9$$

ligger tallet x i afstanden 9 fra –2. Altså er

$$x=7 \qquad \text{eller} \qquad x=-11$$

Øvelse 1232

Bestem tallet a, når

a. afstanden fra a til 9,4 er 24,1
b. $|2a-3|=11$
c. $|a+4|<7$

Når vi udfører regninger med numerisk værdi, kan vi få brug for regnereglen

$$|a-b|^2=(a-b)^2 \qquad (1231)$$

At regnereglen gælder, kan vi vise ved at udregne $|a-b|^2$.

ISBN 9788761685704

Hvis $a \geq b$, er (1.1) opfyldt, fordi $|a-b| = a-b$.

Hvis $a < b$, er $a - b < 0$ og $|a-b| = (-1) \cdot (a-b)$, og så er

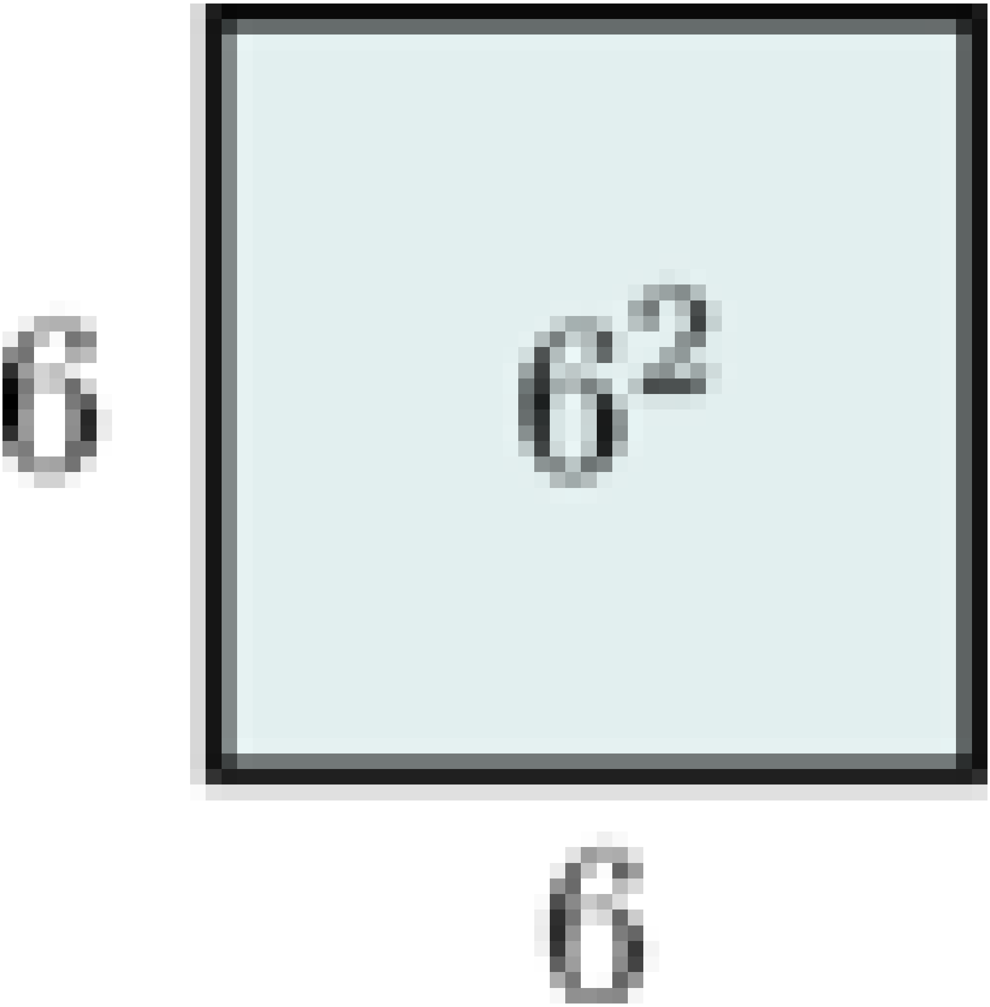
$$\begin{aligned}
|a-b|^2 &= |a-b||a-b| \\
&= (-1) \cdot (a-b) \cdot (-1) \cdot (a-b) \\
&= (-1)(-1)(a-b)(a-b) \\
&= (a-b)(a-b) = (a-b)^2
\end{aligned}$$

Altså er ligning (1231) også opfyldt i dette tilfælde.

1.2.4 Kvadratsætningerne

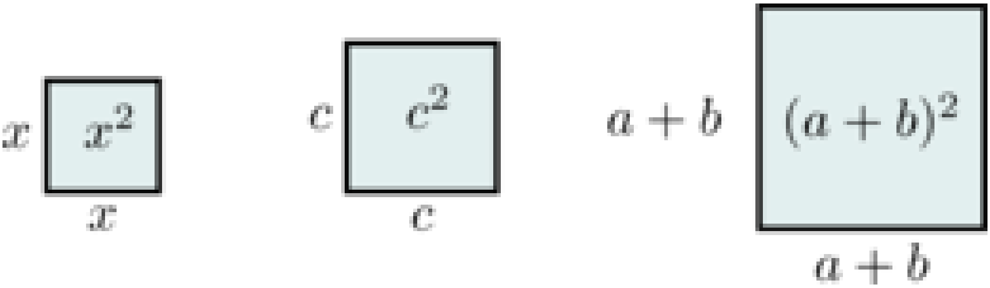
Tallet 6^2 kalder vi også "kvadratet på 6", fordi tallet 6^2 svarer til arealet af et *kvadrat* med sidelængde 6.

ISBN 9788761685704



Figur 1241

Tilsvarende kalder vi x^2 for kvadratet på x, c^2 for kvadratet på c og $(a + b)^2$ for kvadratet på $a + b$.



Figur 1242

Vi vil nu udregne kvadratet på hver af de to toleddede størrelser $a + b$ og $a - b$. Desuden vil vi udregne produktet $(a + b)(a - b)$. De tre udregninger kalder vi kvadratsætningerne.

Sætning 1241 (Kvadratsætningerne)

For alle tal a og b gælder

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \\ (a-b)^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Bevis for kvadratsætningerne

Vi får

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\ &= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2ab\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b) \\ &= a \cdot a + a \cdot (-b) + (-b) \cdot a + (-b) \cdot (-b) \\ &= a^2 - 2ab + b^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a \cdot a + a \cdot (-b) + b \cdot a + b \cdot (-b) \\ &= a^2 - ab + ba - b^2 \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Vi husker kvadratsætningerne som

ISBN 9788761685704

Kvadratet på en toleddet størrelse er lig med kvadratet på første led plus kvadratet på andet led plus eller minus det dobbelte produkt.

To tals sum gange de samme to tals differens er kvadratet på første led minus kvadratet på andet led.

Eksempel 1241

Ved brug af kvadratsætningerne får vi

$$(1+x)^2 = 1^2 + x^2 + 2\cdot 1\cdot x = 1 + x^2 + 2x$$

$$(3+4c)^2 = 3^2 + (4c)^2 + 2\cdot 3\cdot 4c = 9 + 16c^2 + 24c$$

$$(2y-3x)^2 = (2y)^2 + (3x)^2 - 2\cdot 2y\cdot 3x = 4y^2 + 9x^2 - 12xy$$

$$(5+2t)(5-2t) = 5^2 - (2t)^2 = 25 - 4t^2$$

Øvelse 1241

Udregn følgende udtryk ved hjælp af kvadratsætningerne

a. $(x+8)^2$
b. $(5a+1)^2$
c. $(3y-4)^2$
d. $(3x-4)(3x+4)$
e. $(7s-t)^2$
f. $(x-\frac{1}{x})^2$

ISBN 9788761685704

Øvelse 1242

Udregn følgende udtryk ved hjælp af kvadratsætningerne

a. $(3x+y)^2$
b. $(3x-2y)^2$
c. $(7a+12)^2$
d. $(5a+3b)(5a-3b)$
e. $(2x-8y)(2x+8y)$
f. $(6s-9t)^2$

Øvelse 1243

Omskriv følgende udtryk til kvadratet på en toleddet størrelse eller to tals sum gange de samme to tals differens ved brug af kvadratsætningerne.

a. $4x^2+4y^2+8xy$
b. $9x^2+y^2-6xy$
c. $16a^2-9b^2$
d. $64s^2+9t^2+48st$
e. a^2+4b^2-4ab
f. $36x^2-4y^2$

1.2.5 Potenser og potensregneregler

Det er velkendt, at $3^2 = 3\cdot 3$, og $4^3 = 4\cdot 4\cdot 4$. Tallene 3^2 og 4^3 er eksempler på *potenser*.

Definition 1251 (Naturlige potenser)

For et tal a og et naturligt tal n definerer vi

$$a^n = \overbrace{a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}^{n\ \text{faktorer}}$$

Tallet a kalder vi for *grundtallet* og n for *eksponenten*.

Indholdet i definitionen er, at a^n er a ganget med sig selv n gange.

ISBN 9788761685704

Definition 1252 (n'te rod)

Lad a være et ikke-negativt tal, og lad n være et naturligt tal. Ved $\sqrt[n]{a}$ forstår vi det *ikke-negative* tal, der ganget med sig selv n gange giver a, dvs.

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

Eksempel 1251

$$\sqrt[3]{125} = 5 \qquad \text{fordi} \qquad 5^3 = 125$$

$$\sqrt[6]{64} = 2 \qquad \text{fordi} \qquad 2^6 = 64$$

$$\sqrt[n]{0} = 0 \qquad \text{fordi} \qquad 0^n = 0$$

Vi kalder $\sqrt[2]{\ }$ for kvadratroden og skriver denne $\sqrt{\ }$. Tredjeroden $\sqrt[3]{\ }$ kalder vi kubikroden.

Vi skal nu se på nogle regler for regning med potenser. Først ser vi på nogle eksempler.

Eksempel 1252

$$3^2 \cdot 3^4 = \underbrace{(3 \cdot 3)}_{\text{2 faktorer}} \cdot \underbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)}_{\text{4 faktorer}} = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{\text{ialt 2+4 faktorer}} = 3^6$$

Udregningen viser, at hvis vi ganger to potenser med samme grundtal, kan vi lægge eksponenterne sammen, altså

$$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$$

ISBN 9788761685704

Eksempel 1253

Dividerer vi to potenser med samme grundtal, kan vi forkorte

$$\frac{4^5}{4^3} = \frac{\overbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}^{5 \text{ faktorer}}}{\underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}_{3 \text{ faktorer}}} = \overbrace{4 \cdot 4}^{5-3 \text{ faktorer}} = 4^2$$

Her ser vi, at vi kan dividere to potenser med samme grundtal ved at trække eksponenterne fra hinanden

$$\frac{4^5}{4^3} = 4^{5-3} = 4^2$$

Eksempel 1254

$$(5^2)^3 = \overbrace{\underbrace{(5 \cdot 5)}_{2 \text{ faktorer}} \cdot \underbrace{(5 \cdot 5)}_{2 \text{ faktorer}} \cdot \underbrace{(5 \cdot 5)}_{2 \text{ faktorer}}}^{3 \text{ parenteser}} = \overbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}^{2 \cdot 3 \text{ faktorer}} = 5^6$$

Vi kan opløfte en potens i en ny eksponent ved at gange de to eksponenter sammen

$$(5^2)^3 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6$$

Eksempel 1255

$$2^3 \cdot 5^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = (2 \cdot 5)^3 = 10^3$$

Vi kan gange to potenser med samme eksponent ved at gange grundtallene sammen og opløfte produktet i den fælles eksponent.

Altså

$$2^3 \cdot 5^3 = 10^3$$

ISBN 9788761685704

Eksempel 1256

$$\frac{5^3}{4^3} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} = \left(\frac{5}{4}\right)^3$$

Vi kan dividere to potenser med samme eksponent ved at dividere grundtallene med hinanden og opløfte kvotienten i den fælles eksponent.

Altså

$$\frac{5^3}{4^3} = \left(\frac{5}{4}\right)^3$$

Eksemplerne illustrerer de regneregler, vi kalder *potensregnereglerne*. Reglerne er samlet i følgende sætning, som vi ikke beviser.

Sætning 1251 (Potensregnereglerne)

For vilkårlige tal a og b og naturlige tal n og m gælder

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, når $a \neq 0$
3. $(a^n)^m = a^{nm}$
4. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
5. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, når $b \neq 0$

De eksponenter, vi har brugt indtil videre, har kun været positive hele tal. Vi ønsker nu at udvide potensbegrebet, således at eksponenten også kan være 0, et negativt helt tal eller en brøk. Vi vil således definere

$$a^0, \; a^{-n}, \; a^{\frac{1}{n}} \quad \text{og} \quad a^{\frac{p}{q}}$$

på en måde, som samtidig sikrer os, at potensregnereglerne gælder.

Lad os tage et tal a, som ikke er nul. Så er a^n heller ikke nul og

$$\frac{a^n}{a^n} = 1$$

Hvis vi nu benytter regel ii) fra Sætning 1251 (se side 34), bliver

ISBN 9788761685704

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$$

Altså gælder potensregnereglerne kun, hvis vi sætter $a^0 = 1$.

Definition 1253 (Eksponenten 0)

For et vilkårligt tal a forskelligt fra nul sætter vi

$$a^0 = 1$$

Vi vil nu finde ud af, hvad vi skal sætte a^{-n} til, for at potensregnereglerne også gælder for disse tal.

Når regel i) fra Sætning 1251 (se side 34) skal gælde, finder vi, at

$$a^n \cdot a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^{n-n} = a^0 = 1$$

Altså skal $a^n \cdot a^{-n} = 1$. Division med a^n i dette udtryk giver nu

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Definition 1254 (Negativ hel eksponent)

For et vilkårligt tal a, $a \neq 0$, og et naturligt tal n sætter vi

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Eksempel 1257

Af definitionerne får vi, at

$$3^0 = 1 \qquad (-2)^0 = 1 \qquad 0{,}7842^0 = 1$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} \qquad 7^{-3} = \frac{1}{7^3} = \frac{1}{343} \qquad 5^{-1} = \frac{1}{5}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

ISBN 9788761685704

Vi ser nu på eksponenter, som er stambrøker. En stambrøk er en brøk, hvor tælleren er 1 og nævneren et naturligt tal, dvs. et tal på formen $\frac{1}{n}$, hvor $n \in \mathbb{N}$.

Ifølge regel iii. i Sætning 1251 (se side 34) finder vi, at

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$$

Men samtidig ved vi, at

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

når *a* er positiv, og derfor må vi lave følgende definition.

Definition 1255 (Stambrøkseksponent)

For et vilkårligt positivt tal *a* og et naturligt tal *n* sætter vi

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Eksempel 1258

Af ovenstående definition fremkommer følgende

$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2 \qquad 5^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{5} \qquad 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$$

Hvis endelig *a* er et positivt tal, og $\frac{p}{q}$ er en brøk, hvor *p* er et helt tal, og *q* er et naturligt tal, finder vi ved brug af regel iii) fra Sætning 1251 (se side 34) og Definition 1255 (se side 36), at

$$a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{1}{q} \cdot p} = (a^{\frac{1}{q}})^p = (\sqrt[q]{a})^p$$

Den sidste definition skal derfor være

Definition 1256 (Rational eksponent)

For et vilkårligt positivt tal *a* og en brøk på formen $\frac{p}{q}$, hvor *p* er et helt tal, og *q* er et naturligt tal, sætter vi

$$a^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{a})^p$$

ISBN 9788761685704

Eksempel 1259

Af ovenstående definition følger, at

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{4}\right)^3 = 2^3 = 8 \qquad 4^{\frac{5}{3}} = \left(\sqrt[3]{4}\right)^5 \qquad 9^{\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{9}\ ^4$$

Det er også muligt at udvide potensbegrebet til vilkårlige eksponenter som f.eks. π og $\sqrt{11}$, således at potensregnereglerne stadig gælder, men det fører for vidt at gøre det her.

Øvelse 1251

Vis, at

$$\sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$$

Øvelse 1252

Omform følgende udtryk til potenser med grundtal x

a. $x\sqrt{x}$

b. $\frac{1}{x^2}$

c. $x^2\sqrt{x}$

d. $\frac{1}{\sqrt{x}}$

e. $\frac{1}{(x^2\sqrt{x})^4}$

Øvelse 1253

Reducér følgende udtryk uden brug af lommeregner

a. $3^2 \cdot 3^{-5} \cdot \frac{3^4}{3^7}$

b. $2^3 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{2}$

c. $8^{\frac{2}{3}} + 16^{\frac{1}{2}} + 27^{\frac{2}{3}} + 36^{\frac{3}{2}}$

d. $\sqrt[12]{a^3 \cdot b^4} \cdot \sqrt[4]{a^5 \cdot b^2}$

ISBN 9788761685704

Øvelse 1254

Reducér følgende udtryk uden brug af lommeregner

a. $\frac{2^{-3} \cdot (\frac{1}{2})^3 \cdot 8^2}{2^5 \cdot 4^7}$

b. $\frac{a^3 \cdot a^{-2} \cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^2}$

c. $\frac{(a^2)^3 \cdot (a^{-3})^2}{(a^{-2})^{-4} - a^3 \cdot a^{-1}}$

1.2.6 Eksponentiel notation

Vi udregner nogle potenser af 10 med positive hele eksponenter

$$10^6 = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{6 \text{ faktorer}} = 1\,000\,000$$
$$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$$
$$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$$

Udregningerne illustrerer, at eksponenten angiver antallet af nuller i tallet.

Hvis vi tilsvarende ser på potenser af 10 med negative hele eksponenter som f.eks.

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$$
$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1\,000} = 0{,}001$$
$$10^{-6} = \frac{1}{10^6} = \frac{1}{1\,000\,000} = 0{,}000\,001$$

kan vi se, at disse svarer til decimaltal, og at eksponenten angiver 1-tallets placering efter kommaet.

Når vi arbejder med store tal eller tal tæt på nul, benytter vi ofte eksponentiel notation.

Med *eksponentiel notation* skriver vi et tal på formen $b \cdot 10^a$, hvor tallet b er et decimaltal med netop et ciffer foran kommaet, og dette ciffer skal være et af tallene fra 1 til 9.

Hvis vi f.eks. vil skrive 93 500 og $0{,}002\,67$ med eksponentiel notation, bliver det til

$$93\,500 = 9{,}35 \cdot 10\,000 = 9{,}35 \cdot 10^4 \quad 0{,}002\,67 = 2{,}67 \cdot 0{,}001 = 2{,}67 \cdot 10^{-3}$$

Fordelen ved den eksponentielle notation er, at vi slipper for at skrive en masse nuller og dermed lettere får en fornemmelse af, hvor stort eller småt tallet er.

ISBN 9788761685704

Øvelse 1261

Jordens befolkning antages i dag at være på ca. $7\,500\,000\,000$ mennesker.

Angiv Jordens befolkning med eksponentiel notation.

Øvelse 1262

En enkelt e-mail udgør

$$0{,}000\,000\,000\,000\,058\ \%$$

af det samlede antal af daglige e-mails på verdensplan.

Skriv denne procent med eksponentiel notation.

Øvelse 1263

Skriv følgende tal med eksponentiel notation

a. 163 742 004
b. 450 000
c. 0,000 0036
d. 6 754 000 000 000
e. 0,004 56
f. 0,000 001 29

Skal vi lægge to tal sammen eller trække to tal fra hinanden, som er skrevet med eksponentiel notation, og vælger vi at gøre det uden brug af lommeregner, bliver vi nødt til først at omskrive tallene, så de begge indeholder den samme potens af 10.

ISBN 9788761685704

Eksempel 1261

$$\begin{aligned} 2{,}3 \cdot 10^2 + 5{,}9 \cdot 10^3 &= 2{,}3 \cdot 10^2 + 5{,}9 \cdot 10 \cdot 10^2 \\ &= 2{,}3 \cdot 10^2 + 59 \cdot 10^2 \\ &= 61{,}3 \cdot 10^2 \\ &= 6{,}13 \cdot 10^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2{,}1 \cdot 10^7 - 6{,}3 \cdot 10^5 &= 2{,}1 \cdot 10^2 \cdot 10^5 - 6{,}3 \cdot 10^5 \\ &= 210 \cdot 10^5 - 6{,}3 \cdot 10^5 \\ &= 203{,}7 \cdot 10^5 \\ &= 2{,}037 \cdot 10^7 \end{aligned}$$

Skal vi i stedet gange de to tal sammen eller dividere de to tal med hinanden, behøver vi ikke først at omforme tallene.

Eksempel 1262

$$\begin{aligned} 2{,}5 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^{-2} &= 2{,}5 \cdot 8 \cdot 10^5 \cdot 10^{-2} \\ &= 20 \cdot 10^{5+(-2)} \\ &= 20 \cdot 10^3 \\ &= 2{,}0 \cdot 10^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{4{,}2 \cdot 10^5}{7{,}0 \cdot 10^8} &= \frac{4{,}2}{7{,}0} \cdot \frac{10^5}{10^8} \\ &= 0{,}6 \cdot 10^{5-8} \\ &= 0{,}6 \cdot 10^{-3} \\ &= 6{,}0 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-3} \\ &= 6{,}0 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

ISBN 9788761685704

Øvelse 1264

Beregn

a. $3{,}1 \cdot 10^5 + 4{,}8 \cdot 10^4$
b. $6{,}2 \cdot 10^{-8} + 5{,}8 \cdot 10^{-9}$
c. $2{,}9 \cdot 10^3 - 1{,}7 \cdot 10^2$
d. $8{,}6 \cdot 10^{-7} - 4{,}1 \cdot 10^{-6}$

Øvelse 1265

Beregn

a. $(3{,}45 \cdot 10^{16}) \cdot (5{,}78 \cdot 10^{11})$
b. $(2{,}7 \cdot 10^{14}) \cdot (8{,}3 \cdot 10^{-15})$
c. $(5{,}17 \cdot 10^{23}):(4{,}36 \cdot 10^{22})$
d. $\frac{2{,}43 \cdot 10^2}{5{,}11 \cdot 10^{-3}}$

1.2.7 Regning med brøker

En brøk består af en tæller øverst og en nævner nederst

$$\frac{a}{b}$$

Brøkstregen har samme betydning som et divisionstegn, og brøken $\frac{8}{4}$ betyder 8 divideret med 4, og er her det samme som 2.

Hvis en brøk indeholder et helt tal både i tæller og nævner, og tælleren er større end nævneren, kan vi omskrive brøken til et heltal plus en brøk – det, vi kalder et blandet tal. Men blandede tal er *ikke* velegnede til at regne med, og ved regninger omskriver vi derfor blandede tal til ægte brøker.

For at omskrive et blandet tal til en brøk, ganger vi heltallet med brøkens nævner og lægger brøkens tæller til. Dette giver os den nye tæller, mens vi bevarer nævneren.

$$4\frac{2}{3} = 4 + \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{14}{3} \qquad -5\frac{4}{7} = -\frac{5 \cdot 7 + 4}{7} = -\frac{39}{7}$$

Vi kan også angive en brøk som decimalbrøk, dvs. som kommatal.

Et rationalt tal giver enten en endelig decimalbrøk

ISBN 9788761685704

$$\frac{1}{4} = 0{,}25 \qquad -\frac{32}{25} = -1{,}28$$

eller en uendelig, men periodisk decimalbrøk

$$\frac{5}{3} = 1{,}666... = 1{,}\overline{6} \qquad -\frac{35}{11} = -3{,}181818... = -3{,}\overline{18} \qquad \frac{22}{7} = 3{,}\overline{142857}$$

Vi må *forlænge* en brøk og *forkorte* en brøk, dvs. vi må gange og dividere med samme tal forskelligt fra nul både i tæller og nævner. Herved ændrer vi ikke brøkens værdi. Vi skal *altid forkorte* brøker så meget som muligt.

Øvelse 1271

Forkort følgende brøker mest muligt

a. $\frac{14}{32}$
b. $\frac{45}{81}$
c. $\frac{24}{56}$
d. $\frac{112}{200}$
e. $\frac{34}{238}$
f. $\frac{15}{35}$

Øvelse 1272

Forlæng følgende brøker, så de får nævner 24

a. $\frac{7}{4}$
b. $\frac{7}{3}$
c. $\frac{5}{12}$
d. $\frac{9}{2}$
e. $-\frac{1}{6}$
f. $\frac{15}{18}$

Vi gennemgår nu de grundlæggende brøkregneregler.

ISBN 9788761685704

Regel I (Sum af brøker)

Vi lægger to brøker sammen ved at gøre dem ensbenævnte (forlænge til samme nævner) og lægge tællerne sammen

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{d \cdot a}{d \cdot b} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Eksempel 1271

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{7} = \frac{7 \cdot 3}{7 \cdot 5} + \frac{5 \cdot 4}{5 \cdot 7} = \frac{7 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{35} = \frac{21 + 20}{35} = \frac{41}{35}$$

Regel II (Differens af brøker)

Vi trækker to brøker fra hinanden ved at gøre dem ensbenævnte (forlænge til samme nævner) og trække tællerne fra hinanden

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{d \cdot a}{d \cdot b} - \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

Eksempel 1272

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{7} = \frac{7 \cdot 2}{7 \cdot 3} - \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 7 - 3 \cdot 4}{21} = \frac{14 - 12}{21} = \frac{2}{21}$$

I Regel I og Regel II siger vi, at vi *sætter på fælles brøkstreg*.

ISBN 9788761685704

Regel III (Gange brøk med tal)

Vi ganger en brøk med et tal ved at gange tæller med tallet

$$c \cdot \frac{a}{b} = \frac{c \cdot a}{b} = \frac{ca}{b}$$

Eksempel 1273

$$5 \cdot \frac{7}{24} = \frac{5 \cdot 7}{24} = \frac{35}{24}$$

$$\frac{11}{13} \cdot 3 = \frac{11 \cdot 3}{13} = \frac{33}{13}$$

Regel IV (Dividere brøk med tal)

Vi dividerer en brøk med et tal ved at gange nævner med tallet

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c} = \frac{a}{bc}$$

Eksempel 1274

$$\frac{97}{13} : 4 = \frac{97}{13 \cdot 4} = \frac{97}{52}$$

Regel V (Gange brøk med brøk)

Vi ganger to brøker med hinanden ved at gange tæller med tæller og nævner med nævner

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$$

ISBN 9788761685704

Eksempel 1275

$$\frac{5}{12} \cdot \frac{7}{4} = \frac{5 \cdot 7}{12 \cdot 4} = \frac{35}{48}$$

Regel VI (Dividere brøk med brøk)

Vi dividerer med en brøk ved at gange med den omvendte

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{ad}{bc}$$

$$a : \frac{c}{d} = a \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{c}$$

Eksempel 1276

$$\frac{2}{9} : \frac{5}{11} = \frac{2}{9} \cdot \frac{11}{5} = \frac{2 \cdot 11}{9 \cdot 5} = \frac{22}{45}$$

$$2 : \frac{5}{11} = 2 \cdot \frac{11}{5} = \frac{2 \cdot 11}{5} = \frac{22}{5}$$

Øvelse 1273

Udregn følgende brøker uden lommeregner

a. $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$
b. $\frac{7}{3} + \frac{7}{9}$
c. $\frac{5}{4} + \frac{1}{9}$
d. $\frac{5}{6} - \frac{11}{3}$
e. $\frac{2}{9} + \frac{5}{6}$
f. $\frac{15}{4} - \frac{1}{6}$

Øvelse 1274

Omskriv hvert af følgende udtryk til en brøk

a. $7 \cdot \frac{4}{9}$
b. $6 \cdot \frac{10}{3}$
c. $\frac{25}{9} \cdot 5$
d. $3 \cdot \frac{14}{5}$
e. $4 \cdot \frac{14}{6}$
f. $-3 \cdot \frac{-1}{2}$
g. $9 \cdot \frac{8}{5}$
h. $0 \cdot \frac{126}{5}$
i. $8 \cdot 2\frac{1}{3}$
j. $\frac{24}{9} : 5$
k. $\frac{1}{2} : 4$
l. $\frac{3}{8} : 3$

Øvelse 1275

Udregn følgende tal uden brug af lommeregner

a. $\frac{11}{2} \cdot \frac{2}{5}$
b. $\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{4}$
c. $\frac{3}{7} \cdot \frac{14}{9}$
d. $\frac{1}{2} : \frac{2}{5}$
e. $\frac{2}{3} : \frac{4}{9}$
f. $\frac{5}{9} : \frac{1}{3}$
g. $8 : \frac{2}{5}$
h. $\frac{17}{4} : \frac{17}{4}$
i. $\frac{1}{2} : \frac{16}{32}$

ISBN 9788761685704

Øvelse 1276

Sæt på fælles brøkstreg

a. $\frac{a}{2} + \frac{b}{6}$
b. $\frac{1}{2a} + \frac{2}{3a}$
c. $\frac{a}{b} - \frac{3c}{a}$
d. $\frac{2x}{ab} - \frac{2y}{bc}$
e. $\frac{b}{a} - \frac{1}{4a}$
f. $\frac{a}{2bc^2} - \frac{b}{3ab^2c}$

Brøkreglerne sammen med de øvrige regler, vi har set på, danner grundlaget for bl.a. løsning af ligninger og reduktioner. De omformninger vi laver, kalder vi *algebraiske omformninger*.

Vi vil se på nogle reduktioner, dvs. omformninger, som gør et udtryk så simpelt som muligt uden at ændre dets værdi.

Når udtrykket er en brøk, vil reduktioner tit involvere en forkortning. Vi kan kun forkorte en brøk med en størrelse, der indgår som en faktor både i tæller og nævner. Så for at kunne forkorte skal vi sætte faktorer uden for parentes både i tæller og nævner, hvorefter vi kan forkorte fælles faktorer.

Eksempel 1277

Vi har, at

$$\frac{ax + 3x}{4x} = \frac{(a+3)x}{4x} = \frac{a+3}{4}$$

og

$$\frac{10ab}{5abc + 5abd} = \frac{10ab}{5ab(c+d)} = \frac{2}{c+d}$$

Eksempel 1278

Lad os nu se på brøken

$$\frac{s^2+st}{s^3-st^2}$$

som vi vil forkorte i flere trin.

Da *alle* led indeholder et s, kan vi forkorte med s, og når vi dividerer med s, skal vi dividere alle led i tæller og nævner med s.

Vi får så brøken

$$\frac{s+t}{s^2-t^2}$$

Hvis vi skal kunne forkorte videre, skal vi kunne faktorisere nævneren. Det gør vi ved hjælp af en kvadratsætning

$$\frac{s+t}{s^2-t^2}=\frac{s+t}{(s+t)(s-t)}$$

og da både tæller og nævner nu indeholder faktoren $s+t$, kan vi forkorte brøken til

$$\frac{1}{s-t}$$

Alt i alt har vi fundet, at

$$\frac{s^2+st}{s^3-st^2}=\frac{1}{s-t}$$

Øvelse 1277

Forkort brøkerne

a. $\frac{3x+6}{6}$
b. $\frac{8x^2+2x}{2x}$
c. $\frac{4ab-2b}{2ab}$
d. $\frac{8x}{4x+4y}$
e. $\frac{5ab-5b}{10b-15}$

Øvelse 1278

Forkort brøkerne

a. $\frac{3a^3b^3}{9a^2b}$
b. $\frac{4x+4y}{7x+7y}$
c. $\frac{6ax^2-6bx^2}{3x}$
d. $\frac{49x^2b+14x}{7x}$
e. $\frac{2x^2+18+12x}{x^2+3x}$

1.2.8 Overslagsregning

Det er altid godt at have en god fornemmelse for, hvilken omtrentlig størrelse en given beregning vil give. Dette kræver, at vi kan udføre lidt simpel hovedregning uden brug af elektroniske hjælpemidler. Det er ofte også en god idé at foretage disse beregninger i hovedet, før vi regner det præcise resultat ud på lommeregneren eller i vores CAS-værktøj, da det er med til at give os en fornemmelse af, om vi eventuelt laver en tastefejl i beregningen.

Når vi foretager denne type hovedregning, benytter vi os ofte af *overslagsregning*. Her afrunder vi talstørrelserne til nogle tal, det er muligt for os at regne med i hovedet. Det facit, vi får, er derfor kun tæt på det rigtige resultat, og vi siger, at vi får et *overslag* på resultatet.

Eksempel 1281

Hvis vi sælger 38 rugbrød til 21,50 kr. stykket og ønsker at beregne vores præcise indtægt, kan dette godt være svært at gøre uden brug af lommeregner.

En afrunding kunne være at vi i stedet siger, at vi har solgt 40 rugbrød til 20 kr. stykket.

Et overslag på indtægten vil derfor være

$$40 \cdot 20 \text{ kr.} = 800 \text{ kr.}$$

som vi kan udregne i hovedet.

Det nøjagtige resultat bliver $38 \cdot 21{,}50 \text{ kr.} = 817 \text{ kr.}$

ISBN 9788761685704

Eksempel 1282

En klasse har indsamlet 8863 kr. til en studietur, som skal deles ligeligt mellem klassens 24 elever.

Vi ønsker at beregne, hvor meget der bliver til dem hver.

Hvis vi i stedet siger, at de har indsamlet 9000 kr., og at de er 25 elever i klassen, vil et overslag på facit blive

$$\frac{9000 \text{ kr.}}{25} = 360 \text{ kr.}$$

Det nøjagtige resultat bliver

$$\frac{8863 \text{ kr.}}{24} = 369{,}29 \text{ kr.}$$

Eksempel 1283

Vi ønsker at udregne 4,75 % af 2537 kr.

Et overslag kunne være, at vi i stedet finder 5 % af 2500 kr., som vi kan udregne til

$$\frac{2500 \text{ kr.}}{100} \cdot 5 = 125 \text{ kr.}$$

Det nøjagtige resultat er

$$\frac{2537 \text{ kr.}}{100} \cdot 4{,}75 = 120{,}51 \text{ kr.}$$

ISBN 9788761685704

Eksempel 1284

Til en picnic skal vi have indkøbt 48 sandwich til 31,50 kr. pr. stk., 18 liter danskvand til 5,75 kr. pr. liter og 26 kager til 9,75 kr. pr. stk.

Vi vil gerne i hovedet udregne, hvad det ca. kommer til at koste i alt og laver følgende overslag

$$\begin{array}{ll} \text{Sandwich: 50 stk. til 30 kr. pr. stk.} & 50 \cdot 30 \text{ kr.} = 1500 \text{ kr.} \\ \text{Danskvand: 20 liter til 5 kr. pr. liter} & 20 \cdot 5 \text{ kr.} = 100 \text{ kr.} \\ \text{Kager: 25 stk. til 10 kr. pr. stk.} & 25 \cdot 10 \text{ kr.} = 250 \text{ kr.} \end{array}$$

Vores samlede overslag bliver derfor

$$1500 \text{ kr.} + 100 \text{ kr.} + 250 \text{ kr.} = 1850 \text{ kr.}$$

Det nøjagtige resultat er

$$48 \cdot 31{,}50 \text{ kr.} + 18 \cdot 5{,}75 \text{ kr.} + 26 \cdot 9{,}75 \text{ kr.} = 1869 \text{ kr.}$$

Øvelse 1281

Foretag først et overslag ved hovedregning over nedenstående regnestykker, og sammenlign efterfølgende med det eksakte resultat.

a. $82{,}50 \cdot 9{,}60$
b. $152 \cdot 19{,}50$
c. $2{,}14\,\%$ af 782
d. $\frac{1642}{39}$
e. $1432 + 789 - 314 + 62 \cdot 19$
f. $29\,\%$ af 5115
g. $\frac{1182}{29} + 34$
h. $684 + \frac{1808}{17{,}15}$
i. $74{,}6 \cdot 12{,}2$
j. $16\,\%$ af 9300

1.3 Ligninger og uligheder

Ofte får vi brug for for at sammenstille to udtryk. Hvis de to udtryk er lige store opstiller vi en ligning, mens vi opstiller en ulighed, når det ene udtryk skal være større end det andet.

ISBN 9788761685704

Hvis vi eksempelvis ønsker at afgøre, hvornår en voksende befolkningsgruppe når en bestemt størrelse kan vi opstille en ligning, og løsningen til denne vil give os svaret. Ligeledes kan vi opstille og løse en ulighed for at afgøre, ved hvilken afsætningsmængde af en vare omsætningen er større end omkostningerne.

Nogle gange indeholder vore udtryk flere variable udtrykt i flere ligninger. Vi får i disse tilfælde brug for at kunne opstille og løse ligningssystemer.

I dette afsnit gennemgår vi regler og metoder til løsning af ligninger, uligheder og ligningssystemer.

1.3.1 Simple ligninger

Løsning af simple ligninger ved håndkraft

En almindelig ligning er et taludtryk, der enten er sandt eller falsk.

Det skal altså være muligt at fælde dom over en ligning, dvs. afgøre om den er sand eller falsk.

Lad os se på udtrykkene

$$2 = 2 \quad (S) \qquad\qquad 2 = 3 \quad (F) \qquad\qquad (*)$$

Her er dommene klare. Det første udtryk er sandt (*S*), og det andet er falsk (*F*).

Vi kan også fælde dom over de handlinger, som vi udfører på et taludtryk. Ser vi igen på taludtrykkene i $(*)$, og lægger vi 2 til på begge sider af lighedstegnet, så får vi

$$\begin{array}{cc} 2 = 2 \quad (S) & 2 = 3 \quad (F) \\ 2+2 = 2+2 \quad (S) & 2+2 = 3+2 \quad (F) \end{array}$$

Denne handling har ikke ændret på sandhedsværdierne af de to taludtryk.

Altså opfatter vi handlingen som en lovlig handling – også selvom vi regner på noget, der er forkert.

I almindelighed er det en lovlig handling at lægge tal til på begge sider af et lighedstegn i et taludtryk.

Trækker vi 2 fra i taludtrykkene i $(*)$, får vi

$$\begin{array}{cc} 2 = 2 \quad (S) & 2 = 3 \quad (F) \\ 2-2 = 2-2 \quad (S) & 2-2 = 3-2 \quad (F) \end{array}$$

Denne handling ændrer heller ikke på sandhedsværdierne i de to udtryk.

ISBN 9788761685704

Det er derfor også en lovlig handling at trække samme tal fra på begge sider af lighedstegnet i et taludtryk.

Multiplicerer vi med tallet 2 på begge sider af lighedstegnet i $(*)$, får vi

$$\begin{array}{rlrl} 2 = 2 & (S) & 2 = 3 & (F) \\ 2 \cdot 2 = 2 \cdot 2 & (S) & 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2 & (F) \end{array}$$

Denne handling ser også ud til at være lovlig i dette tilfælde, men der er en vigtig undtagelse. Ganger vi med tallet 0 i $(*)$, får vi

$$\begin{array}{rlrl} 2 = 2 & (S) & 2 = 3 & (F) \\ 2 \cdot 0 = 2 \cdot 0 & (S) & 2 \cdot 0 = 3 \cdot 0 & (S) \end{array}$$

Vi kan altså få noget falsk til at blive sandt ved denne handling, og det er ikke lovligt. Vi må ikke gange med tallet 0 på begge sider af lighedstegnet i et taludtryk. Handlingen er dog lovlig for alle andre tal.

Division med tallet 0 er ikke defineret, men division med det samme tal på begge sider af lighedstegnet i et taludtryk er en lovlig handling for alle andre tal.

Den type af ligninger, vi beskæftiger os mest med, er *åbne udsagn* eller åbne taludtryk. Heri indgår et (eller flere) ukendte tal, som vi skal bestemme.

Lad os se på det åbne taludtryk

$$2 \cdot \boxed{} + 3 = 9 \qquad (*)$$

Indsætter vi heri tallet 1, får vi

$$2 \cdot \boxed{1} + 3 = 9$$

eller

$$5 = 9 \qquad (F)$$

Da tallet 1 gør ligningen falsk (*F*), siger vi, at tallet 1 ikke er en løsning til ligningen $(*)$.

Indsætter vi tallet 3 i $(*)$, får vi

$$2 \cdot \boxed{3} + 3 = 9$$

eller

$$9 = 9 \qquad (S)$$

Da tallet 3 gør ligningen sand (*S*), siger vi, at tallet 3 er en løsning til $(*)$.

Normalt erstatter vi den åbne kasse $\boxed{}$ med bogstavet *x*, så ligningen $(*)$ kommer til at se således ud

$$2x + 3 = 9 \qquad (**)$$

ISBN 9788761685704

Tallet x betegner i denne ligning *den ubekendte*, og når vi skal løse en ligning, skal vi finde *alle* de værdier af den ubekendte, som gør ligningen sand.

Ved løsning af ligninger benytter vi følgende grundlæggende regler.

Regler til løsning af ligninger

Vi må lægge et tal til eller trække et tal fra på begge sider af lighedstegnet.

Vi må gange eller dividere med et tal forskelligt fra nul på begge sider af lighedstegnet.

Vi løser ligningen $(**)$ ved brug af vore regler

$$\begin{aligned} & 2x+3=9 \\ \Leftrightarrow\quad & 2x+3-3=9-3 \\ \Leftrightarrow\quad & 2x=6 \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{2x}{2}=\frac{6}{2} \\ \Leftrightarrow\quad & x=3 \end{aligned}$$

Det sidste udtryk er kun sandt, hvis x er tallet 3. Undervejs har vi benyttet reglerne til at isolere x, således at det er muligt direkte at aflæse løsningen til ligningen, og mellem hver omformning har vi sat et ensbetydendetegn

$$\Leftrightarrow$$

mellem ligningen og den omformede ligning.

Et ensbetydendetegn mellem to ligninger betyder, at vi erstatter én ligning med en anden ligning med præcis de samme sandhedsværdier og dermed med præcis de samme løsninger. Så længe vi kun omformer en ligning ved brug af reglerne, kan vi altid sætte $\Leftrightarrow$ mellem omformninger

Eksempel 1311

Når vi skal løse ligningen $8x + 4 = 13$, regner vi som følger

$$\begin{aligned} & 8x+4=13 && \textit{(trækker 4 fra på begge sider)} \\ \Leftrightarrow\ & 8x=13-4 && \textit{(samler led)} \\ \Leftrightarrow\ & 8x=9 && \textit{(dividerer med 8 på begge sider)} \\ \Leftrightarrow\ & x=\frac{9}{8} \end{aligned}$$

Vi har hermed fundet løsningen, nemlig tallet $\frac{9}{8}$.

ISBN 9788761685704

Hvis x indgår på begge sider af lighedstegnet, samler vi leddene med x på en af siderne. Regningerne bliver nemmest, hvis vi samler "x-erne" på den side, hvor der er flest "x-er" i forvejen.

Eksempel 1312

Vi løser ligningen $9x–10 = 15x$.

$$\begin{aligned} & 9x-10=15x && \textit{(trækker 9x fra på begge sider)} \\ \Leftrightarrow\ & -10=15x-9x && \textit{(samler led)} \\ \Leftrightarrow\ & -10=6x && \textit{(dividerer med 6 på begge sider)} \\ \Leftrightarrow\ & x=\frac{-10}{6} && \textit{(forkorter brøken med 2)} \\ \Leftrightarrow\ & x=-\frac{5}{3} \end{aligned}$$

Altså er løsningen $x=-\frac{5}{3}$.

Øvelse 1311

a. Vis, at –4, –1 og 2 er løsninger til ligningen $x^3+3x^2-6x-8=0$

b. Vis, at 0 er løsning til ligningen $\frac{5^x}{7x+1}=1$

c. Ligningen $\frac{4}{x+1}=0$ har ingen løsninger. Hvorfor ikke?

Øvelse 1312

Løs følgende ligninger

a. $3x - 8 = 2x + 5$
b. $3(2 + x) = x + 8$
c. $x - 2(x - 1) = 2x + 5$
d. $-3(x + 2) = x - 3(x + 2)$
e. $x - 5(2x-4) = 3x + 8$
f. $9(x - 2) = 7x - 11$

ISBN 9788761685704

Det kan godt betale sig at samle led og reducere udtryk undervejs i regningerne. Jo simplere udtryk, jo større er chancen for at regne rigtigt.

Indeholder ligningen brøker, er det en god ide at gange igennem med en fællesnævner.

Eksempel 1313

$$\begin{aligned}
& \frac{7(x-3)}{3} = 2 - \frac{x-1}{5} && \textit{(15 er fællesnævner)} \\
\Leftrightarrow\ & 15 \cdot \frac{7(x-3)}{3} = 15 \cdot (2 - \frac{x-1}{5}) && \textit{(ganger med 15 på begge sider)} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{15}{3} \cdot 7(x-3) = 30 - 15 \cdot \frac{x-1}{5} && \textit{(ganger ind)} \\
\Leftrightarrow\ & 5 \cdot 7(x-3) = 30 - \frac{15}{5} \cdot (x-1) && \textit{(husker parentes om tæller)} \\
\Leftrightarrow\ & 35(x-3) = 30 - 3(x-1) \\
\Leftrightarrow\ & 35x - 105 = 30 - 3x + 3 \\
\Leftrightarrow\ & 38x = 138 \\
\Leftrightarrow\ & x = \frac{138}{38} \\
\Leftrightarrow\ & x = \frac{69}{19}
\end{aligned}$$

så løsningen er $x = \frac{69}{19}$.

ISBN 9788761685704

Eksempel 1314

Når vi kun benytter de grundlæggende regler, undlader vi oftest at anføre disse.

$$
\begin{aligned}
& \frac{4x-3}{2} + \frac{x-2}{3} - 5x = 2 \\
\Leftrightarrow \quad & 6 \cdot \frac{4x-3}{2} + 6 \cdot \frac{x-2}{3} - 6 \cdot 5x = 6 \cdot 2 \\
\Leftrightarrow \quad & 3(4x-3) + 2(x-2) - 30x = 12 \\
\Leftrightarrow \quad & 12x - 9 + 2x - 4 - 30x = 12 \\
\Leftrightarrow \quad & -16x - 13 = 12 \\
\Leftrightarrow \quad & -16x = 25 \\
\Leftrightarrow \quad & x = -\frac{25}{16}
\end{aligned}
$$

så løsningen er $x = -\frac{25}{16}$.

Øvelse 1313

Løs følgende ligninger

a. $1\frac{1}{2}x + 5 = 2\frac{1}{2}x + 3$
b. $\frac{3}{4}x - 4 = 2x + 3$
c. $\frac{2}{3}x - 2 = x - 4$
d. $\frac{2}{7}x + 1 = 2x - 2$

En ligning kan have flere løsninger eller måske slet ingen.

Ser vi på ligningen

$$
\begin{aligned}
& 2x + 3 = 2(x+1) \qquad (*) \\
\Leftrightarrow \quad & 2x + 3 = 2x + 2 \\
\Leftrightarrow \quad & 3 = 2 \qquad (F)
\end{aligned}
$$

viser omformningen, at den sidste ligning er falsk, og dermed er de to foregående det også. Altså er $(*)$ falsk, uanset hvilke tal vi måtte indsætte for *x*. Ligningen $(*)$ har ingen løsning, hvilket vi også kan skrive som $x \in \emptyset$.

Ser vi på ligningen

ISBN 9788761685704

$$
\begin{aligned}
& 2x+2=2(x+1) && (**) \\
\Leftrightarrow\quad & 2x+2=2x+2 \\
\Leftrightarrow\quad & 2=2 \qquad (S)
\end{aligned}
$$

viser omformningen, at vi når frem til en ligning, som er sand. Dermed er $(**)$ sand, uanset hvilke værdier vi måtte indsætte for *x*. Ligningen $(**)$ har uendeligt mange løsninger, nemlig alle tal, hvilket vi skriver som $x \in \mathbb{R}$

Øvelse 1314

Løs ligningerne

a. $\frac{x}{4}+\frac{3x}{2}-\frac{x}{6}=1$
b. $\frac{x}{2}+\frac{4x}{3}=2x-7$
c. $\frac{2x+1}{3}+16=3x$
d. $\frac{x+1}{3}+\frac{2+x}{7}=2$

Øvelse 1315

Løs ligningerne

a. $\frac{x-5}{2}-\frac{2x-1}{3}=6$
b. $\frac{4x+5}{6}-\frac{2x-1}{3}=x$

1.3.2 Nulreglen

Nu ser vi på ligningen

$$x(x-3)=0$$

Med lidt snilde opdager vi, at $x = 0$ er en løsning, da

$$
\begin{aligned}
& \boxed{0}\cdot\left(\boxed{0}-3\right)=0 \\
\Leftrightarrow\quad & 0\cdot(-3)=0 \\
\Leftrightarrow\quad & 0=0 \qquad (S)
\end{aligned}
$$

Men vi opdager måske også, at $x = 3$ er en løsning, da

ISBN 9788761685704

$$
\begin{aligned}
& \boxed{3} \cdot \left(\boxed{3} - 3\right) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 3 \cdot 0 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 0 = 0 \qquad\qquad (S)
\end{aligned}
$$

Ligningen $x\,(x-3)=0$ har altså to løsninger; $x=0$ eller $x=3$.

At der ikke er flere løsninger (end de to) fremgår af den følgende regel.

Nulreglen

Lad p og q være tal eller taludtryk. Så gælder

$$
\begin{aligned}
& p \cdot q = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & p = 0 \quad \text{eller} \quad q = 0
\end{aligned}
$$

Reglen siger, at et produkt er 0, netop når en af faktorerne er 0.

Eksempel 1321

$$
\begin{aligned}
& (x-2)(x+3) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x-2 = 0 \quad \text{eller} \quad x+3 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x = 2 \quad \text{eller} \quad x = -3
\end{aligned}
$$

Eksempel 1322

$$
\begin{aligned}
& x(x-1) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x = 0 \quad \text{eller} \quad x-1 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x = 0 \quad \text{eller} \quad x = 1
\end{aligned}
$$

Hvis vi i Eksempel 1332 først havde forkortet med x på begge sider af lighedstegnet, ville vi have mistet løsningen $x=0$. Derfor undgår vi at dividere med udtryk, der indeholder den ubekendte.

En brøk $\frac{p}{q}$ kan vi omskrive til $p \cdot \frac{1}{q}$. Af nulreglen følger så, at

ISBN 9788761685704

$$\frac{p}{q} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p \cdot \frac{1}{q} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = 0$$

da $\frac{1}{q} \neq 0$. En brøk er dermed 0, netop når tælleren er 0.

Eksempel 1323

$$\frac{x-2}{x+3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x-2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

Øvelse 1321

Løs ligningerne

a. $(3x + 2)(3x - 4) = 0$
b. $(5a - 9)(a + 6) = 0$
c. $(2y + 3)(2y - 3) = 0$
d. $(2x + 1)(2x - 9) = 0$
e. $(2x - 3)(2x - 3) = 0$
f. $(3x + 1)(10x + 27) = 0$

Øvelse 1322

Faktorisér og løs ligningerne ved hjælp af nulreglen

a. $x^3 - x^2 = 0$
b. $t^5 - t^4 = 0$
c. $x^2 + 1 + 2x = 0$
d. $a^2 + 9 - 6a = 0$
e. $x^2 - 16 = 0$

ISBN 9788761685704

Øvelse 1323

Løs ligningerne

a. $\frac{x-2}{x^2+10} = 0$
b. $\frac{x-4}{x-5} = 0$
c. $\frac{x^4+1}{x^2+x} = 0$

1.3.3 To ligninger med to ubekendte

Vi har ofte brug for flere variable til at beskrive et problem. Vi har derfor også brug for metoder til at løse ligninger, der indeholder flere variable. Det simpleste tilfælde svarer til, at vi har to variable, som vi kalder x og y, og vi har nu brug for to forskellige ligninger for at kunne bestemme de to variable x og y. De to ligninger kalder vi *et ligningssystem*, og en eventuel løsning til ligningssystemet er talparret (x,y).

I denne sammenhæng omtaler vi x og y som de ubekendte, og vi siger, at vi skal løse to ligninger med to ubekendte.

Øvelse 1331

a. Find x, når $y = 2$ og $4x + 3y = 9$
b. Find y, når $x = -3$ og $2x + y = 8$
c. Find t, når $s = 10$ og $10t + 55s = 530$
d. Find β, når $\gamma = 2$ og $54 = \gamma - 4\beta$

Vi vil angive de to simpleste løsningsmetoder. Hvilken, der er den mest hensigtsmæssige, afhænger af de konkrete ligninger i en given opgave.

Substitutionsmetoden

Den første metode kalder vi substitutionsmetoden

1. Først isolerer vi den ene ubekendte i den ene ligning.
2. Så sætter vi udtrykket ind i den anden ligning og løser denne. Herved finder vi den anden ubekendte.
3. Udtrykket for den anden ubekendte indsætter vi så i udtrykket for den første ubekendte. Herved finder vi den første ubekendte.

ISBN 9788761685704

Eksempel 1331

Givet to ligninger

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \qquad (*) \\ 2x - 4y &= -6 \qquad (**) \end{aligned}$$

Vi starter med at isolere x i ligning $(**)$.

$$\begin{aligned} & 2x - 4y = -6 \\ \Leftrightarrow \quad & 2x = 4y - 6 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 2y - 3 \end{aligned}$$

Dette udtryk for x indsætter vi nu i $(*)$

$$\begin{aligned} & 2(2y - 3) + 3y = 8 \\ \Leftrightarrow \quad & 4y - 6 + 3y = 8 \\ \Leftrightarrow \quad & 7y = 14 \\ \Leftrightarrow \quad & y = 2 \end{aligned}$$

Vi ved nu, at $y = 2$.

Da $x = 2y - 3$, bliver den tilhørende x-værdi $x = 2 \cdot 2 - 3 = 1$.

Løsningen til vort ligningssystem er dermed $(x,y) = (1,2)$.

Lige store koefficienters metode

Den anden metode, kalder vi "lige store koefficienters metode".

En *koefficient* er en foranstillet konstant eller talværdi, som vi ganger på en variabel.

I udtrykket

$$3x - 4y$$

omtaler vi tallet 3 som koefficienten til x, mens tallet –4 er koefficienten til y.

ISBN 9788761685704

Eksempel 1332

Vi har givet to ligninger

$$\begin{aligned} x+2y &= 7 && (*) \\ 2x+3y &= 12 && (**) \end{aligned}$$

Hvis vi ganger ligning $(*)$ igennem med 2, får vi ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x+4y &= 14 && (*') \\ 2x+3y &= 12 && (**) \end{aligned}$$

Nu er koefficienten til x den samme i begge ligninger, og trækker vi ligningerne fra hinanden, går leddene med x ud.

Vi trækker nu $(**)$ fra $(*')$ og får

$$2x+4y-(2x+3y) = 14-12 \quad \Leftrightarrow \quad y=2$$

Altså er

$$y=2$$

Indsætter vi denne værdi i $(*)$, får vi

$$x+2\cdot 2=7 \quad \Leftrightarrow \quad x=3$$

Løsningen til ligningssystemet er således

$$(x,y)=(3,2)$$

Øvelse 1332

Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x+y &= 3 && (*) \\ 3x-2y &= 14 && (**) \end{aligned}$$

ISBN 9788761685704

Øvelse 1333

Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} -3x + y &= 1 & (*) \\ 6x - 3y &= -4 & (**) \end{aligned}$$

Øvelse 1334

Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + y &= 3 & (*) \\ 1{,}5x - y &= 7 & (**) \end{aligned}$$

Øvelse 1335

Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} 0{,}2x - 1{,}4y &= -1{,}2 & (*) \\ x + y - 3 &= -1 & (**) \end{aligned}$$

Øvelse 1336

Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 & (*) \\ x + y &= 0 & (**) \end{aligned}$$

ISBN 9788761685704

Øvelse 1337

Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x - y &= 4 && \text{(I)} \\ 4x - 2y - z &= 11 && \text{(II)} \\ 2x + 2y + 2z &= 18 && \text{(III)} \end{aligned}$$

Øvelse 1338

Til en koncert ved vi, at der er blevet solgt 3 500 billetter. Der er solgt billetter til henholdsvis 250 kr. og til 350 kr. Den samlede billetindtægt har været på 1 033 000 kr.

Opstil og løs et ligningssystem, der beskriver, hvor mange billetter i hver af de 2 prisklasser, der er blevet solgt.

Øvelse 1339

En person har fået udbetalt 6 148 kr. i løn for 80 timers arbejde.

Han arbejder i hverdagen til en timeløn på 72,75 kr. og i weekenden til en timeløn på 93,25 kr.

Opstil og løs et ligningssystem, der beskriver, hvor mange arbejdstimer personen har haft på henholdsvis hverdage og weekender.

1.3.4 Simple uligheder

En ulighed er ligesom en ligning et taludtryk, der enten er sandt eller falsk.

Ser vi på ulighederne

$$2 < 3 \quad (S) \qquad 2 > 3 \quad (F) \quad (*)$$

så er den første ulighed sand (S), og den anden er falsk (F).

Lægger vi nu 2 til på begge sider af ulighedstegnet i $(*)$, så får vi

$$\begin{array}{ccccccccc} 2 & < & 3 & (S) & \qquad & 2 & > & 3 & (F) \\ 2+2 & < & 3+2 & (S) & \qquad & 2+2 & > & 3+2 & (F) \end{array}$$

Denne handling har ikke ændret på sandhedsværdierne i de to uligheder. Et tilsvarende resultat opnår vi, når vi trækker et tal fra på begge sider af ulighedstegnet. Derfor er det i almindelighed en lovlig handling at lægge tal til og trække tal fra på begge sider af ulighedstegnet i en ulighed.

Forsøger vi os med multiplikation med tallet 2 på begge sider af ulighedstegnet i $(*)$, får vi

$$\begin{array}{ccccc} 2 & < & 3 & (S) & \qquad 2 & > & 3 & (F) \\ 2\cdot 2 & < & 3\cdot 2 & (S) & \qquad 2\cdot 2 & > & 3\cdot 2 & (F) \end{array}$$

hvilket viser, at multiplikation med positive tal på begge sider af ulighedstegnet er en lovlig handling.

Ganger vi med tallet 0 i $(*)$, får vi

$$\begin{array}{ccccc} 2 & < & 3 & (S) & \qquad 2 & > & 3 & (F) \\ 2\cdot 0 & < & 3\cdot 0 & (F) & \qquad 2\cdot 0 & > & 3\cdot 0 & (S) \end{array}$$

Vi kan altså få noget sandt til at blive falsk ved denne handling, og det er ikke lovligt.

Endelig forsøger os med multiplikation med tallet −2 på begge sider af ulighedstegnet i $(*)$ og får

$$\begin{array}{ccccc} 2 & < & 3 & (S) & \qquad 2 & > & 3 & (F) \\ 2\cdot(-2) & < & 3\cdot(-2) & (F) & \qquad 2\cdot(-2) & > & 3\cdot(-2) & (S) \end{array}$$

Herved får vi ombyttet sandhedsværdierne. Så hvis vi multiplicerer med tallet −2 på begge sider af ulighedstegnet i $(*)$ og samtidig vender ulighedstegnet

$$\begin{array}{ccccc} 2 & < & 3 & (S) & \qquad 2 & > & 3 & (F) \\ 2\cdot(-2) & > & 3\cdot(-2) & (S) & \qquad 2\cdot(-2) & < & 3\cdot(-2) & (F) \end{array}$$

så bevarer vi sandhedsværdierne af ulighederne.

Division med tallet 0 er ikke defineret, men division med et positivt tal på begge sider af ulighedstegnet er en lovlig handling. Tilsvarende er det en lovlig handling at dividere med et negativt tal på begge sider af ulighedstegnet, når vi samtidigt vender ulighedstegnet.

Den type af uligheder, vi beskæftiger os med, er åbne udsagn, hvori indgår et (eller flere) ukendte tal, som vi skal bestemme. F.eks. en ulighed udtrykt ved

$$2x + 3 < 9 \quad (**)$$

Ved løsning af uligheder benytter vi følgende grundlæggende regler

ISBN 9788761685704

Regler til løsning af uligheder

Vi må lægge et tal til eller trække et tal fra på begge sider af ulighedstegnet.

Vi må gange eller dividere med et positivt tal på begge sider af ulighedstegnet.

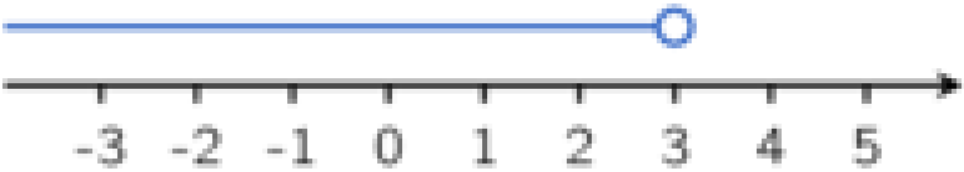
Vi må gange eller dividere med et negativt tal på begge sider af ulighedstegnet, når vi samtidig vender ulighedstegnet.

Vi løser nu uligheden $(**)$ ved brug af ovenstående regler

$$\begin{aligned} 2x + 3 &< 9 \\ \Leftrightarrow \quad 2x &< 6 \\ \Leftrightarrow \quad x &< 3 \end{aligned}$$

Alle tal, der er mindre end 3, vil således gøre $(**)$ sand, dvs. at løsningen til uligheden er

$$x \in]-\infty\,;\,3[$$



Figur 1341

Løsninger til uligheder er ofte et eller flere intervaller.

Eksempel 1341

Vi løser uligheden

$$\begin{aligned} -3x - 5 &\geq -8 \\ \Leftrightarrow \quad -3x &\geq -3 \\ \Leftrightarrow \quad x &\leq 1 \end{aligned}$$

Løsningen er så

$$x \in]-\infty\,;\,1]$$

ISBN 9788761685704

Øvelse 1341

Løs ulighederne

a. $-x > 9$
b. $-x \leq 0$
c. $-\frac{1}{2}x + 3 > 0$
d. $x + 3 < 2x + 5$
e. $x > x$
f. $x + 3 \leq x - 2$

Øvelse 1342

Løs ulighederne

a. $3x + 2 > 11$
b. $-2x + 7 > x - 1$
c. $x - 4 < -3x - 2$
d. $-2(x - 1) \geq 3(x - 6)$

Øvelse 1343

Løs ulighederne

a. $2x - 4 > 4x + 2$
b. $2(3 - x) < 2 + 3(x - 1)$
c. $2 + 3x - 6(1 - \frac{x}{2}) > 0$
d. $\frac{2}{3} - \frac{5}{2}x < \frac{1}{3} - x$
e. $\frac{5}{2}x - \frac{1}{6}x > \frac{7}{6} + \frac{9}{2}x$

Øvelse 1344

Løs ulighederne

a. $3 - 2(t - 8) + t > 17 - 3t$
b. $\frac{2y+1}{2} - 4(2y - 1) > 3$

ISBN 9788761685704

1.3.5 Dobbeltuligheder

En ulighed som

$$2 + x \leq 4x + 5 < 3x + 11 \qquad (*)$$

er et eksempel på en dobbeltulighed.

I en dobbeltulighed skal de to ulighedstegn vende samme vej, dvs. dobbeltuligheden må kun indeholde < og $\leq$ sammen eller > og $\geq$ sammen.

Uligheden $(*)$ udtrykker at $4x + 5$ skal ligge mellem $2 + x$ og $3x + 11$ og svarer til, at de to uligheder

$$2 + x < 4x + 5 \quad \text{og} \quad 4x + 5 < 3x + 11 \qquad (**)$$

skal være opfyldt samtidigt.

Vi løser først den venstre ulighed i $(**)$

$$\begin{aligned} & 2 + x \leq 4x + 5 \\ \Leftrightarrow \quad & 2 \leq 3x + 5 \\ \Leftrightarrow \quad & -3 \leq 3x \\ \Leftrightarrow \quad & -1 \leq x \end{aligned}$$

Løsningerne til denne ulighed er tallene i intervallet $[-1\,;\,\infty\,[$.

For den højre ulighed i $(**)$ finder vi

$$\begin{aligned} & 4x + 5 < 3x + 11 \\ \Leftrightarrow \quad & x + 5 < 11 \\ \Leftrightarrow \quad & x < 6 \end{aligned}$$

som svarer til tallene i intervallet $]-\infty\,;\,6[$.

Løsningen til dobbeltuligheden er de tal *x*, som opfylder

$$-1 \leq x \quad \text{og} \quad x < 6$$

som netop er beskrivelsen af fællesmængden mellem $[-1\,;\,\infty\,[$ og $]-\infty\,;\,6[$.

Idet

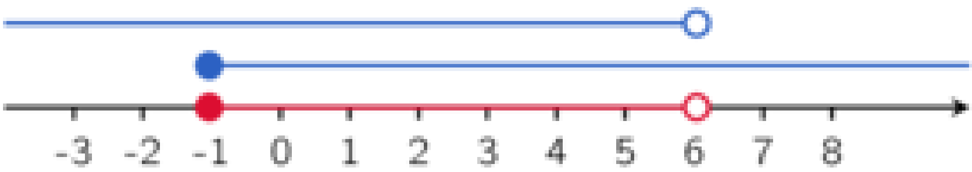
$$[-1\,;\,\infty\,[\cap]-\infty\,;\,6[=\,[-1\,;\,6\,[$$

er løsningen til dobbeltuligheden $(*)$ dermed

$$x \in [-1\,;\,6\,[$$

hvilket også fremgår af figuren herunder.

ISBN 9788761685704



Figur 1351

For at finde løsningen til en dobbeltulighed kan vi altid gå frem i følgende trin.

1. Opsplit dobbeltuligheden i to enkeltuligheder.
2. Løs de to uligheder hver for sig, og angiv løsningen som interval for begge.
3. Bestem fællesmængden af de to løsningsintervaller.
4. Fællesmængden er løsningen til dobbeltuligheden.

ISBN 9788761685704

Eksempel 1351

Vi løser uligheden

$$4x - 4 < x + 2 < 4 - x$$

Vi starter med at løse uligheden $4x - 4 < x + 2$.

$$\begin{aligned} & 4x - 4 < x + 2 \\ \Leftrightarrow \quad & 3x < 6 \\ \Leftrightarrow \quad & x < 2 \end{aligned}$$

som svarer til, at $x \in]-\infty\,; 2\,[$.

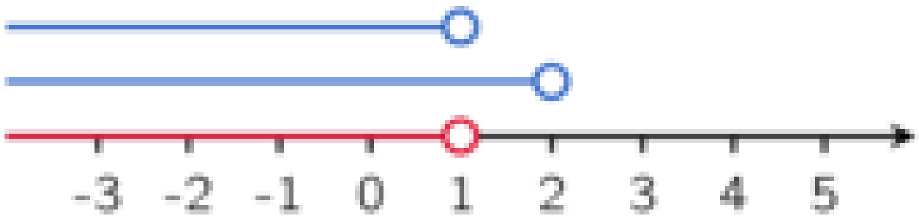
Herefter løser vi uligheden $x + 2 < 4 - x$.

$$\begin{aligned} & x + 2 < 4 - x \\ \Leftrightarrow \quad & 2x < 2 \\ \Leftrightarrow \quad & x < 1 \end{aligned}$$

som svarer til, at $x \in]-\infty\,; 1\,[$.

Fællesmængden mellem de to løsningsintervaller er

$$]-\infty\,; 2[\cap]-\infty\,; 1[=]-\infty\,; 1\,[$$



Figur 1352

Løsningerne til dobbeltuligheden er således

$$x \in]-\infty\,; 1\,[$$

ISBN 9788761685704

Eksempel 1352

For dobbeltuligheden

$$2x + 3 \leq x - 4 \leq 3x - 1$$

får vi

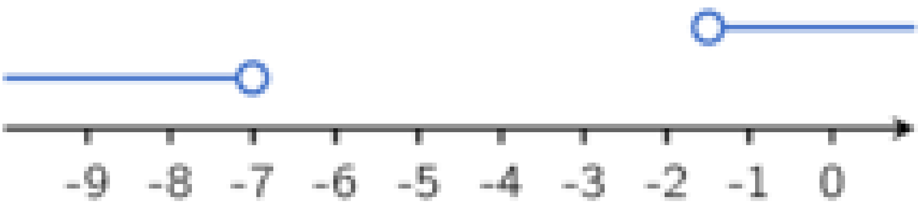
$$\begin{aligned} & 2x + 3 \leq x - 4 \\ \Leftrightarrow \quad & x \leq -7 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} & x - 4 \leq 3x - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & -4 \leq 2x - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & -3 \leq 2x \\ \Leftrightarrow \quad & -\frac{3}{2} \leq x \end{aligned}$$

En løsning til dobbeltuligheden skal således være et tal som højst er –7 og mindst $-\frac{3}{2}$. Det er umuligt, så dobbeltuligheden har ingen løsninger.

Fællesmængden mellem løsningerne til de to enkeltuligheder er tom, som det fremgår af figur 1353.



Figur 1353

Øvelse 1351

Løs dobbeltulighederne

a. $x + 1 \leq 3x + 1 < x + 7$
b. $2x + 5 < 4 - 3x < 1 - 4x$

ISBN 9788761685704

Øvelse 1352

Løs dobbeltulighederne

a. $2x + 3 \leq 5x + 6 < -3x + 7$
b. $3 - x < 2x + 1 \leq 3x - 4$

Øvelse 1353

Løs dobbeltulighederne

a. $x < 2x + 1 < 7$
b. $x + 5 \leq 3x + 1 \leq 2x + 3$

1.4 Procentregning

Regning med procenter

Procent betyder *pr. hundrede*, og vi benytter betegnelsen

$$1\ \% = \frac{1}{100}$$

Vi benytter procenter til at angive brøkdelen af 100 i stedet for den oprindelige brøkdel.

Eksempel 141

$$\frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\,\%$$
$$\frac{6}{250} = 0{,}024 = 2{,}4\,\%$$

Skal vi finde 25 % af 345, svarer det til at bestemme tallet x, så

$$\frac{x}{345} = \frac{25}{100} = 0{,}25$$

Ganger vi ligningen igennem med 345, finder vi

ISBN 9788761685704

$$x = 0{,}25 \cdot 345 = 86{,}25$$

dvs. vi finder 25 % af 345 ved at gange med 0,25.

I almindelighed gælder der, at

Vi tager p % af et tal ved at gange tallet med $r = \frac{p}{100}$.

Tallet $r = \frac{p}{100}$ er en omregning af procenttallet til det tilsvarende decimaltal ved division med 100. Generelt omtaler vi r som *rentefoden* eller *vækstraten*.

Lægger vi p % til en værdi B, skal vi lægge $r \cdot B$ til tallet, og den nye værdi er

$$B + r \cdot B = B(1 + r)$$

Trækker vi i stedet p % fra en værdi B, bliver den nye værdi

$$B - r \cdot B = B(1 - r)$$

Vi vedtager nu at regne p med fortegn, så en positiv værdi af p svarer til en forøgelse tallet, mens en negativ værdi af p svarer til en formindskelse af tallet. Derved kan vi sammenfatte de to udtryk til én formel, da vi i begge tilfælde ganger med $1 + r$, som vi kalder *fremskrivningsfaktoren*.

Vi ændrer en størrelse B med p % ved at gange størrelsen med fremskrivningsfaktoren $1 + r = 1 + \frac{p}{100}$. Den nye værdi bliver

$$B(1 + r)$$

Eksempel 142

En forøgelse af et tal med 37 % svarer til at gange tallet med 1,37.

En formindskelse af et tal 12 % svarer til at gange tallet med 1 + (−0,12) = 0,88.

Vi kan generalisere ovenstående til en formel.

ISBN 9788761685704

Sætter vi

$$\begin{aligned} S &: \quad \text{slutværdien} \\ B &: \quad \text{begyndelsesværdien} \\ r &: \quad \text{rentefoden (procentændringen)} \\ 1+r &: \quad \text{fremskrivningsfaktoren} \end{aligned}$$

så får vi følgende sammenhæng

$$S = B \cdot (1+r) \tag{141}$$

Eksempel 143

Vi vil finde slutværdien, når vi lægger 35 % til 700 kr.

$$\begin{aligned} S &= B \cdot (1+r) \\ &= 700 \cdot (1+0{,}35) \\ &= 700 \cdot 1{,}35 \\ &= 945 \end{aligned}$$

Altså er slutværdien 945 kr.

Eksempel 144

Et beløb vokser fra 212 kr. til 298 kr. Så kan vi udregne procentændringen ved indsættelse i formlen

$$S = B \cdot (1+r)$$

Altså

$$\begin{aligned} 298 =& 212 \cdot (1+r) \\ \Leftrightarrow \quad r =& \frac{298}{212} - 1 \\ =& 0{,}406 \\ =& 40{,}6\ \% \end{aligned}$$

Altså er beløbet steget med 40,6 %.

ISBN 9788761685704

Eksempel 145

Et beløb aftager fra 17 kr. til 12,50 kr.

Vi udregner procentændringen ved at indsætte i formel (141), som vi denne gang først omformer

$$\begin{aligned} S &= B \cdot (1+r) \\ \text{så} \quad r &= \frac{S}{B} - 1 \\ &= \frac{12{,}5}{17} - 1 \\ &= -0{,}265 \\ &= -26{,}5\ \% \end{aligned}$$

Altså er beløbet aftaget med 26,5 %.

Eksempel 146

En vare koster 325 kr. uden moms. Med 25 % moms koster varen

$$S = B \cdot (1+r) = 325 \cdot 1{,}25 = 406{,}25$$

altså 406,25 kr.

En vare koster 550 kr. med moms. Varens pris uden moms er så

$$B = \frac{S}{1+r} = \frac{550}{1{,}25} = 440$$

altså 440 kr.

For at finde en vares pris uden moms dividerer vi med 1,25, hvilket svarer til at gange med fremskrivningsfaktoren $\frac{1}{1{,}25} = 0{,}8$. Udregningen viser, at vi finder prisen uden moms ved at trække 20 % fra prisen med moms.

ISBN 9788761685704

Eksempel 147

Ved et udsalg bliver en vares pris B nedsat med 30 %. Efter en periode bliver prisen på varen nedsat med yderligere 25 %. Dermed er prisen på varen

$$S = B \cdot (1 - 0{,}30)(1 - 0{,}25) = B \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}75 = B \cdot 0{,}525$$

som svarer til fremskrivningsfaktoren $1 + r = 0{,}525$, dvs. $r = -0{,}475$.

Altså er den samlede prisnedsættelse på 47,5 %.

Øvelse 141

Beregn fremskrivningsfaktoren svarende til

a. at lægge 27 % til
b. at trække 48 % fra
c. at lægge 7,1 % til
d. at trække 0,4 % fra

Øvelse 142

Bestem procentændringen r svarende til følgende fremskrivningsfaktorer

a. 1,027
b. 0,93
c. 2,1
d. 0,392

Øvelse 143

En liter mælk koster 6,75 kr. hos købmand Frandsen og 7,50 kr. hos købmand Svendsen.

a. Hvor mange procent er mælken dyrere hos købmand Svendsen end hos købmand Frandsen?
b. Hvor mange procent er mælken billigere hos købmand Frandsen end hos købmand Svendsen?

ISBN 9788761685704

Øvelse 144

En stol købes på et ophørsudsalg, hvor der gives 40 % rabat på alle varer. Stolen købes for 855 kr. Hvad kostede stolen før ophørsudsalget?

Øvelse 145

Længden af nogle træbjælker i et byggemarked er angivet som

$$450 \text{ cm} \pm 3\,\%$$

Inden for hvilket interval kan vi forvente, at bjælkernes længde ligger?

Øvelse 146

En nyansat medarbejder får en timeløn på 81,75 kr. Medarbejderen er blevet lovet 3 lønstigninger, én efter 3 måneder, én efter 6 måneder og endelig én efter 9 måneder.

Første lønstigning er på 10 %, anden lønstigning er på 5 % og den sidste lønstigning er på 3 %.

Hvor stor bliver medarbejderens timeløn efter 9 måneders ansættelse?

Øvelse 147

Ved en afstemning til et formandsvalg i en forening blev der afgivet følgende stemmer på de 5 formandskandidater

Kandidat A: 81 stemmer

Kandidat B: 142 stemmer

Kandidat C: 36 stemmer

Kandidat D: 312 stemmer

Kandidat E: 94 stemmer

Bestem den procentvise fordeling af stemmerne (med 2 decimaler).

ISBN 9788761685704

Procentpoint

Begrebet *procentpoint* anvender vi, når vi trækker størrelser angivet i procent fra hinanden.

Eksempel 148

En virksomheds omkostninger er over en årrække steget fra 60 % til 70 % af omsætningen. Dette er en stigning på 10 procentpoint.

Hvis vi antager, at omsætningen over årene har ligget konstant på 1 000 000 kr., er omkostningerne steget fra 600 000 kr. til 700 000 kr.

Hertil svarer er en procentvis stigning, som vi finder med (1.4.1)

$$\begin{aligned} S &= B \cdot (1 + r) \\ \Leftrightarrow \quad r &= \frac{S}{B} - 1 \\ &= \frac{700\,000}{600\,000} - 1 \\ &= 0{,}167 \end{aligned}$$

Altså er omkostningerne steget med 16,7 %.

Øvelse 148

Et supermarked har flere år i træk haft en omsætning på 600 000 kr. i deres Frugt & Grøntafdeling.

Omsætningen hidrørende fra de økologiske varer i afdelingen er det seneste år steget fra 180 000 kr. til 255 000 kr.

Hvor mange procentpoint og hvor mange procent er andelen af de økologiske varer steget med?

Øvelse 149

I en by med et fast indbyggertal på 320 000 blev der et år registreret 5,1 % arbejdsløse, og året efter blev der registreret 3,4 % arbejdsløse.

Hvor mange procentpoint og hvor mange procent er arbejdsløsheden i byen faldet med?

ISBN 9788761685704

1.5 Indekstal

Vi bruger indekstal til at skabe overblik over, hvorledes et talmateriale udvikler sig med tiden.

Fra værdi til indekstal

For at lave indekstal vælger vi først et *basisår*, som danner udgangspunkt for beskrivelsen af udviklingen, og vi sætter indekstallet for basisåret til 100 (svarende til 100 %).

De andre års indekstal beregner vi nu i forhold til værdien i basisåret som

$$\text{Indekstal} = \frac{\text{årets værdi}}{\text{værdi i basisåret}} \cdot 100$$

eller med formler

$$I_{\text{år}} = \frac{V_{\text{år}}}{V_{\text{basisår}}} \cdot 100 \tag{151}$$

hvor $I_{\text{år}}$ er indekstallet og $V_{\text{år}}$ er værdien det valgte år, og $V_{\text{basisår}}$ er værdien i basisåret.

ISBN 9788761685704

Eksempel 151

De 15-24-årige er den aldersgruppe, der oftest har kontakt til et sygehus i forbindelse med alkoholforgiftning. Udviklingen i antallet af unge i aldersgruppen 15-24 med alkoholrelateret kontakt til sygehus fremgår af tabellen nedenfor (Kilde: www.statistikbanken.dk).

År	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Antal kontakter til sygehus	2937	2861	3095	3136	3233	3049

Tabel 151

Vælger vi år 2008 som basisår, vil indekstallet for år 2009 være

$$I_{2009} = \frac{2861}{2937} \cdot 100 = 97{,}4$$

og indekstallet for år 2010 er

$$I_{2010} = \frac{3095}{2937} \cdot 100 = 105{,}4$$

I forhold til 2008 var der dermed 2,6 % færre kontakter i 2009, men 5,4 % flere kontakter i 2010.

Vi færdigudfylder tabellen med de resterende indekstal

År	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Indekstal	100	97,4	105,4	106,8	110,1	103,8

Tabel 152

Af tabellen ser vi, at indekstallet er steget fra 97,4 i 2009 til 105,4 i 2010, dvs. en stigning i indekstal på 8,0. Denne stigning svarer til en stigning på 8,0 procentpoint.

Den tilsvarende procentvise stigning i antal kontakter fra 2009 til 2010 er

$$r = \frac{S}{B} - 1 = \frac{3095}{2861} - 1 = 0{,}0818$$

som svarer til en procentvis stigning på 8,18 %.

ISBN 9788761685704

Øvelse 151

Tabellen nedenfor viser antallet af indregistrerede motorcykler opgjort pr. 1. januar det pågældende år

År	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Motorcykler i alt	147373	148766	148817	149665	150360	151542	153411

Tabel 153

a. Omregn tabellens tal til indekstal med 2010 som basisår.
b. Hvor stor var den procentvise stigning i antallet af motorcykler fra 2010 til 2016 ?
c. Hvor stor var stigningen i procentpoint fra 2011 til 2014 ?
d. Hvor stor var den procentvise stigning fra 2011 til 2014 ?

Fra indekstal til værdi

Isolerer vi $V_{\text{år}}$ i formel (151), får vi

$$\begin{aligned} I_{\text{år}} &= \frac{V_{\text{år}}}{V_{\text{basisår}}} \cdot 100 \\ \Leftrightarrow \quad I_{\text{år}} \cdot V_{\text{basisår}} &= V_{\text{år}} \cdot 100 \\ \Leftrightarrow \quad \frac{I_{\text{år}} \cdot V_{\text{basisår}}}{100} &= V_{\text{år}} \end{aligned}$$

altså

$$V_{\text{år}} = \frac{I_{\text{år}} \cdot V_{\text{basisår}}}{100} \tag{152}$$

Denne formel kan vi benytte, når vi kender indekstallet $I_{\text{år}}$ for et givent år samt værdien i basisåret $V_{\text{basisår}}$.

ISBN 9788761685704

Øvelse 152

Tilskuertallet i den danske superliga i fodbold har gennem de seneste år udviklet sig som vist i nedenstående tabel (Kilde: www.statistikbanken.dk).

I sæsonen 2006/2007 var der samlet 1 605 459 tilskuere til de 198 kampe.

Udregn det samlede tilskuertal for de øvrige sæsoner ud fra de oplyste indekstal.

Sæson	06/07	07/08	08/09	09/10	10/11	11/12	12/13	13/14
Tilskuere	1 605 459							
Indekstal	100	104,7	108,7	102,5	86,9	87,6	83,2	97,8

Tabel 154

Hvis vi har givet to indekstal I_1 og I_2 med tilhørende værdier V_1 og V_2, er

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\frac{V_2}{V_{\text{basis}}} \cdot 100}{\frac{V_1}{V_{\text{basis}}} \cdot 100} = \frac{\frac{V_2}{V_{\text{basis}}} \cdot V_{\text{basis}}}{\frac{V_1}{V_{\text{basis}}} \cdot V_{\text{basis}}} = \frac{V_2}{V_1}$$

altså

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{V_2}{V_1} \qquad (153)$$

som viser, at forholdet mellem to indekstal er det samme som forholdet mellem de tilsvarende værdier.

Hvis vi kender indekstallet I_1 og værdien V_1 for et år, kan vi finde indekstallet I_2 hørende til værdien V_2 for et andet år som

$$I_2 = I_1 \cdot \frac{V_2}{V_1} \qquad (154)$$

Får vi i stedet oplyst det andet års indekstal I_2, kan vi finde værdien V_2 som

$$V_2 = V_1 \cdot \frac{I_2}{I_1} \qquad (155)$$

ISBN 9788761685704

Eksempel 152

Vi vil udfylde den følgende tabel, som viser udviklingen i antallet af anmeldte voldforbrydelser i Danmark, dels angivet som faktisk antal, dels angivet som indekstal.

År	2007	2012	2015
Antal	18869	16061	
Indekstal		91,9	97,1

Tabel 155

Ved brug af (154) får vi

$$\begin{aligned} I_{2007} &= I_{2012} \cdot \frac{V_{2007}}{V_{2012}} \\ &= 91{,}9 \cdot \frac{18\,869}{16\,061} \\ &= 108{,}0 \end{aligned}$$

og ved brug af (155) får vi

$$\begin{aligned} V_{2015} &= V_{2012} \cdot \frac{I_{2015}}{I_{2012}} \\ &= 16\,061 \cdot \frac{97{,}1}{91{,}9} \\ &= 16\,970 \end{aligned}$$

Dermed bliver den færdigudfyldte tabel

År	2007	2012	2015
Antal	18869	16061	16970
Indekstal	108,0	91,9	97,1

Tabel 156
www.statistikbanken.dk

Øvelse 153

Tabellen nedenfor indeholder indekstal og årligt forbrug i kr. til pastaprodukter for hus-tande bestående af enlige med børn for nogle udvalgte år.

År	2006	2008	2010	2012	2014
Forbrug i kr.		479,8	453,9	376,1	
Indekstal	86,1		136,1		120,9

Tabel 157

Færdigudfyld tabellen med de manglende indekstal og forbrug i kr.

Øvelse 154

Tabellen nedenfor indeholder indekstal for prisen på sodavandsisen Filur i 1973 og 2014.

År	1973	2014
Indekstal	20	300

Tabel 158

I 2014 kostede en Filur 9 kr.

Hvad kostede en Filur i 1973?

Når vi omregner værdier i en tabel til indekstal, dividerer vi alle værdierne i tabellen igen-nem med værdien i basisåret og ganger med 100. Dette kan vi udnytte til at skifte basisår i en forelagt tabel med indekstal. Vi dividerer alle indekstallene med indekstallet for det nye basisår og ganger op med 100. Denne lille operation er nyttig, når vi skal sammenligne udviklinger beskrevet ved indekstal.

Øvelse 155

Tabellen nedenfor viser SU-grundsatsen for hjemmeboende 18-19 årige, som er i gang med en ungdomsuddannelse

År	2010	2011	2012	2013	2014
Mdr. SU i kr	1192	1215	1254	1274	1307

Tabel 159

a. Omregn tabellens data til indekstal med basisår 2012.

I den samme periode udviklede prisindekset for fastfood sig, som det fremgår af tabel 160.

År	2010	2011	2012	2013	2014
Indekstal	90,4	93,2	96,7	99,8	100,6

Tabel 160

b. Undersøg, om det er den månedlige SU eller prisen på fastfood, der er vokset mest fra 2010 til 2014.

ISBN 9788761685704

Øvelse 156

Nedenstående tabel viser udviklingen i kursen på 2 forskellige aktier. I år 1 blev der investeret det samme beløb i hver af de to aktier.

Undersøg, hvilken af de 2 aktier der har været den bedste investering.

		År 1	År 2	År 3	År 4
Aktie 1	Kurs	47	55	64	67
	Indekstal				
Aktie 2	Kurs	515	618	680	728
	Indekstal				

Tabel 161

Øvelse 157

Befolkningen i Danmark, inddelt i forskellige aldersgrupper, har siden 1980 udviklet sig som vist i nedenstående tabel (Kilde: www.statistikbanken.dk).

Aldersgruppe	År	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010	2015
0 – 19 år	Antal	1442416	1315195	1195797	1153953	1153385	1192045	1215395	1166535
	Indekstal								
20 – 39 år	Antal	1465510	1487274	1456944	1447738	1397528	1272395	1167277	1132045
	Indekstal								
40 – 59 år	Antal	1098261	1135361	1249164	1329078	1387559	1408835	1391068	1386494
	Indekstal								
60 – 79 år	Antal	826289	850472	836312	807715	810435	871670	998337	1086707
	Indekstal								
80 – år	Antal	136631	158880	182621	198775	202951	214365	219923	230461
	Indekstal								

Tabel 162

Bestem indekstallene for befolkningsudviklingen, og kommentér udviklingen.

ISBN 9788761685704

Kapitel 2. Statistik

Vi møder tit statistik som et redskab til at beskrive et indsamlet talmateriale i form af tabeller og kurver.

Vi vil i de første afsnit fokusere på, hvordan vi bearbejder, beskriver og præsenterer et talmateriale, så det bliver nemt at overskue. Denne del af statistikken kalder vi den *deskriptive statistik*.

De data, der er indsamlet, kalder vi for *observationssættet*, og de enkelte data kalder vi *observationer*. Antallet af observationer kalder vi *observationssættets størrelse*.

Nogle gange optræder der kun et lille antal forskellige observationer, og i dette tilfælde behandler vi observationssættet som et *diskret* observationssæt eller et *ikke-grupperet* observationssæt.

Når observationerne derimod antager mange forskellige værdier, vil det være hensigtsmæssigt at gruppere observationerne i intervaller. Når vi foretager denne gruppering, behandler vi efterfølgende datasættet som et *grupperet* observationssæt.

Hvis vi f.eks. undersøger farverne på 200 pastiller i en pose M&M's, vil vi kun observere et lille antal forskellige farver, og det vil være oplagt at behandle observationssættet som diskret. Hvis vi i stedet vejer hver pastil på en god vægt, kan vi risikere at få op til 200 forskellige vægtangivelser, og det vil være nødvendigt at gruppere disse for at få et fornuftigt overblik over talmaterialet.

Når observationssættet består af tal, kan vi angive forskellige *deskriptorer*, som er talstørrelser, vi kan anvende til at beskrive observationssættet.

Nogle deskriptorer giver os information om observationssættets beliggenhed, og disse kalder vi *positionsmål*.

Andre deskriptorer giver os information om variationen i værdierne i observationssættet, og hvor spredt værdierne i observationerne er. Disse deskriptorer kalder vi *spredningsmål*.

2.1 Diskrete observationssæt

Vi starter med at behandle datasæt, hvor der forekommer et lille antal forskellige observationer. I dette tilfælde behandler vi data som *diskrete* observationssæt også kaldet *ikke-grupperede* eller *ugrupperede* observationssæt.

2.1.1 Hyppigheder og frekvenser

ISBN 9788761685704

Simple hyppigheder og frekvenser

Vi tager udgangspunkt i et konkret datasæt.

50 elever bliver bedt om at angive deres BMI (Body Mass Index) som et helt tal. Svarene fremgår af tabel 2111.

BMI									
19	20	20	20	18	21	19	19	18	18
20	19	18	19	19	20	21	19	20	20
21	20	20	20	20	20	20	20	20	20
22	18	21	19	18	21	20	19	20	19
19	20	19	20	18	21	21	19	19	21

Tabel 2111

De 50 tal i tabellen udgør *observationssættet*, og vi siger, at *observationssættets størrelse N* er 50.

De forskellige tal kalder vi for *observationer*, og det antal gange, en enkelt observation forekommer, kalder vi observationens *hyppighed*.

Tallet 19 forekommer 14 gange i tabellen, så hyppigheden af observationen 19 er 14. Det svarer til

$$\frac{14}{50} = 0{,}28 = 28\ \%$$

af tallene i tabellen. Denne procentdel kalder vi observationens *frekvens*.

Kalder vi den enkelte observation *x*, betegner

$$h(x) = \textit{hyppigheden af } x = \textit{det antal gange } x \textit{ forekommer}$$

$$f(x) = \textit{frekvensen af } x = \frac{h(x)}{N} = \textit{den tilsvarende procentdel af de } N \textit{ tal}$$

Tabel 2112 viser hyppighederne og frekvenserne for alle observationerne. Frekvenserne er angivet både som decimaltal og som almindelige procenter.

ISBN 9788761685704

BMI x	Hyppighed $h(x)$	Frekvens $f(x)$
18	7	$0,14 = 14\ \%$
19	14	$0,28 = 28\ \%$
20	20	$0,40 = 40\ \%$
21	8	$0,16 = 16\ \%$
22	1	$0,02 = 2\ \%$
Sum	$N = 50$	$1,00 = 100\ \%$

Tabel 2112

Ifølge tabellen er $h(21) = 8$ og $f(21) = 16$ %. Altså har 8 elever et BMI på 21 svarende til 16 % af eleverne.

Tabel 2112 indeholder beskrivelser af data efter fordelingen på de forskellige observationer, og disse to fordelinger kalder vi observationssættets *hyppighedsfordeling* og *frekvensfordeling*.

Øvelse 2111

Tabellen nedenfor viser målinger af pulsen hos 30 elever.

Puls									
68	60	76	68	64	80	72	76	92	68
56	72	68	60	84	72	56	88	76	80
68	80	84	64	80	72	64	68	76	72

Lav en tabel, som viser hyppighedsfordelingen og frekvensfordelingen af data.

Summerede hyppigheder og summerede frekvenser

Vi arbejder også med *summerede* hyppigheder og *summerede* frekvenser, når observationerne er tal.

ISBN 9788761685704

Den *summerede hyppighed* $H(x)$ af en observation x, er summen af hyppighederne for de observationer, der højst er x.

Til hyppighederne af BMI i tabel 2112 svarer de summerede hyppigheder

BMI x	Hyppighed $h(x)$	Sum. hyppighed $H(x)$
18	7	7
19	14	21
20	20	41
21	8	49
22	1	50

Tabel 2113

At den summerede hyppighed af 20 er 41, altså $H(20) = 41$, fortæller, at 41 af gymnasieleverne har et BMI, der højst er 20.

Den *summerede frekvens* $F(x)$ af en observation x er summen af frekvenserne for de observationer, der højst er x.

Til frekvenserne af BMI i tabel 2112 svarer de summerede frekvenser

BMI x	Frekvens $f(x)$	Sum. frekvens $F(x)$
18	0,14	0,14
19	0,28	0,42
20	0,40	0,82
21	0,16	0,98
22	0,02	1,00

Tabel 2114

I tabellen aflæser vi, at 82 % af eleverne har et BMI, der er 20 eller mindre.

ISBN 9788761685704

Eksempel 2111

Alderen på de medarbejdere, der er gået på pension i løbet af et år hos et større ingeniørfirma, fremgår af tabellen

Pensionsalder							
60	65	68	63	66	67	69	67
58	65	67	61	63	65	62	64
69	60	61	70	62	69	70	67
63	62	67	68	60	67	62	63

Tabel 2115

Vi vil bestemme hyppighedsfordelingen, frekvensfordelingen og de tilsvarende summerede fordelinger.

Først bestemmer vi hyppighedsfordelingen ved simpel optælling.

x	$h(x)$
58	1
60	3
61	2
62	4
63	4
64	1

ISBN 9788761685704

Tabel 2116 *Hyppighedsfordeling*

For at udvide tabellen med de summerede hyppigheder lægger vi hver af observationernes hyppighed sammen med de foregående observationers hyppigheder. Herved får vi tabellen

ISBN 9788761685704

x	$h(x)$	$H(x)$
58	1	1
60	3	4
61	2	6
62	4	10
63	4	14
64	1	15
65	3	18
66	1	19
67	6	25
68	2	27

ISBN 9788761685704

Tabel 2117 *Hyppighedsfordeling og summeret hyppighedsfordeling*

Da der i alt er 32 observationer, kan vi finde frekvensfordelingen ud fra hyppighedsfordelingen ved at dele alle tallene med 32. Det gør vi ligeledes for den summerede hyppighedsfordeling for at få den summerede frekvensfordeling. Disse udregninger kan vi nemmest udføre ved hjælp af formler i et regneark.

x	$h(x)$	$H(x)$	$f(x)$	$F(x)$
58	1	1	0,03125	0,03125
60	3	4	0,09375	0,12500
61	2	6	0,06250	0,18750
62	4	10	0,12500	0,31250
63	4	14	0,12500	0,43750
64	1	15	0,03125	0,46875
65	3	18	0,09375	0,56250
66	1	19	0,03125	0,59375
67	6	25	0,18750	0,78125
68	2	27	0,06250	0,84375
69	3	30	0,09375	0,93750
70	2	32	0,06250	1,00000

Tabel 2118

Af tabellen kan vi aflæse, at 56,25 % dvs. ca. 56 % af de pensionerede var 65 år eller yngre, og at den ældste fjerdedel af de pensionerede var mindst 67 år.

ISBN 9788761685704

Øvelse 2112

Bestem de summerede frekvenser for datasættet givet ved hyppighedsfordelingen

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$h(x)$	1	1	2	3	3	2	2	1

Øvelse 2113

Tabellen viser de summerede hyppigheder for et datasæt

x	5	10	15	20	25	30
$H(x)$	3	7	13	17	19	20

Bestem hyppighedsfordelingen og frekvensfordelingen for datasættet.

2.1.2 Grafiske repræsentationer

Cirkeldiagram

En hyppigt anvendt illustration af en procentvis fordeling, dvs. en frekvensfordeling, er et cirkeldiagram.

Vi ser igen på BMI af de 50 elever. Hyppighedsfordeling og frekvensfordeling fremgår af tabellen nedenfor

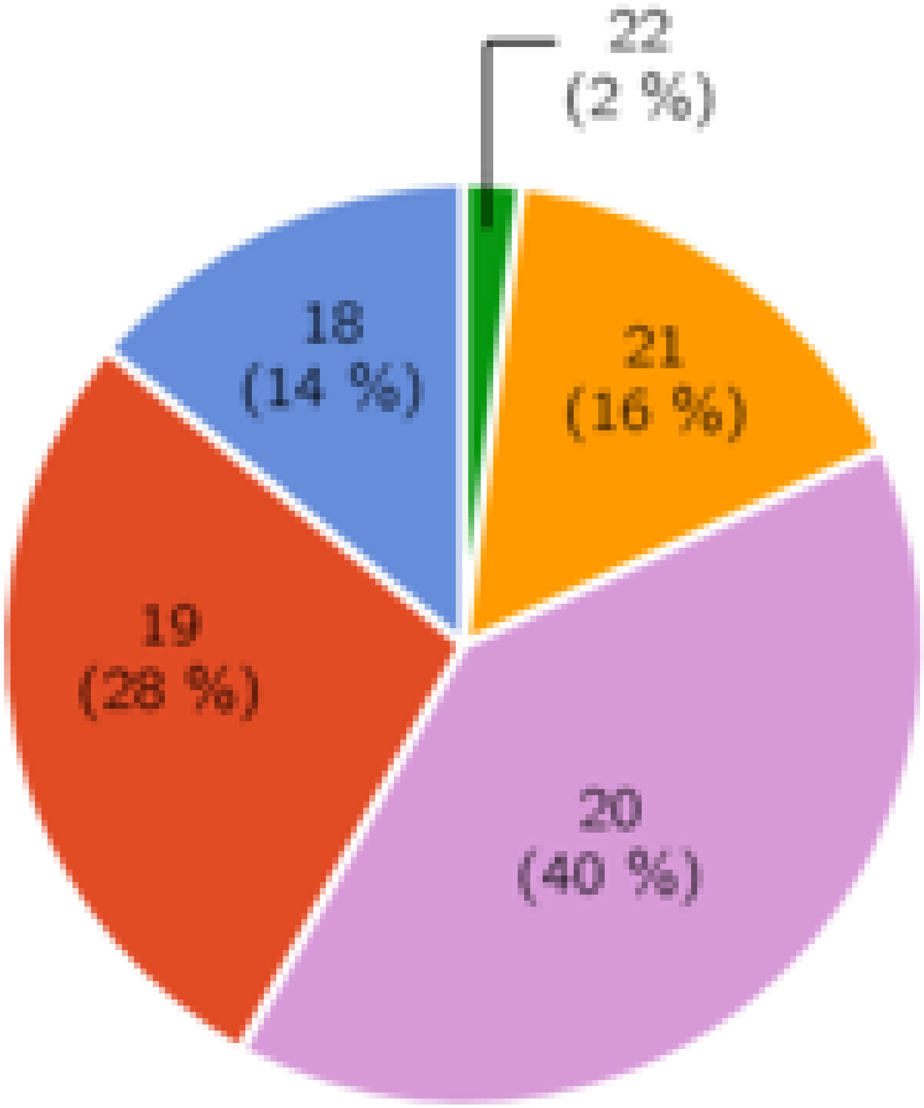
x	18	19	20	21	22
$h(x)$	7	14	20	8	1
$f(x)$	0,14	0,28	0,40	0,16	0,02

Tabel 2121

ISBN 9788761685704

I cirkeldiagrammet er der lige så mange dele som antallet af observationer, og arealerne af delene er et mål for observationernes hyppighed eller frekvens.

Figur 2121 viser et cirkeldiagram for BMI.



Figur 2121 *Cirkeldiagram med observationer og deres frekvenser i %. For at have et cirkeldiagram med hyppigheder skal vi blot erstatte tallene i % med de tilsvarende hyppigheder.*

ISBN 9788761685704

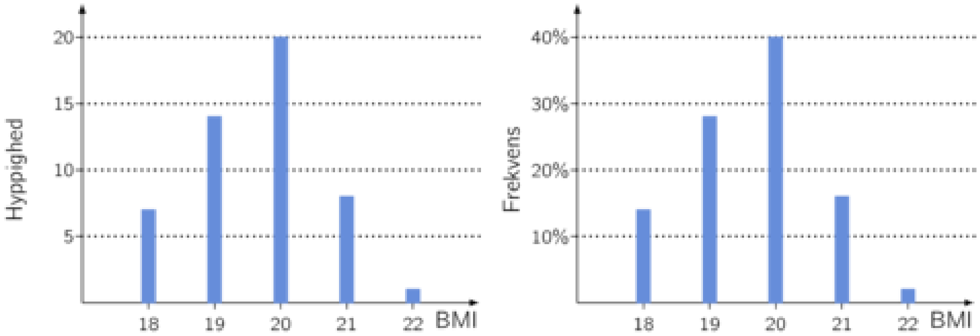
Pindediagrammer

Til at anskueliggøre et observationssæts hyppighedsfordeling og frekvensfordeling vælger vi oftest et *pindediagram*, som vi også kalder et *stolpediagram*.

For at tegne et pindediagram, som illustrerer hyppighedsfordelingen (eller frekvensfordelingen) for et observationssæt, afsætter vi først observationerne på en vandret akse, og i hver observation anbringer vi en pind dvs. et tyndt rektangel, hvis højde svarer til observationens hyppighed (eller frekvens).

Pindediagrammerne for hyppighedsfordelingen og frekvensfordelingen har helt samme udseende. Den eneste forskel på diagrammerne er enheden på den lodrette akse.

Pindediagrammer svarende til hyppighederne og frekvenserne af BMI i tabel 2121 er vist i figur 2122.



Figur 2122

Øvelse 2121

Tegn pindediagrammet for nedenstående observationssæt

Observation	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Hyppighed	2	1	2	4	3	9	10	8	1

Øvelse 2122

Tabellen nedenfor viser frekvensfordelingen for et observationssæt.

Observation	1	2	3	4	5	6	7
Frekvens	0,07	0,14	0,12	0,25	0,24	0,15	0,03

Tegn et pindediagram for frekvensfordelingen.

ISBN 9788761685704

Trappediagram

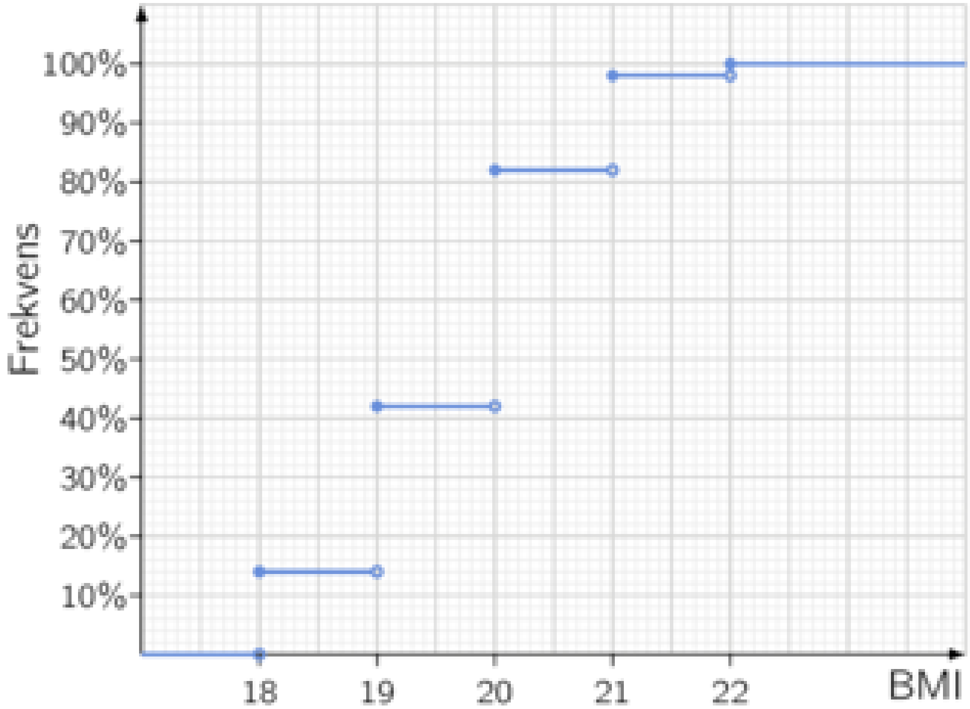
Trappediagrammer anvender vi til at illustrere summerede hyppigheder og summerede frekvenser.

Igen tager vi udgangspunkt i 50 elevers BMI, hvis summerede frekvensfordeling fremgår af tabel 2122.

x	18	19	20	21	22
$F(x)$	0,14	0,42	0,82	0,98	1,00

Tabel 2122

Det tilhørende trappediagram er vist i figur 2123.



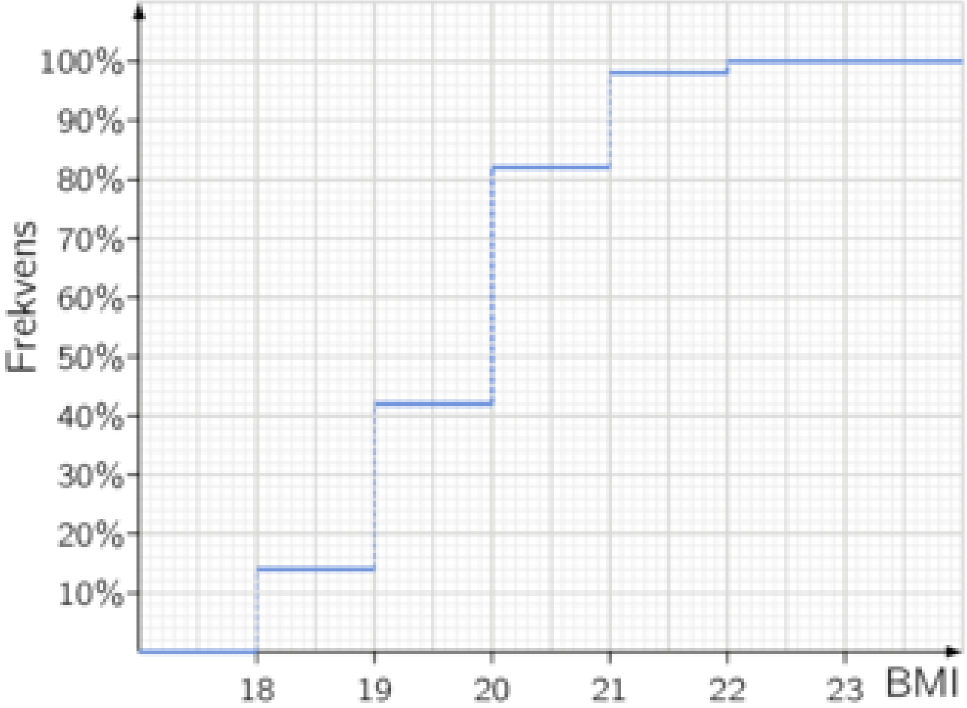
Figur 2123

I trappediagrammet har vi afsat observationerne på den vandrette akse og frekvenserne på den lodrette akse. Trappetrinnene går fra en observation til den næste og er placeret i en højde, som svarer til den første observations summerede frekvens. Trappetrinnenes højde

ISBN 9788761685704

er den samme som højden på de tilsvarende pinde i pindediagrammet. Før den første observation og ud fra den sidste observation afsætter vi i stedet en halvlinje.

For at lette aflæsninger i trappediagrammet, forbinder vi trappetrinnene med stiplede linjer, og tegner trappediagrammet som vist i figur 2124.



Figur 2124

Ønsker vi i stedet trappediagrammet for den summerede hyppighed, vælger vi blot en anden inddeling af den lodrette akse. Selve trappediagrammet har det samme udseende.

Øvelse 2123

Den summerede frekvensfordeling for et observationssæt fremgår af tabellen

x	10	15	20	25	30	35	40
F(x)	0,12	0,20	0,36	0,56	0,80	0,88	1,00

Tegn trappediagrammet for den summerede frekvensfordeling.

ISBN 9788761685704

Øvelse 2124

Antallet af tændstikker i 50 tændstiksæsker fremgår af tabellen

Antal tændstikker	48	49	50	51	52
Antal æsker	3	10	18	12	7

Bestem den summerede frekvensfordeling, og tegn trappediagrammet for denne.

2.1.3 Positionsmål

Vi ser nu på *positionsmålene* for diskrete observationssæt eksemplificeret ved de 50 elevers BMI, hvis hyppighedsfordeling og frekvensfordeling er

x	18	19	20	21	22
$h(x)$	7	14	20	8	1
$f(x)$	0,14	0,28	0,40	0,16	0,02

Tabel 2131

Typetal

Den observation, som har den *største* hyppighed (eller *største* frekvens), kalder vi *typetallet*, og i vort eksempel er det BMI-tallet 20.

Typetallet svarer grafisk til den højeste pind i pindediagrammet, det største stykke i lagkagediagrammet og det største trin i trappediagrammet.

Et observationssæt kan godt have flere typetal.

Gennemsnit (middeltal)

Gennemsnittet eller *middeltallet* for observationssættet betegner vi med $\overline{x}$, og vi beregner det ud fra hyppighederne

$$\overline{x} = \frac{7 \cdot 18 + 14 \cdot 19 + 20 \cdot 20 + 8 \cdot 21 + 1 \cdot 22}{50} = 19{,}6 \qquad (2131)$$

ISBN 9788761685704

Gennemsnittet svarer til det gennemsnitlige BMI. Dette kan vi også beregne ved hjælp af frekvenserne, idet vi kan omforme ligning (2131) til

$$\begin{aligned}\overline{x} &= 18\cdot\frac{7}{50}+19\cdot\frac{14}{50}+20\cdot\frac{20}{50}+21\cdot\frac{8}{50}+22\cdot\frac{1}{50}\\ &= 18\cdot f(18)+19\cdot f(19)+20\cdot f(20)+21\cdot f(21)+22\cdot f(22)\end{aligned} \tag{2132}$$

Det sidste udtryk er en sum af led, som alle er på den samme form, nemlig $x \cdot f(x)$, og vi har indført en forenklet skrivemåde for denne type summer.

Vi anvender sumtegnet $\sum$ (det græske bogstav "stort sigma"), og med denne symbolik kan vi skrive (2132) som

$$\overline{x} = \sum x\cdot f(x) \tag{2133}$$

Da

$$f(x) = \frac{h(x)}{N}$$

kan vi også beregne $\overline{x}$ ud fra hyppighederne ved hjælp af formlen

$$\overline{x} = \sum x\cdot\frac{h(x)}{N} = \frac{\sum x\cdot h(x)}{N} \tag{2134}$$

hvor N er observationssættets størrelse.

ISBN 9788761685704

Eksempel 2131

En virksomhed med 40 medarbejdere har gennem det sidste halvår registreret antallet af sygedage hos deres medarbejdere. Resultatet fremgår af tabellen nedenfor.

Antal sygedage	2	3	4	5	6	7	8
Hyppighed	3	9	11	8	5	2	2

Tabel 2132

Typetallet er 4, svarende til 4 sygedage, og gennemsnittet beregner vi ved brug af ligning (2134)

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{\sum x \cdot h(x)}{N} \\ &= \frac{2\cdot 3 + 3\cdot 9 + 4\cdot 11 + 5\cdot 8 + 6\cdot 5 + 7\cdot 2 + 8\cdot 2}{40} \\ &= 4{,}4\end{aligned}$$

Øvelse 2131

Stuefluer har normalt en levetid på mellem 4 og 14 dage. Tabellen nedenfor viser levetiden af 50 stuefluer.

Levetid (dage)	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Antal fluer	3	2	5	4	7	5	10	6	2	5	1

Bestem stuefluernes gennemsnitlige levetid.

Kvartiler

Til at beskrive fordeling af diskrete data benytter vi også de tre tal, som vi kalder *kvartilsættet*. Dette består af *medianen m*, *nedre kvartil* Q_1 og *øvre kvartil* Q_3.

Vi vil her beskrive kvartilerne ved at hjælp af summerede frekvenser. De tre kvartiler er

$$\begin{array}{ll}\text{nedre kvartil } Q_1: & \text{den mindste observation, hvis summerede frekvens er mindst 25 \%} \\ \text{median } m: & \text{den mindste observation, hvis summerede frekvens er mindst 50 \%} \\ \text{øvre kvartil } Q_3: & \text{den mindste observation, hvis summerede frekvens er mindst 75 \%}\end{array}$$

ISBN 9788761685704

Medianen m kalder vi også 50 %-*kvartilen* eller 50 %-*fraktilen*. Den fortæller os, at halvdelen (50 %) af observationerne højst er m.

Den nedre kvartil Q_1 kalder vi også 25 %-*kvartilen* eller 25 %-*fraktilen*. Den mindste fjerdedel af observationerne er således højst Q_1.

Den øvre kvartil Q_3 kalder vi også 75 %-*kvartilen* eller 75 %-*fraktilen*. I observationssættet er 75 % af observationerne højst Q_3, mens de resterende 25 % af observationerne er mindst Q_3.

ISBN 9788761685704

Eksempel 2132

Tabel 2133, viser den summerede frekvensfordeling af vægten i gram af nogle rotteunger.

Vægt (g)	21	22	23	24	25	26	27	28	29
Summeret frekvens i %	3	10	22	39	57	76	91	98	100

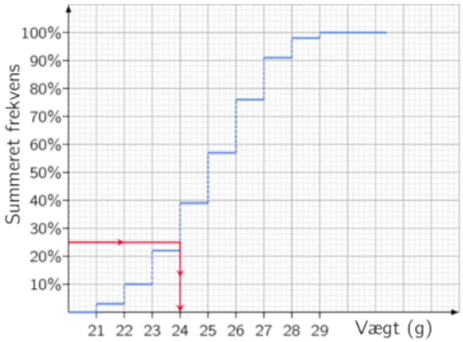
Tabel 2133

Af tabellen aflæser vi, at den summerede frekvens overstiger 25 % første gang ved observationen 24. Den nedre kvartil er derfor 24.

Tilsvarende overstiger den summerede frekvens 50 % første gang ved observationen 25 og overstiger 75 % første gang ved observationen 26.

Medianen er så 25, og den øvre kvartil er 26.

Vi kan også aflæse kvartilerne ud fra trappediagrammet. For at aflæse nedre kvartil tegner vi en vandret linje ud fra 25 % på den lodrette akse. Dér hvor linjen rammer trappediagrammet *første* gang, aflæser vi den tilhørende observation på den vandrette akse.



Figur 2133

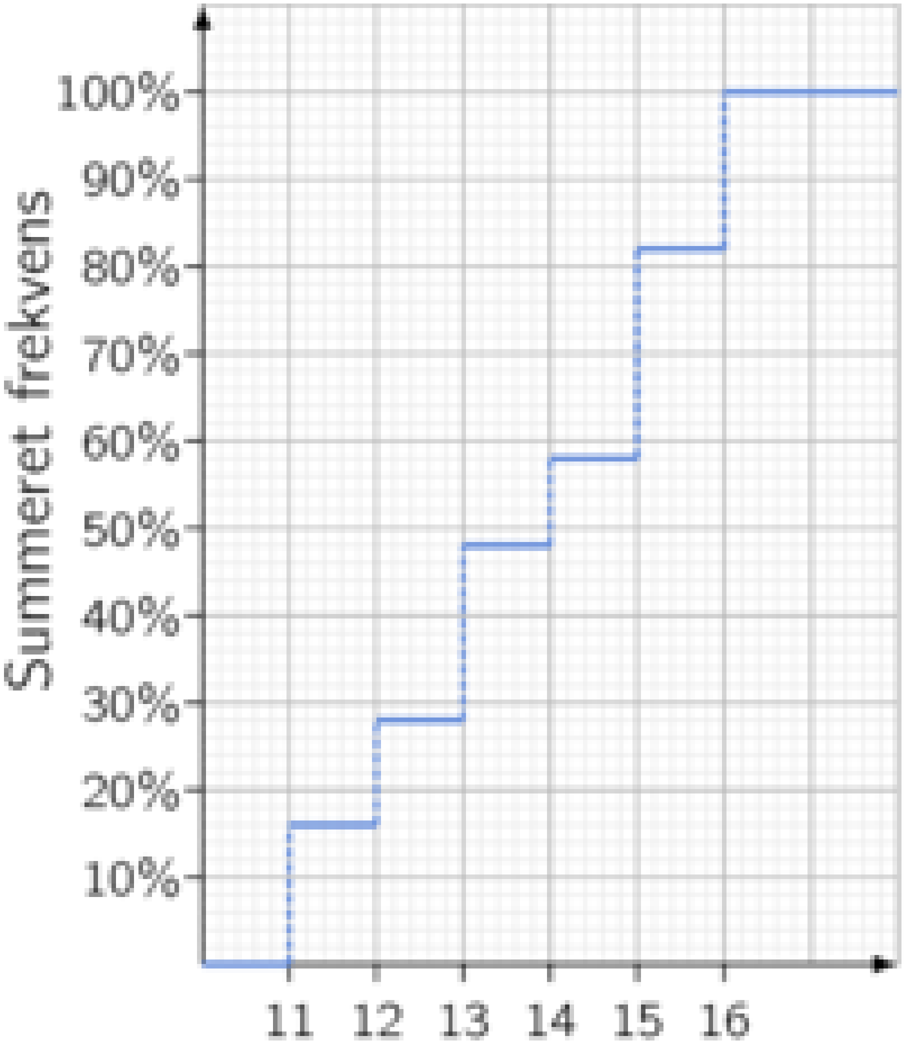
Aflæsning af nedre kvartil (25 %-kvartil)

Aflæsningen giver 24, og således får vi den samme nedre kvartil, som vi fandt ved direkte aflæsning i tabel 2133.

ISBN 9788761685704

Øvelse 2133

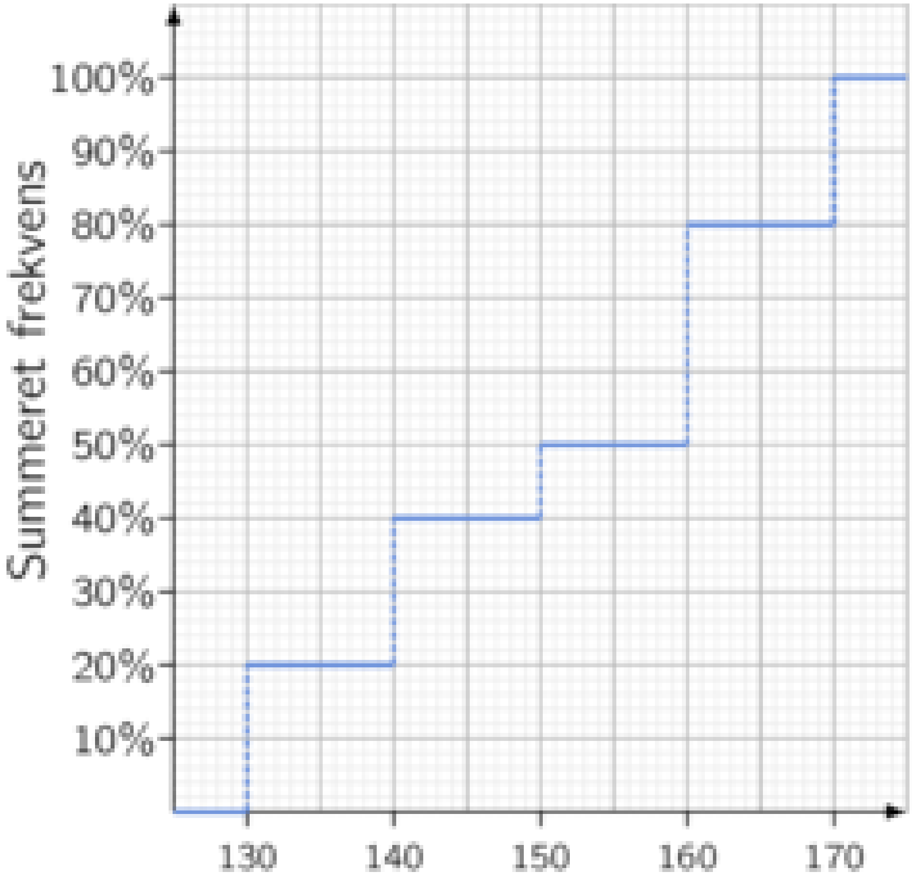
Aflæs kvartilsættet ud fra trappediagrammet



ISBN 9788761685704

Øvelse 2134

Aflæs kvartilsættet ud fra trappediagrammet



Fraktiler

Medianen, nedre kvartil og øvre kvartil er tre udvalgte fraktiler.

Generelt er α %- *fraktilen*, som vi betegner med $x_{\alpha\,\%}$, fastlagt ved

$$x_{\alpha\,\%}: \quad \text{den mindste observation, hvis summerede frekvens er mindst } \alpha\ \%$$

ISBN 9788761685704

Ligesom ved bestemmelse af kvartilerne, kan vi bestemme fraktiler for et observationssæt ved direkte aflæsning i en tabel med de summerede frekvenser eller ved aflæsning på trappediagrammet.

Eksempel 2133

For observationssættet med den summmerede frekvensfordeling

x	8	10	12	14	16	18	20
$F(x)$	0,07	0,20	0,35	0,56	0,82	0,93	1,00

Tabel 2134

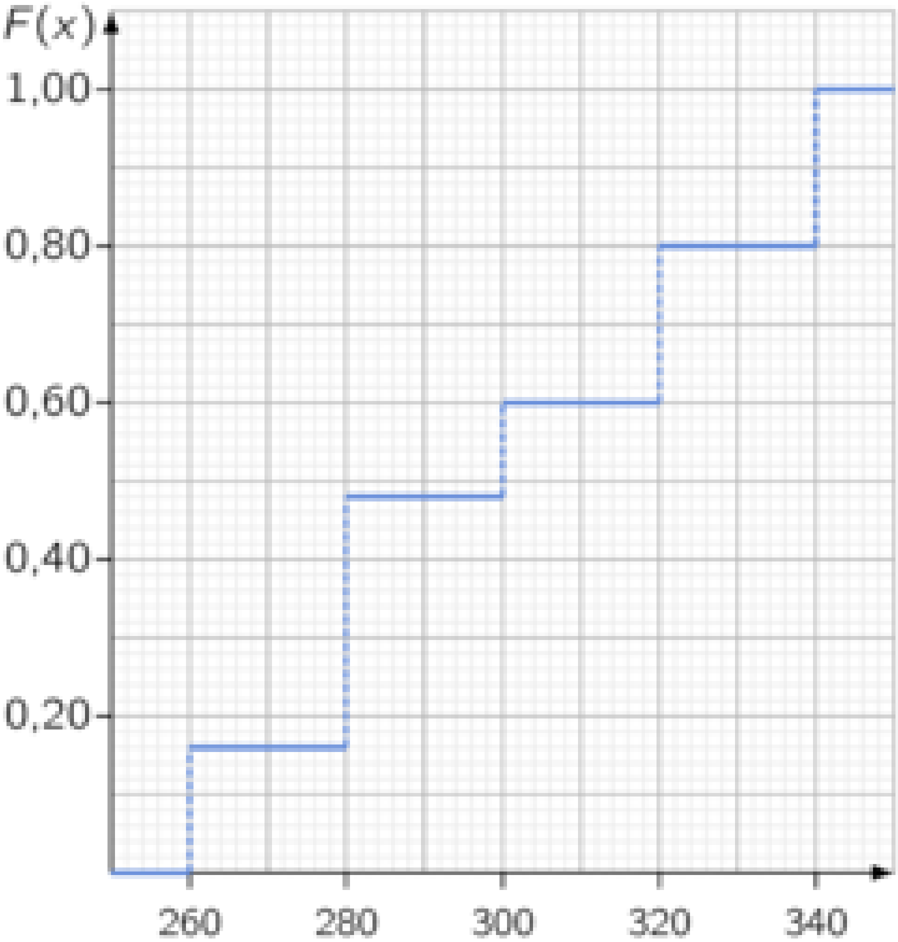
er

$$x_{15\,\%} = 10$$
$$x_{90\,\%} = 18$$

ISBN 9788761685704

Eksempel 2134

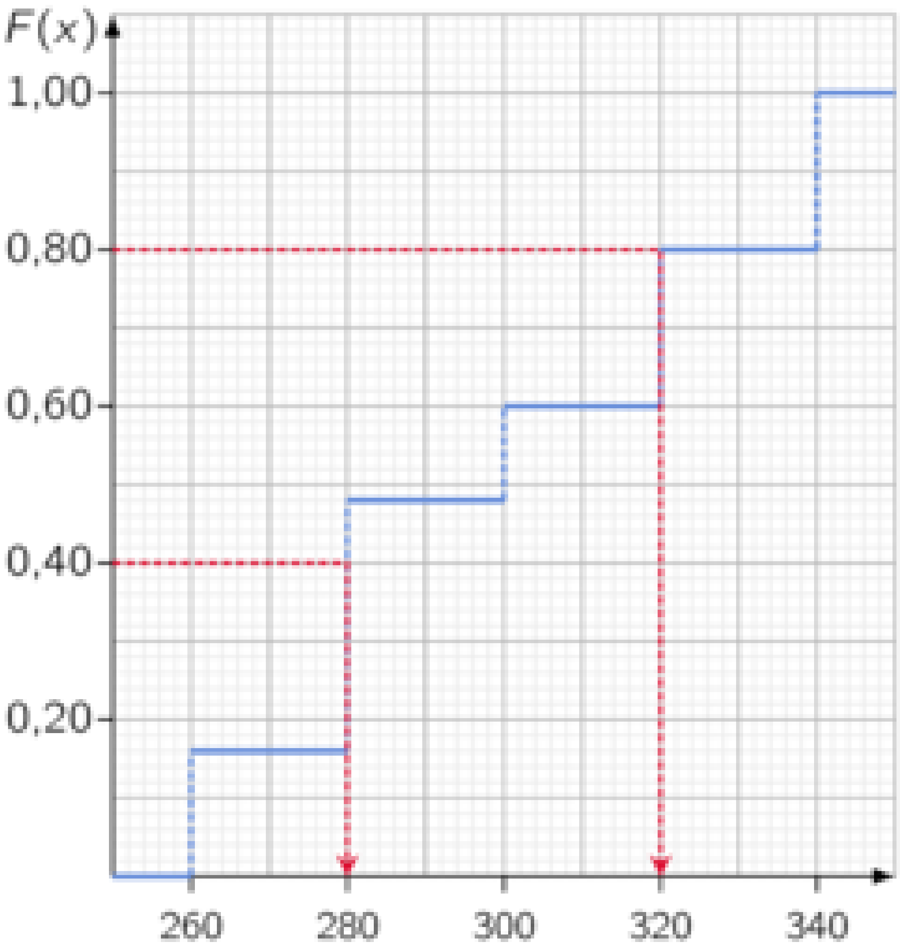
For observationssættet med trappediagrammet



Figur 2134

finder vi 40 %-fraktilen og 80 %-fraktilen ved aflæsning ud fra 0,40 og 0,80 på den lodrette akse.

ISBN 9788761685704



Figur 2135

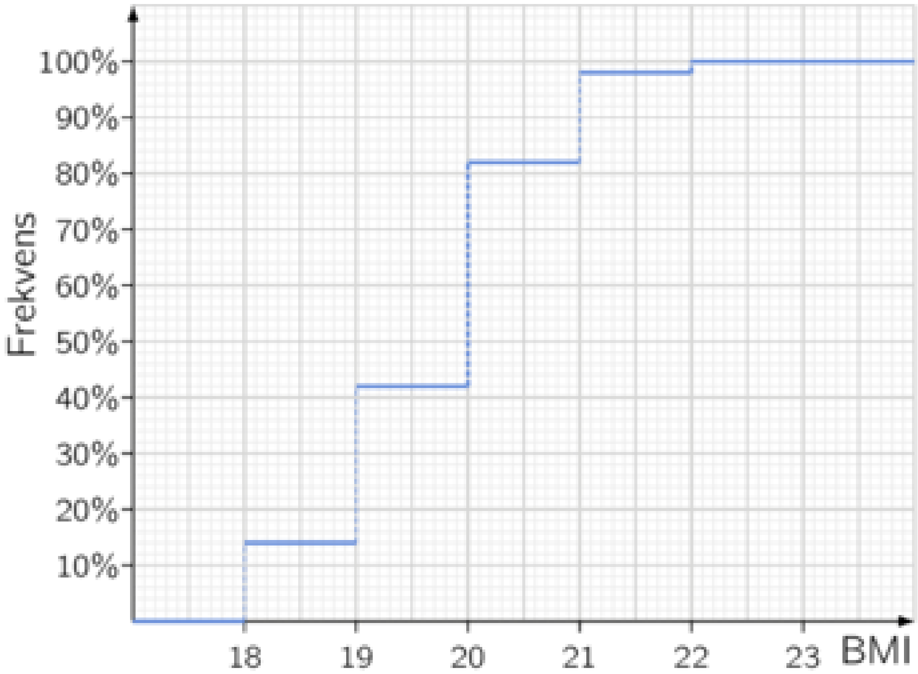
Vi finder herved

$$x_{40\,\%} = 280$$
$$x_{80\,\%} = 320$$

ISBN 9788761685704

Øvelse 2135

Trappediagrammet nedenfor viser 50 elevers BMI



figur

Bestem 20 %-fraktilen og 60 %-fraktilen ud fra trappediagrammet.

2.1.4 Spredningsmål

Variationsbredde

Variationsbredden er forskellen mellem den største observation og den mindste observation.

I eksemplet med 50 elevers BMI (se f.eks. tabel 2112 (se side 89)) er det mindste BMI 18 og det største 22, som giver os variationsbredden 22−18 = 4.

I eksempel 2111 (se side 92) er variationsbredden 12.

Kvartilafstand

Kvartilafstanden er forskellen mellem den øvre kvartil Q_3 og den nedre kvartil Q_1, dvs.

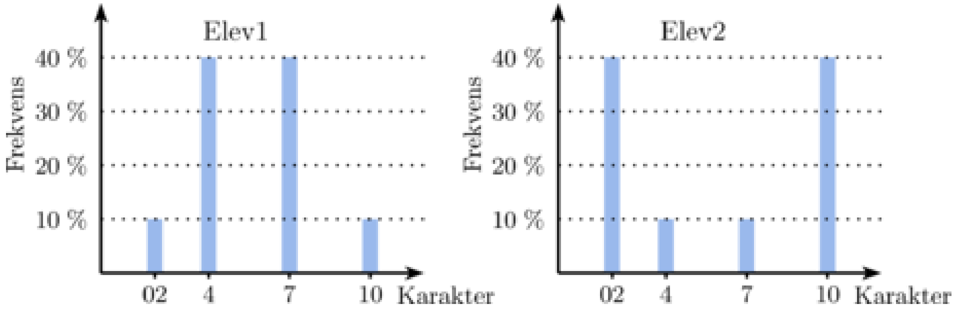
$$Q_3 - Q_1$$

For vægten af rotteunger i Eksempel 2132 (se side 106) fandt vi $Q_1 = 24$ og $Q_3 = 26$, så kvartilafstanden er $26-24 = 2$.

De næste to spredningsmål findes i to lidt forskellige udgaver med forskellige navne, og betegnelsen er afhængig af, om observationssættet er resultatet af en stikprøve, eller om vi har samtlige data til rådighed. Denne skelnen vil vi ikke arbejde med her, fordi forskellen på de tilhørende talstørrelser er ganske lille.

Varians og stadardafvigelse

To elever Elev1 og Elev2 sammenligner karakterer. Frekvensfordelingerne for de to elevers karakterer er vist på figur 2141.



Figur 2141
Udregner vi middeltallene, dvs. elevernes gennemsnit, finder vi

$$\overline{x}_{\text{Elev1}} = 5{,}6 \qquad \overline{x}_{\text{Elev2}} = 5{,}9$$

De to elevers gennemsnit ligger tæt på hinanden, men deres resultater er ret forskellige. Elev2 har mange karakterer, der ligger langt fra gennemsnittet på 5,9, mens Elev1's karakterer ligger tættere omkring gennemsnittet på 5,6. Elev2's karakterer ligger mere spredt end Elev1's.

Det spredningsmål, vi benytter til at beskrive denne forskel, kalder vi *standardafvigelsen* og betegner den med s. For at beregne standardafvigelsen s beregner vi først en størrelse, som vi kalder *variansen*, som vi betegner s^2.

Variansen er givet ved formlen

$$s^2 = \sum (x - \overline{x})^2 \cdot f(x)$$

Standardafvigelsen s beregner vi som kvadratroden af s^2, dvs.

$$s = \sqrt{s^2}$$

Standardafvigelsen er et mål for de enkelte observationers gennemsnitlige afvigelse fra middelværdien.

Vi beregner nu standardafvigelsen for de to karakterfordelinger i vort eksempel med de to elever.

Først finder vi varianserne ${s_1}^2$ og ${s_2}^2$

$$\begin{aligned} s_1^2 &= (2-5{,}6)^2 \cdot 0{,}1 + (4-5{,}6)^2 \cdot 0{,}4 + (7-5{,}6)^2 \cdot 0{,}4 + (10-5{,}6)^2 \cdot 0{,}1 \\ &= 5{,}04 \\ s_2^2 &= (2-5{,}9)^2 \cdot 0{,}4 + (4-5{,}9)^2 \cdot 0{,}1 + (7-5{,}9)^2 \cdot 0{,}1 + (10-5{,}9)^2 \cdot 0{,}4 \\ &= 13{,}29 \end{aligned}$$

De to standardafvigelser bliver dermed

$$s_1 = \sqrt{s_1^2} = \sqrt{5{,}04} = 2{,}24 \qquad s_2 = \sqrt{s_2^2} = \sqrt{13{,}29} = 3{,}65$$

For Elev1's karakterer er standardafvigelsen 2,24, mens standardafvigelsen for Elev2's karakterer er 3,65. Denne forskel afslører forskellen på de to elevers karakterfordelinger.

Øvelse 2141

Et observationssæt har følgende frekvensfordeling

x	5	6	8	9
$f(x)$	$0,4$	$0,1$	$0,1$	$0,4$

Beregn middeltallet, variansen og standardafvigelsen for observationssættet.

2.2 Grupperede observationssæt

Hvis vort observationssæt indeholder mange forskellige data, vil vi ofte gruppere data. Ved en gruppering foretager vi en generalisering for at gøre datasættet mere overskueligt. Dette sker på bekostning af de enkelte data, så vi taber information. Til gengæld vinder vi overblik.

2.2.1 Hyppigheder og frekvenser

Intervalhyppigheder og intervalfrekvenser

Vi vil tage udgangspunkt i det følgende konkrete observationssæt. En gruppe kvinder har bestemt deres BMI til følgende værdier

21,5	20,6	22,0	20,9	21,6	21,4	22,7	22,8	18,9	19,7	21,1	21,4
21,1	19,5	20,4	22,8	23,6	20,8	21,2	22,0	22,0	21,3	21,3	18,7
20,2	22,9	23,3	20,7	21,7	22,0	22,0	21,5	22,2	20,7	20,6	22,6
23,4	23,6	19,7	20,4	19,8	22,8	18,8	19,5	23,8	19,6	22,7	20,0
22,5	22,0	19,5	20,2	21,4	20,8	22,0	22,4	19,5	19,6	23,1	20,7
21,0	21,9	23,5	21,0	21,4	19,6	20,4	22,0	20,8	22,2	20,1	18,2
20,5	22,4	20,0	21,8	22,5	21,4	22,0	22,9	21,7	20,9	20,7	23,2
20,7	21,9	21,5	20,2	21,3	21,6	20,3	22,6	20,9	20,6	18,2	21,9
21,5	23,4	21,6	19,4	19,9	21,1	22,7	20,0	21,9	21,4	19,7	23,1
21,1	20,8	20,7	22,5	20,9	21,6	22,4	20,6	23,2	19,8	21,5	23,4
21,4	20,9	19,4	20,9	19,5	19,1	21,7	20,5	20,2	23,4	21,4	22,2
22,3	22,0	20,9	20,0	20,6	21,2	19,8	20,7	21,7	21,6	22,1	19,7
22,8	20,4	20,0	22,0	21,3	20,8	22,3	19,7	19,7	19,8	22,1	21,1
20,9	21,4	20,0	21,5	21,7	22,3	20,1	21,7	19,7	20,7	21,6	22,6
22,8	21,4	21,1	20,6	20,6	21,3	21,3	20,6	21,8	22,5	19,1	21,0
21,3	20,6	22,2	20,5	22,3	19,9	21,3					

Tabel 2211

Tabel 2211 indeholder 187 tal, så observationssættets størrelse er 187.

Vi vil sortere efter størrelse og gruppere data i intervaller af længde 1,0, idet vi tæller op, hvor mange tal der er i hvert interval.

Alle tal ligger mellem 18 og 24, så vi vælger det første interval som $]18{,}0; 19{,}0]$ og det sidste som $]23{,}0; 24{,}0]$. Dermed får vi altid medregnet et tal til det første interval, det kan ligge i.

F.eks. tilhører 19,0 intervallet $]18{,}0; 19{,}0]$.

Grupperingen fremgår af Tabel 2212

BMI	Antal
$]18,0;19,0]$	5
$]19,0;20,0]$	31
$]20,0;21,0]$	47
$]21,0;22,0]$	61
$]22,0;23,0]$	30
$]23,0;24,0]$	13
Sum	187

Tabel 2212

De intervaller I, som observationerne er opdelt i, kalder vi *observationsintervallerne*, og det antal observationer, der ligger i et observationsinterval, kalder vi *intervalhyppigheden*.

$$h(I) = \text{ hyppigheden af } I = \text{det antal observationer, der ligger i } I$$

Ud fra intervalhyppigheden kan vi beregne *intervalfrekvensen* som

$$f(I) = \text{frekvensen af } I = \frac{h(I)}{N} = \text{den tilsvarende procentdel af de } N \text{ observationer}$$

I vort eksempel får vi følgende intervalfrekvenser

I	$f(I)$
$]18,0; 19,0]$	2,7 %
$]19,0; 20,0]$	16,6 %
$]20,0; 21,0]$	25,1 %
$]21,0; 22,0]$	32,6 %
$]22,0; 23,0]$	16,0 %
$]23,0; 24,0]$	7,0 %
Sum	100,0 %

Tabel 2213

Øvelse 2211

Ved kontrolvejning af brød fandt man følgende resultater

Vægt i gram	Antal
560 – 580	12
580 – 600	26
600 – 620	159
620 – 640	3

Beregn intervalfrekvenserne.

Øvelse 2212

Resultatet af en undersøgelse af 32 malkekøers mælkeydelse i kg i perioden efter kælvningen er angivet nedenfor.

4132	3672	3664	4292	4881	4287	4087	4551
4140	4635	4198	3407	4644	4089	5156	5348
5436	4911	4775	5931	5040	4520	5381	4787
4717	5716	5832	4865	4811	4010	5589	5161

Gruppér materialet i intervaller af længde 400, og beregn intervalfrekvenserne.

Summerede hyppigheder og summerede frekvenser

Hvis vi spørger ind til, hvor mange af kvinderne, som har et BMI, der *højst* er 21, kan vi af hyppighederne i tabel 2212 se, at det må være

$$5 + 31 + 47 = 83$$

ISBN 9788761685704

Dette tal kalder vi den *summerede hyppighed* af 21, og vi skriver $H(21) = 83$. På samme måde kan vi finde de summerede hyppigheder, som er vist i tabel 2214.

ISBN 9788761685704

x	$H(x)$
19,0	5
20,0	36
21,0	83
22,0	144
23,0	174
24,0	187

ISBN 9788761685704

Tabel 2214

Hvis vi i stedet spørger til, hvor stor en %-del af kvinderne, der har et BMI på højst 21, kan vi benytte tabel 2213. Vi ser, at dette må være tilfældet for

$$2{,}7\ \% + 16{,}6\ \% + 25{,}1\ \% = 44{,}4\ \%$$

Dette tal kalder vi summerede frekvens af 21, og vi skriver $F(21{,}0) = 44{,}4$ %. De summerede frekvenser af de højre intervalendepunkter er vist i tabel 2215

ISBN 9788761685704

x	$F(x)$
19,0	2,7 %
20,0	19,3 %
21,0	44,4 %
22,0	77,0 %
23,0	93,0 %
24,0	100,0 %

Tabel 2215

Ved et grupperet observationssæt har vi ofte kun kendskab til observationsintervallerne og deres frekvens. Vi ved derfor ikke, hvordan de enkelte observationer fordeler sig inden for intervallerne, og derfor antager vi, at observationerne fordeler sig jævnt inden for hvert af intervallerne. Under denne forudsætning er det muligt at angive en metode til beregning af summerede frekvenser for ethvert tal x.

ISBN 9788761685704

Det er dog langt nemmere at anvende en grafisk metode, som vi behandler i Afsnit 2.2.2.

2.2.2 Grafiske repræsentationer

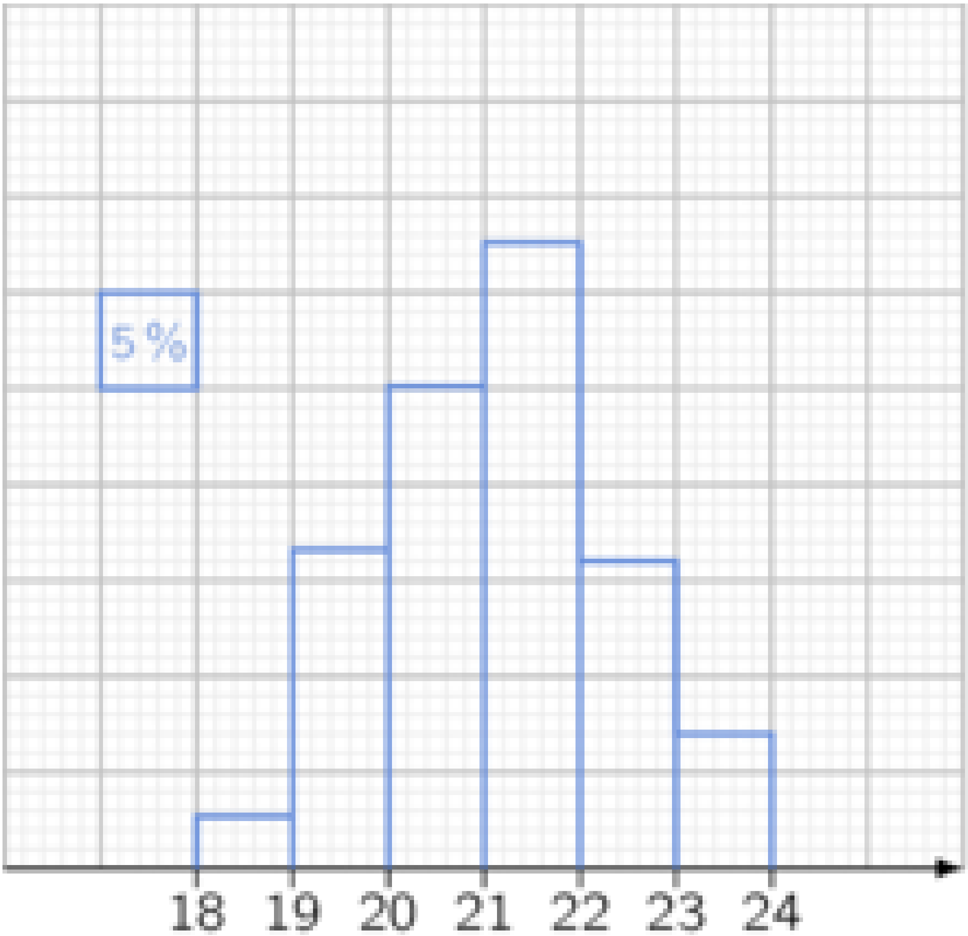
Histogrammer

Vi kan anskueliggøre intervalfrekvenserne (eller intervalhyppighederne) i et grupperet observationssæt ved at tegne et *histogram*. Et histogram kalder vi også for et *søjlediagram*.

I et histogram afsætter vi *intervalendepunkterne* ud ad x-aksen, og over hvert interval tegner vi en blok, hvis areal svarer til intervalfrekvensen (eller intervalhyppigheden). Sammenhængen mellem areal og frekvens (eller hyppighed) angiver vi i figuren. Histogrammet for intervalfrekvenser og histogrammet for intervalhyppigheder får samme udseende, og vi vil her anvende intervalfrekvenser.

Et histogram til at illustrere BMI ud fra intervalfrekvenserne i tabel 2213 (se side 117) er vist på figur 2221.

ISBN 9788761685704



Figur 2221

Øvelse 2221

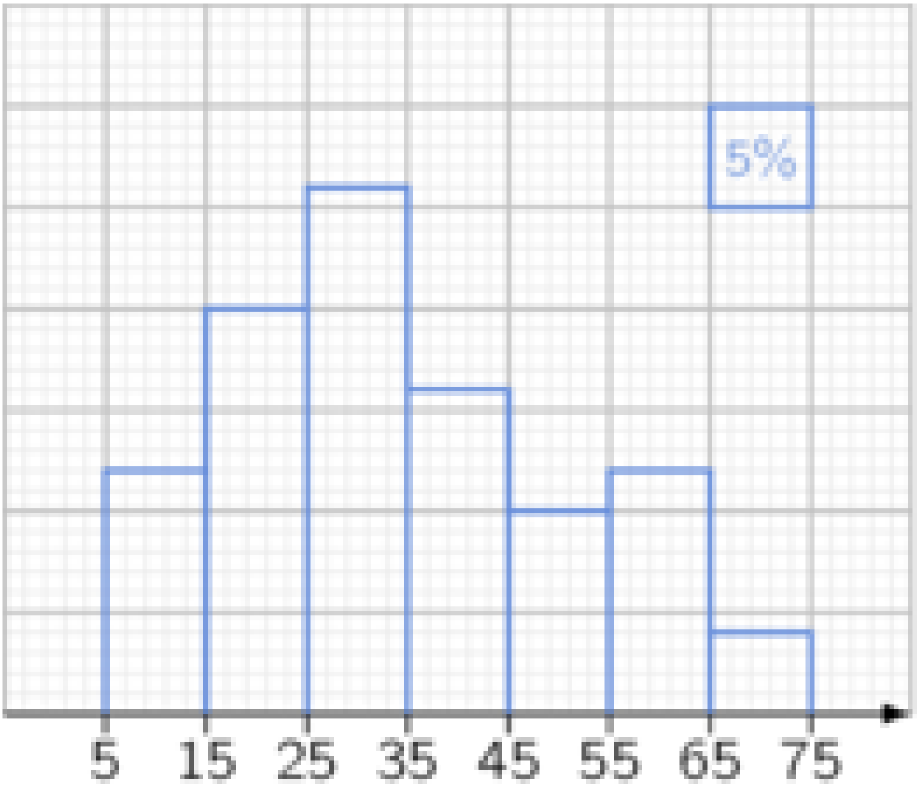
Tegn histogrammet for følgende grupperede observationssæt

I	]100 ; 110]	]110 ; 120]	]120 ; 130]	]130 ; 140]	]140 ; 150]	]150 ; 160]
f(I)	10,0 %	17,5 %	36,5 %	21,0 %	8,0 %	7,0 %

ISBN 9788761685704

Øvelse 2222

Histogrammet for et grupperet observationssæt er vist nedenfor



Opskriv de tilhørende observationsintervaller, og angiv deres frekvens.

ISBN 9788761685704

Øvelse 2223

En butikskæde har undersøgt alderen på deres ansatte. Resultatet fremgår af tabellen

Alder	Antal ansatte
20 – 29	12
30 – 39	32
40 – 49	57
50 – 59	43
60 – 69	17

Tegn et histogram, der illustrerer undersøgelsens resultat.

Sumkurver

Som udgangspunkt for tegning af *sumkurven* for et grupperet observationssæt benytter vi de summerede frekvenser i de højre intervalendepunkter i observationsintervallerne.

Vi ser igen på observationssættet med kvinders BMI. For dette har vi beregnet de summerede frekvenser, som er vist i Tabel 2221

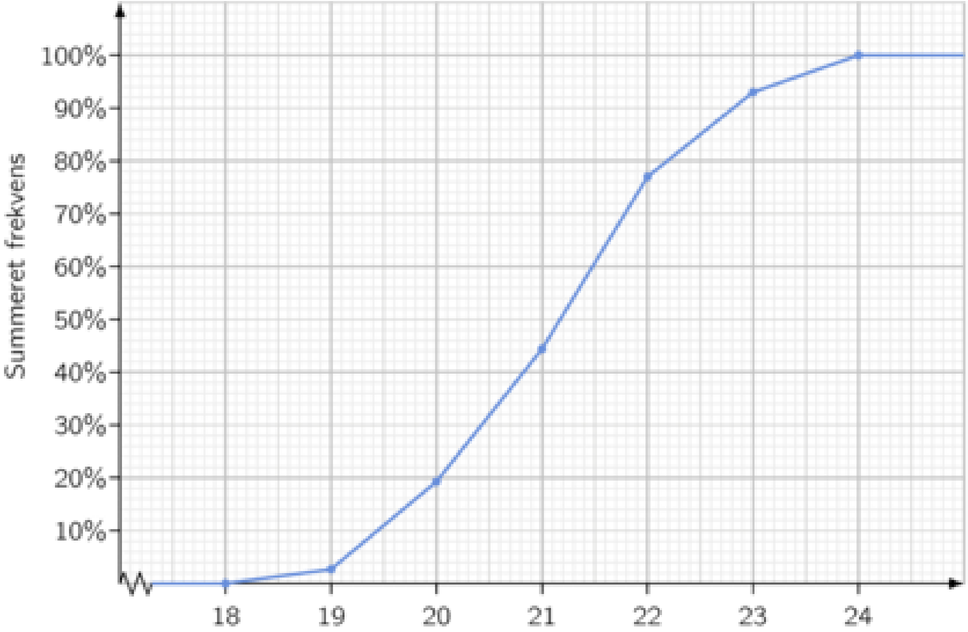
x	19,0	20,0	21,0	22,0	23,0	24,0
$F(x)$	2,7 %	19,3 %	44,4 %	77,0 %	93,0 %	100,0 %

Tabel 2221

Sumkurven tegner vi ved først at afsætte intervalendepunkterne ud ad 1. aksen (x-aksen) og de tilhørende summerede frekvenser op ad 2. aksen (y-aksen) i et koordinatsystem. Vi afsætter også 0 % i BMI = 18 og forbinder punkterne med linjestykker. At forbinde med linjestykker svarer til, at vi antager, at observationerne er jævnt fordelt inden for intervallerne.

Før det mindste intervalendepunkt tegner vi en vandret linje ved 0 %, og efter det største intervalendepunkt tegner vi en vandret linje ved 100 %.

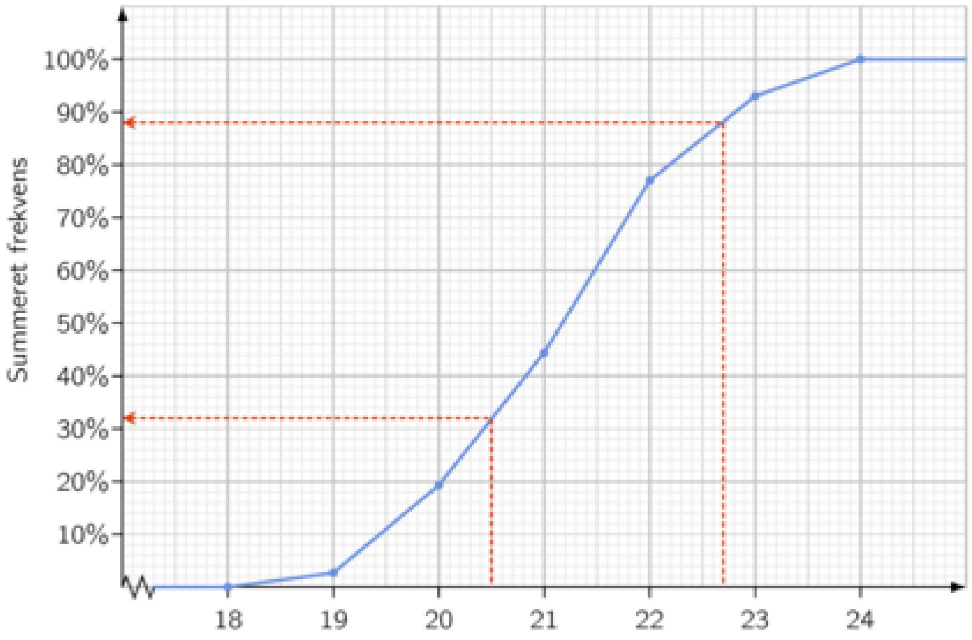
Herved får vi sumkurven på figur 2222.



Figur 2222

Vi kan nu aflæse en summeret frekvens $F(x)$ på den lodrette akse for enhver værdi af x. Af figur 2223 følger, at $F(20{,}5)$ = 32 % og $F(22{,}7)$ = 88 %.

ISBN 9788761685704



Figur 2223

Fra de to aflæsninger konkluderer vi, at 32 % af kvinderne har et BMI på højst 20,5, og at 88 % af kvinderne har et BMI, der højst er 22,7.

Øvelse 2224

Tegn sumkurven for observationssættet

I	]100 ; 110]	]110 ; 120]	]120 ; 130]	]130 ; 140]	]140 ; 150]	]150 ; 160]
f(I)	10,0 %	17,5 %	36,5 %	21,0 %	8,0 %	7,0 %

ISBN 9788761685704

Øvelse 2225

Den ugentlige produktion i en virksomhed hen over en periode på 40 uger fremgår af tabellen nedenfor

Ugentlig produktion	Antal uger
346 – 370	16
371 – 395	8
396 – 420	4
421 – 445	1
446 – 470	11

Tegn et histogram og en sumkurve for observationssættet.

2.2.3 Positionsmål

Typeinterval

Det observationsinterval, som har den *største* hyppighed (eller *største* frekvens), kalder vi *typeintervallet*.

Typeintervallet svarer grafisk til søjlen med det største areal i histogrammet. Når observationsintervallerne er lige lange, vil typeintervallet svare til den højeste søjle i histogrammet.

Et observationssæt kan godt have flere typeintervaller.

ISBN 9788761685704

Eksempel 2231

For det grupperede observationssæt med

I	]10 ; 11]	]11 ; 12]	]12 ; 13]	]13 ; 14]	]14 ; 15]	]15 ; 16]
f(I)	10,0 %	20,5 %	33,5 %	21,0 %	8,0 %	7,0 %

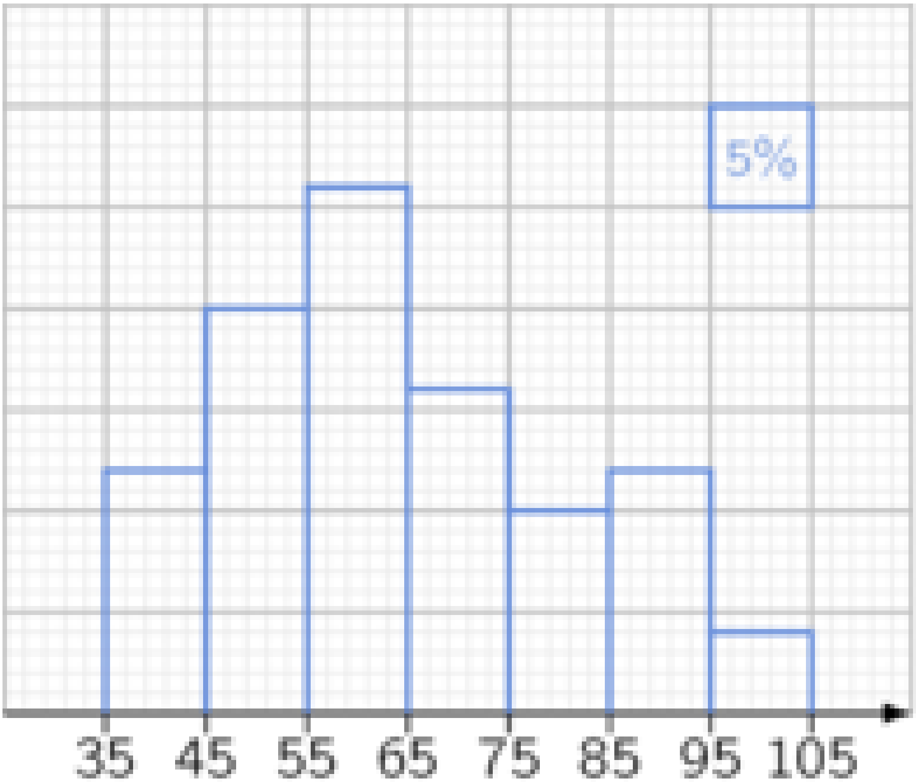
Tabel 2231

er typeintervallet $]12;\ 13]$.

ISBN 9788761685704

Eksempel 2232

I histogrammet



Figur 2231

har søjlerne samme bredde. Typeintervallet for det grupperede observationssæt er derfor $]55; 65]$.

Gennemsnit (middeltal)

Når observationerne er grupperet i intervaller, kender vi som regel ikke de enkelte observationer, men kun det interval, de tilhører. Vi regner derfor, som om observationerne ligger jævnt fordelt i intervallet, og benytter derfor midtpunktet x_{midt} af intervallet som fælles værdi for observationerne i intervallet.

ISBN 9788761685704

Formlen til beregning af *gennemsnittet (middeltallet)* er næsten "den samme" som for de ugrupperede observationssæt – dog med den forskel, at vi nu benytter intervalmidtpunkter og intervalfrekvenser.

Gennemsnittet beregner vi som

$$\overline{x} = \sum x_{midt} \cdot f(I) \qquad (2231)$$

Eksempel 2233

Ved et planteavlsforsøg målte man følgende plantehøjder

Plantehøjde i cm	Intervalfrekvens
20 – 30	5 %
30 – 40	28 %
40 – 50	42 %
50 – 60	22 %
60 – 70	3 %

Tabel 2232

Gennemsnittet $\overline{x}$ bliver

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \sum x_{midt} \cdot f(I) \\ &= 25 \cdot 0{,}05 + 35 \cdot 0{,}28 + 45 \cdot 0{,}42 + 55 \cdot 0{,}22 + 65 \cdot 0{,}03 \\ &= 44\end{aligned}$$

ISBN 9788761685704

Øvelse 2231

Dow Jones-indekset er et gennemsnit, som udregnes dagligt på baggrund af prisen på udvalgte aktier fra industriggruppen ved Fondsbørsen i New York.

Frekvensfordelingen af priserne på disse aktier en dag fremgår af tabellen

ISBN 9788761685704

Pris i $	Frekvens
0 – 10	13,3 %
10 – 20	16,7 %
20 – 30	23,3 %
30 – 40	10,0 %
40 – 50	13,3 %
50 – 60	10,0 %
60 – 70	0,0 %
70 – 80	6,7 %
80 – 90	0,0 %

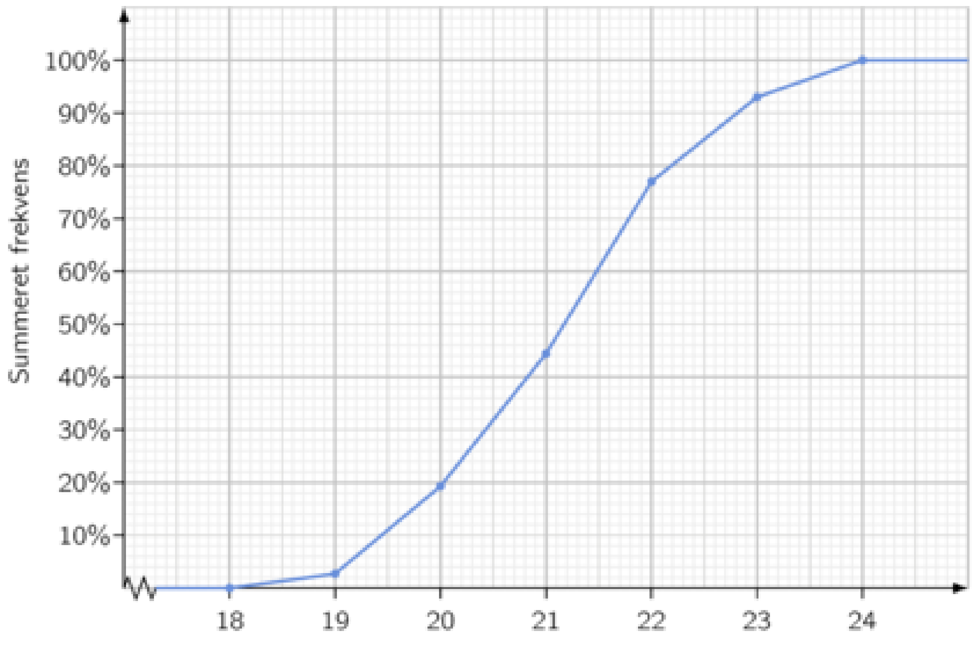
ISBN 9788761685704

Beregn det tilhørende gennemsnit.

Kvartiler

Kvartilsættet for et grupperet observationssæt består, ligesom ved diskrete observationssæt, af tre kvartiler, nemlig *nedre kvartil* Q_1 (25 % – *kvartilen*), *median m* (50 %-*kvartilen*) og *øvre kvartil* Q_3 (75 %-*kvartilen*). Kvartilerne finder vi ved aflæsning på sumkurven for observationssættet.

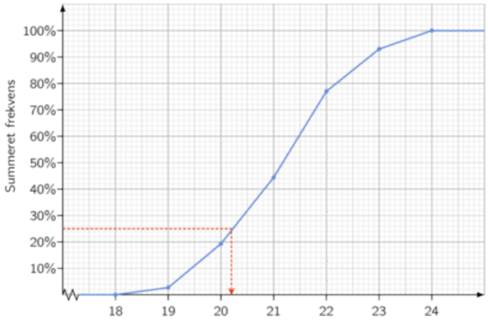
Vi betragter den tidligere tegnede sumkurve for 50 kvinders BMI, som er vist igen i figur 2232.



Figur 2232

Ved at gå op til 25 % på 2. aksen, ud til grafen og ned på 1. aksen aflæser vi 20,2, som vist på figur 2233. Dette tal er den nedre kvartil Q_1, og vi tolker dette således, at 25 % af kvinderne har et BMI på højst 20,2.

ISBN 9788761685704



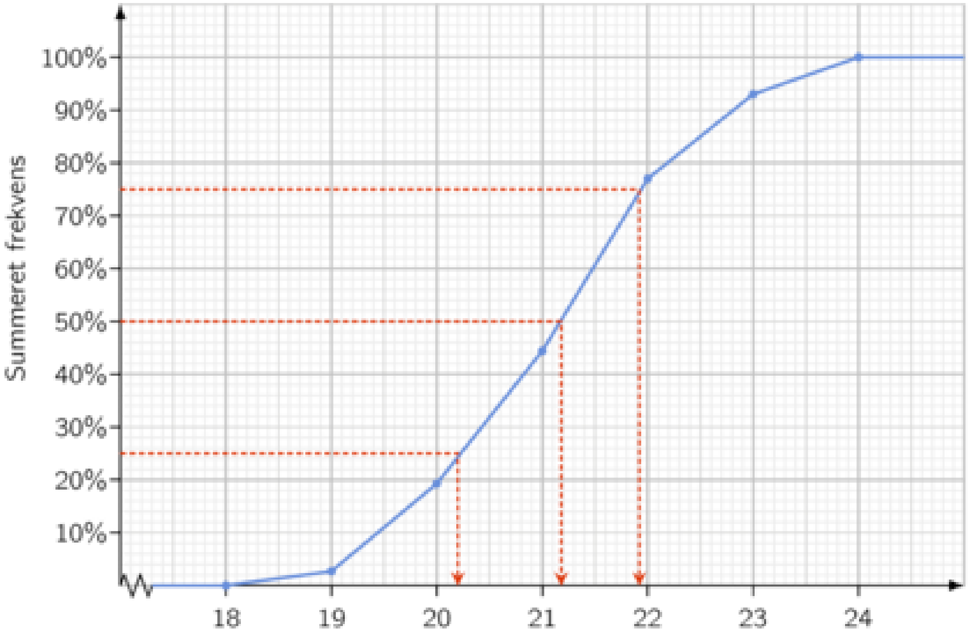
Figur 2233

Aflæsning af 1. kvartil (25 %-kvartilen)

Går vi ud fra 50 % på 2. aksen, aflæser vi på samme måde medianen på 1. aksen. Medianen *m* er 21,2, hvilket betyder, at 50 % af kvinderne har et BMI på højst 21,2.

Den øvre kvartil Q_3 aflæser vi tilsvarende ud fra 75 % til 21,9. 25 % af kvinderne har dermed et BMI på mindst 21,9.

Aflæsningen af kvartilsættet fremgår af figur 2234.



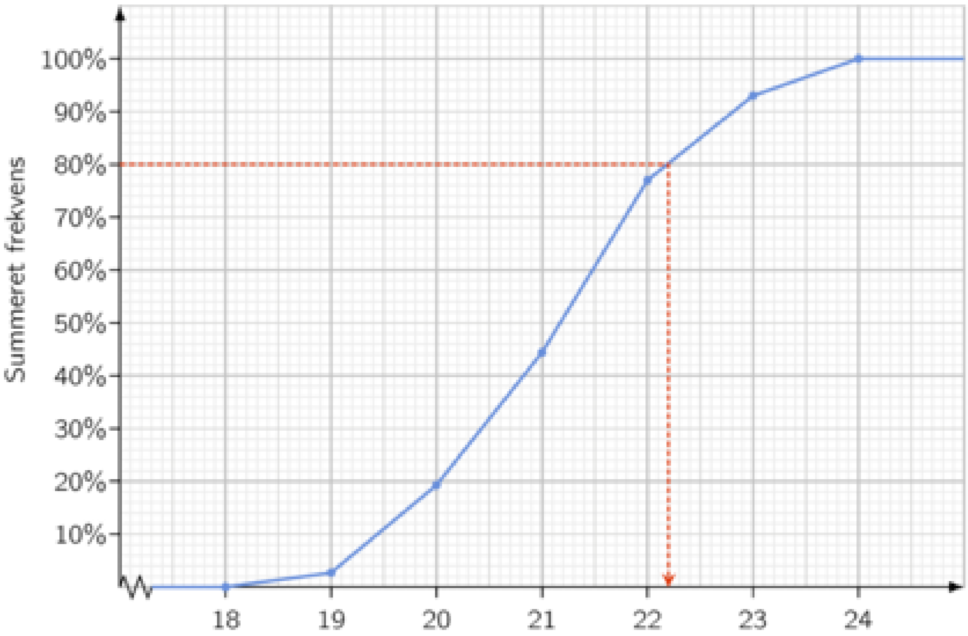
Figur 2234

Fraktiler

ISBN 9788761685704

Vi kan aflæse på denne måde ud for et vilkårligt procenttal α % mellem 0 % og 100 %. Aflæsningen kalder vi α %-fraktilen og betegner den med $x_{\alpha\,\%}$, og α-fraktilen er den mindste værdi af *x*, hvis summerede frekvens *F*(*x*) er mindst α %.

Hvis vi f.eks. vil bestemme 80 %-fraktilen, går vi op til 80 % på den lodrette akse, ud til grafen og ned på 1. aksen, hvor vi aflæser $x_{80\,\%} = 22{,}2$, se figur 2224.



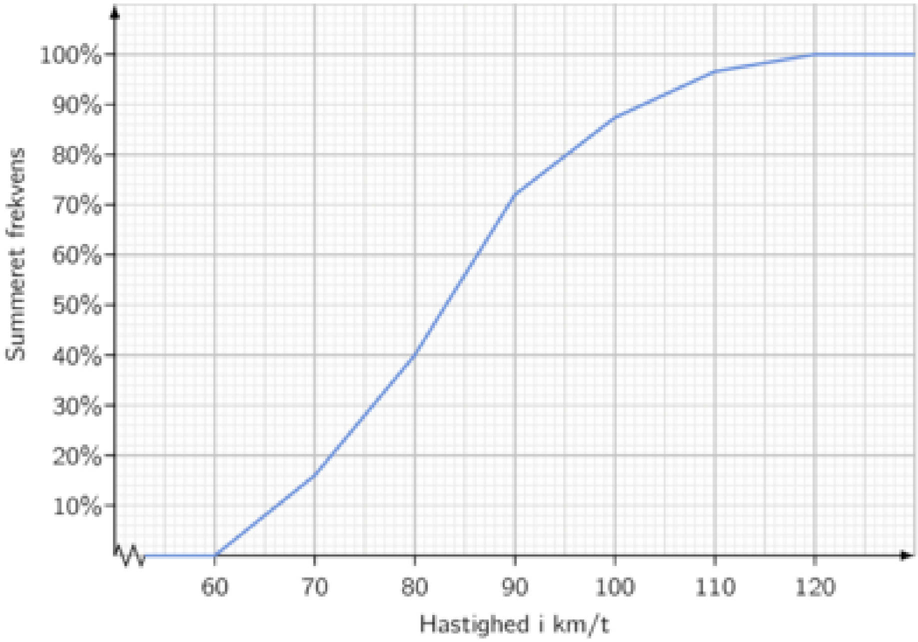
Figur 2234

Dette tal tolker vi således, at 80 % af kvinderne har et BMI på højst 22,2, og dermed har den femtedel af kvinderne, der har de største BMI, et BMI der er større end 22,2.

ISBN 9788761685704

Øvelse 2232

Sumkuven nedenfor er resultatet af en undersøgelse af bilisters hastighed på et udvalgt sted på en motortrafikvej.



Aflæs kvartilsættet, og forklar, hvad medianen fortæller om bilisternes hastighed.

Hvor hurtigt kørte den tiendedel, som kørte hurtigst?

2.2.4 Spredningsmål

Kvartilafstand

Kvartilafstanden er forskellen mellem den øvre kvartil Q_3 og den nedre kvartil Q_1, dvs.

$$Q_3 - Q_1$$

For kvinders BMI fandt vi $Q_1 = 20{,}2$ og $Q_3 = 21{,}9$, så kvartilafstanden er $21{,}9 - 20{,}2 = 1{,}7$.

Varians og standardafvigelse

Vi kan også beregne varians og standardafvigelse for grupperede observationssæt.

ISBN 9788761685704

Variansen beregner vi som

$$s^2 = \sum (x_{midt} - \overline{x})^2 \cdot f(I) \tag{2241}$$

og standardafvigelsen som

$$s = \sqrt{s^2} \tag{2242}$$

ISBN 9788761685704

Eksempel 2241

Vi vender tilbage til planteavlsforsøget med følgende plantehøjder

Plantehøjde i cm	Intervalfrekvens
20 – 30	5 %
30 – 40	28 %
40 – 50	42 %
50 – 60	22 %
60 – 70	3 %

I eksempel 2232 (se side 132) beregnede vi gennemsnittet $\overline{x} = 44$

Variansen s_2 og standardafvigelsen s bliver

$$
\begin{aligned}
s^2 &= \sum (x_{midt} - \overline{x})^2 \cdot f(I) \\
&= (25-44)^2 \cdot 0{,}05 + (35-44)^2 \cdot 0{,}28 + (45-44)^2 \cdot 0{,}42 \\
&+ (55-44)^2 \cdot 0{,}22 + (65-44)^2 \cdot 0{,}03 \\
&= 361 \cdot 0{,}05 + 81 \cdot 0{,}28 + 1 \cdot 0{,}42 + 121 \cdot 0{,}22 + 441 \cdot 0{,}03 \\
&= 81 \\
s &= \sqrt{s^2} \\
&= \sqrt{81} = 9
\end{aligned}
$$

ISBN 9788761685704

Øvelse 2241

Tabellen viser intervalfrekvenserne for et grupperet observationssæt

Interval I	0 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 100
Frekvens $f(I)$	0,15	0,19	0,23	0,19	0,24

Bestem middeltallet og standardafvigelsen for observationssættet.

Øvelse 2242

En undersøgelse af alderen på danske administrerende direktører (i år) gav følgende aldersfordeling

I	]20 ; 30]	]30 ; 40]	]40 ; 50]	]50 ; 60]	]60 ; 70]	]70 ; 80]
f(I)	1,5 %	13,5 %	36,5 %	31,5 %	16,0 %	1,0 %

a. Bestem medianen og kvartilafstanden for aldersfordelingen.
b. Bestem ligeledes gennemsnittet og standardafvigelsen for fordelingen.

2.3 Udtræk fra databaser

Når der indsamles et større observationssæt til statistisk behandling, er data ofte udtrukket fra databaser eller indsamlet ved at udtage en *repræsentativ stikprøve* blandt en større population af data. Ved en stikprøve udtager vi en mindre delmængde af observationer blandt hele mængden af data, også kaldet hele *populationen*. At en stikprøve er *repræsentativ*, betyder at stikprøven er udtaget i de rigtige forhold blandt forskellige segmenter, der svarer til segmenternes størrelse og andel af hele populationen.

Når vi i matematik får stillet et observationssæt til rådighed, der er udtaget ved en stikprøve, antager vi, at observationerne er repræsentative i forhold til hele populationen. Disse observationssæt vil ofte have en størrelse, der gør, at det ikke er hensigtsmæssigt at foretage en manuel optælling af hyppighederne. I stedet anvendes regneark eller et CAS-værktøj til den statistiske behandling af data.

ISBN 9788761685704

Eksempel 231 (diskrete observationer)

Vi vil foretage en statistisk undersøgelse af karaktererne afgivet ved 9. klassernes afgangsprøve i problemregning i matematik.

Vi har foretaget en stikprøve blandt forskellige skoler i landet og fået et observationssæt på i alt 1 096 karakterer. Disse karakterer er udtaget blandt hele populationen, som er alle de ca. 65 000 elever, der har været til afgangsprøven.

At stikprøven er repræsentativ, sikrer vi os ved at indsamle karaktererne fra forskellige områder af landet, både på små og store skoler, i større og mindre byer, på folkeskoler og private skoler og ligeligt fordelt mellem kønnene.

Datasættet er vedhæftet i Excel-filen: Deskriptiv statistik – Karakterer *(Filen kan downloades fra ibogen se https://laerebogimatematikhhx1.systime.dk/index.php?id=278&L=0)* .

Ved en optælling blandt karaktererne får vi følgende tabel

Karakter	Hyppighed	Frekvens	Sum. frekvens
−3	20	1,8 %	1,8 %
00	67	6,1 %	7,9 %
02	161	14,7 %	22,6 %
4	248	22,6 %	45,2 %
7	371	33,9 %	79,1 %
10	147	13,4 %	92,5 %
12	82	7,5 %	100,0 %

Tabel 231

På baggrund heraf udregner vi middeltallet $\overline{x}$ for observationssættet

$$\overline{x} = \frac{20 \cdot (-3) + 67 \cdot 0 + 161 \cdot 2 + 248 \cdot 4 + 371 \cdot 7 + 147 \cdot 10 + 82 \cdot 12}{1096} = 5{,}75$$

Variansen er

ISBN 9788761685704

$$
\begin{aligned}
s^2 &= (-3-5{,}75)^2 \cdot 0{,}018 + (0-5{,}75)^2 \cdot 0{,}061 + (2-5{,}75)^2 \cdot 0{,}147 \\
&\quad + (7-5{,}75)^2 \cdot 0{,}339 + (10-5{,}75)^2 \cdot 0{,}134 + (12-5{,}75)^2 \cdot 0{,}075 \\
&= 12{,}03
\end{aligned}
$$

så standardafvigelsen bliver

$$s = \sqrt{12{,}03} = 3{,}47$$

Kvartilsættet aflæser vi i kolonnen med de summerede frekvenser

$$Q_1 = 4,\, m = 7,\, Q_3 = 7$$

Eksempel 232 (grupperede observationer)

Alle unge mænd i Danmark bliver automatisk indkaldt til Forsvarets dag, når de bliver 18 år. Her afgøres det, om vedkommende er egnet til at aftjene sin værnepligt.

I forbindelse med indkaldelsen måles højden på alle de fremmødte mænd. Et udtræk af data for én af disse dage kunne give et observationssæt som ses i Excelfilen: Deskriptiv statistik – Højder *(Filen kan downloades fra ibogen se https://laerebogimatematikhhx1.systime.dk/index.php?id=278&L=0)* .

I filen er der data på 834 mænds højder. Ved en optælling af data ses vi, at den mindste målte højde er 157,9 cm, mens den højeste er målt til 208,7 cm. Det betyder, at vi grupperer data i følgende intervaller

Højde	Hyppighed	Intervalfrekvens	Sum. intervalfrekvens
$]155;160]$	8	$1,0\,\%$	$1,0\,\%$
$]160;165]$	17	$2,0\,\%$	$3,0\,\%$
$]165;170]$	113	$13,5\,\%$	$16,5\,\%$
$]170;175]$	87	$10,4\,\%$	$26,9\,\%$
$]175;180]$	174	$20,9\,\%$	$47,8\,\%$
$]180;185]$	130	$15,6\,\%$	$63,4\,\%$
$]185;190]$	136	$16,3\,\%$	$79,7\,\%$
$]190;195]$	108	$12,9\,\%$	$92,6\,\%$
$]195;200]$	53	$6,4\,\%$	$99,0\,\%$
$]200;205]$	5	$0,6\,\%$	$99,6\,\%$
$]205;210]$	3	$0,4\,\%$	$100,0\,\%$

Tabel 232

Vi starter med at beregne middeltallet $\overline{x}$

$$\begin{aligned}\overline{x} &= 157{,}5 \cdot 0{,}010 + 162{,}5 \cdot 0{,}020 + 167{,}5 \cdot 0{,}135 + 172{,}5 \cdot 0{,}104 \\ &\quad + 177{,}5 \cdot 0{,}209 + 182{,}5 \cdot 0{,}156 + 187{,}5 \cdot 0{,}163 + 192{,}5 \cdot 0{,}129 \\ &\quad + 197{,}5 \cdot 0{,}064 + 202{,}5 \cdot 0{,}006 + 207{,}5 \cdot 0{,}004 \\ &= 181{,}0\end{aligned}$$

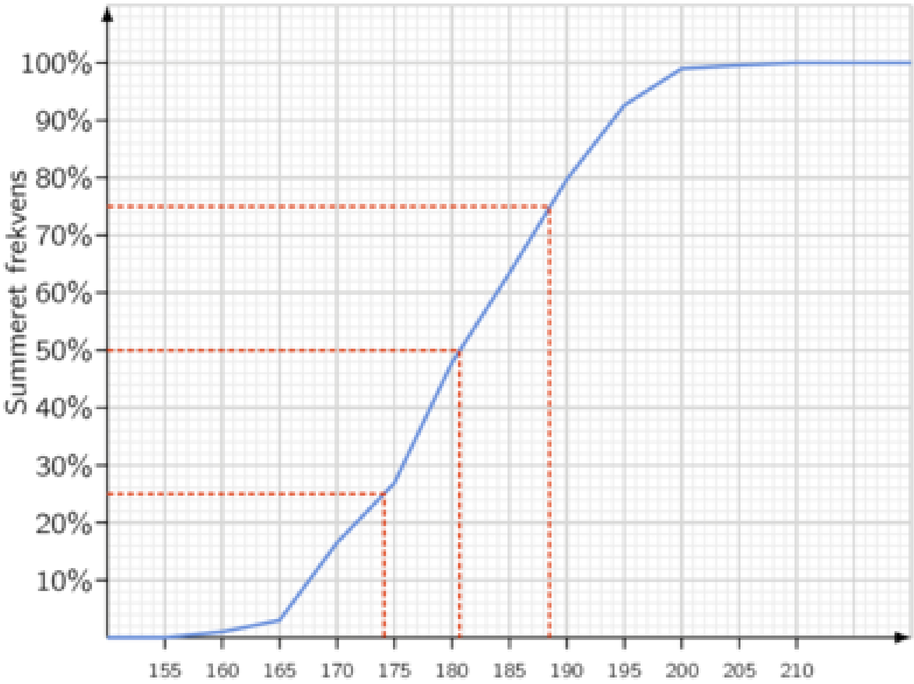
Variansen er

ISBN 9788761685704

$$s^2 = (157{,}5-181{,}0)^2\cdot 0{,}010+(162{,}5-181{,}0)^2\cdot 0{,}020+(167{,}5-181{,}0)^2\cdot 0{,}135$$
$$+(172{,}5-181{,}0)^2\cdot 0{,}104+(177{,}5-181{,}0)^2\cdot 0{,}209+(182{,}5-181{,}0)^2\cdot 0{,}156$$
$$+(187{,}5-181{,}0)^2\cdot 0{,}163+(192{,}5-181{,}0)^2\cdot 0{,}129+(197{,}5-181{,}0)^2\cdot 0{,}064$$
$$+(202{,}5-181{,}0)^2\cdot 0{,}006+(207{,}5-181{,}0)^2\cdot 0{,}004$$
$$=94{,}4$$

Den tilhørende standardafvigelse bliver

$$s=\sqrt{94{,}4}=9{,}7$$



Figur 231

Kvartilsættet bestemt ved sumkurven ovenfor er

$$Q_1=174{,}1\,,\quad m=180{,}7\,,\quad Q_3=188{,}6$$

ISBN 9788761685704

Øvelse 231

Antal sygedage (Filen kan downloades fra ibogen se https://laerebogimatematikhhx1.systime.dk/index.php?id=278&L=0) (diskrete data)

I den vedlagte Excel-fil findes data fra en stikprøve med 726 observationer. Stikprøven omhandler antallet af årlige sygedage for korterevarende sygefravær blandt personalet i sundhedssektoren.

a. Opstil observationer, hyppigheder, frekvenser og summerede frekvenser for observationssættet.
b. Konstruér et pindediagram og et trappediagram over fordelingen.
c. Bestem middeltal, standardafvigelse, typetal, kvartilsæt og 0,9-fraktilen for fordelingen.
d. Kommentér fordelingen af observationerne ud fra svarene i a., b. og c.

Øvelse 232

Afstande (Filen kan downloades fra ibogen se https://laerebogimatematikhhx1.systime.dk/index.php?id=278&L=0) (grupperede data)

I den vedlagte Excel-fil findes data fra en stikprøve på 1 110 observationer. Stikprøven omhandler gymnasieelevers afstand fra deres hjem til gymnasiet. Tallene er angivet i kilometer med én decimal.

a. Opstil intervaller, intervalhyppigheder, intervalfrekvenser og summerede frekvenser baseret på en inddeling af data i intervaller på 4 km.
b. Konstruér et histogram og en sumkurve over fordelingen.
c. Bestem middeltal, standardafvigelse, typeinterval, kvartilsæt og 0,9-fraktil for fordelingen.
d. Kommentér fordelingen af observationerne ud fra svarene i a., b. og c.

ISBN 9788761685704

Øvelse 233

Antal biografbesøg *(Filen kan downloades fra ibogen se https://laerebogimatematikhhx1.systime.dk/index.php?id=278&L=0)* (diskrete data)

I den vedlagte Excel-fil findes data fra en stikprøve med 1048 observationer. Stikprøven omhandler antallet af årlige biografbesøg blandt den voksne del af befolkningen i Danmark.

a. Opstil observationer, hyppigheder, frekvenser og summerede frekvenser for observationssættet.
b. Konstruér et pindediagram og et trappediagram over fordelingen.
c. Bestem middeltal, standardafvigelse, kvartilsættet og 0,1-fraktilen for fordelingen.
d. Kommentér fordelingen af observationerne ud fra svarene i a., b. og c.

Øvelse 234

Årlig indtægt *(Filen kan downloades fra ibogen se https://laerebogimatematikhhx1.systime.dk/index.php?id=278&L=0)* (grupperede data)

I den vedlagte Excel-fil findes data fra en stikprøve på 658 observationer. Stikprøven omhandler den gennemsnitlige årlige indkomst blandt økonomer, 3-10 år efter at de er færdiguddannede. Tallene er angivet i danske kroner.

a. Opstil intervaller, intervalhyppigheder, intervalfrekvenser og summerede frekvenser baseret på en inddeling af data i intervaller på 100 000 kr.
b. Konstruér et histogram og en sumkurve over fordelingen.
c. Bestem middeltal, standardafvigelse, kvartilsæt og 0,1-fraktil for fordelingen.
d. Kommentér fordelingen af observationerne ud fra svarene i a., b. og c.

ISBN 9788761685704

Øvelse 235

Husstandsstørrelse *(Filen kan downloades fra ibogen se https://laerebogimatematikhhx1.systime.dk/index.php?id=278&L=0)* (diskrete data)

I den vedlagte Excel-fil findes data fra en stikprøve med 884 observationer. Stikprøven omhandler størrelsen af husstande i Danmark. Tallene angiver hvor mange personer, der bor fast i husstanden.

a. Opstil observationer, hyppigheder, frekvenser og summerede frekvenser for observationssættet.
b. Konstruér et pindediagram og et trappediagram over fordelingen.
c. Bestem middeltal, standardafvigelse, kvartilsæt, 0,1-fraktil og 0,9-fraktil for fordelingen.
d. Kommentér fordelingen af observationerne ud fra svarene i a., b. og c.

Øvelse 236

Alder på medlemmer *(Filen kan downloades fra ibogen se https://laerebogimatematikhhx1.systime.dk/index.php?id=278&L=0)* (grupperede data)

I den vedlagte Excel-fil findes data fra en stikprøve på 916 observationer. Stikprøven omhandler alderen på medlemmer i en fagforening.

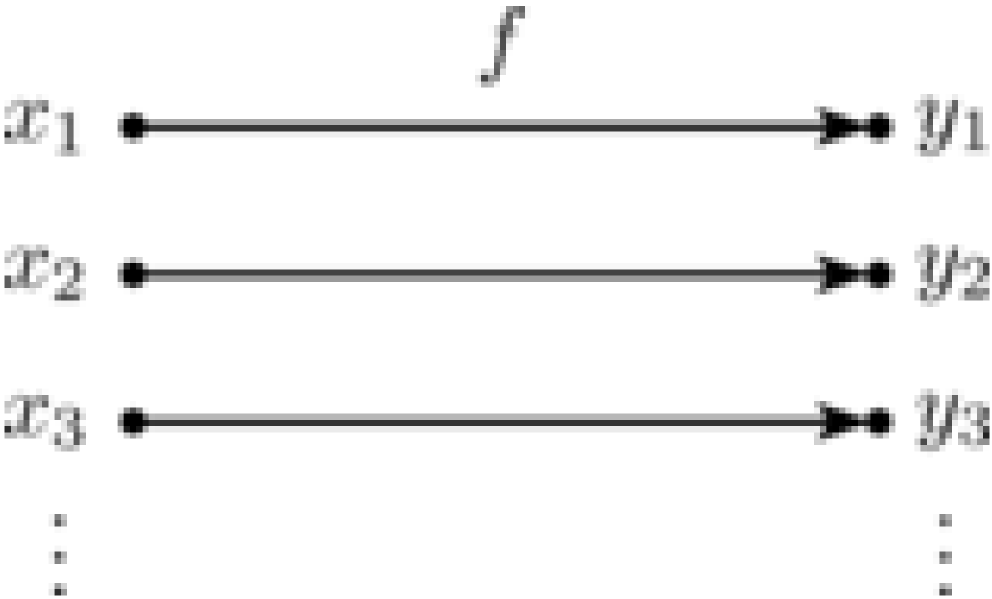
a. Opstil intervaller, intervalhyppigheder, intervalfrekvenser og summerede frekvenser baseret på en inddeling af data i intervaller på 5 år.
b. Konstruér et histogram og en sumkurve over fordelingen.
c. Bestem middeltal, standardafvigelse, kvartilsæt, 0,1-fraktil og 0,9-fraktil for fordelingen.
d. Kommentér fordelingen af observationerne ud fra svarene i a., b. og c.

ISBN 9788761685704

Kapitel 3. Funktioner

3.1 Grundlæggende om funktioner

En *forskrift*, som vi kan betegne f, fortæller, hvordan en størrelse x forbinder sig til en anden størrelse y, se figur 31.



Figur 31
Vi siger, at y er fremkommet af x ved forskriften f og skriver $y = f(x)$.

Normalt er en forskrift givet ved et regneudtryk, en graf eller en tabel. Regneudtrykket $y = x^2 + 2$ er et eksempel på en forskrift.

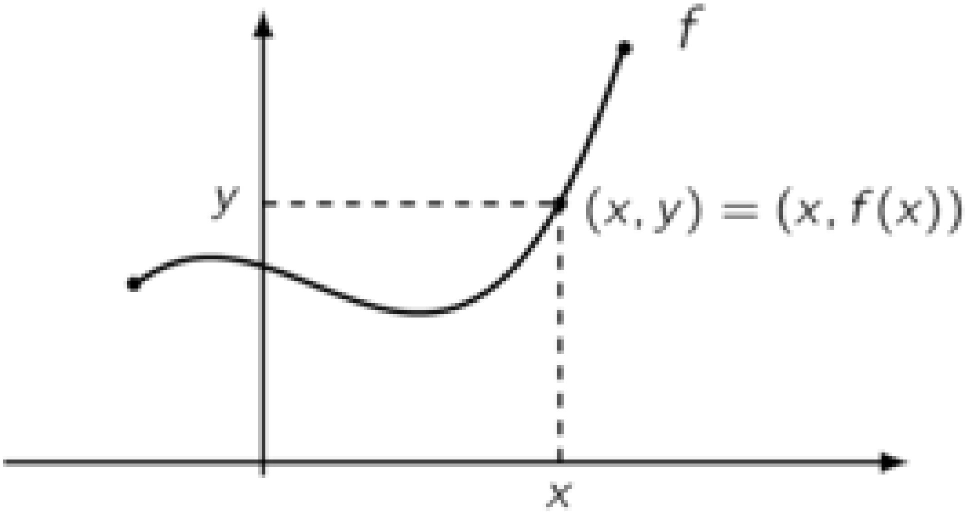
I denne fremstilling vil vi udelukkende se på forskrifter, der forbinder et tal med et andet tal.

3.1.1 Lodret-kriteriet og definition

Lodret kriteriet

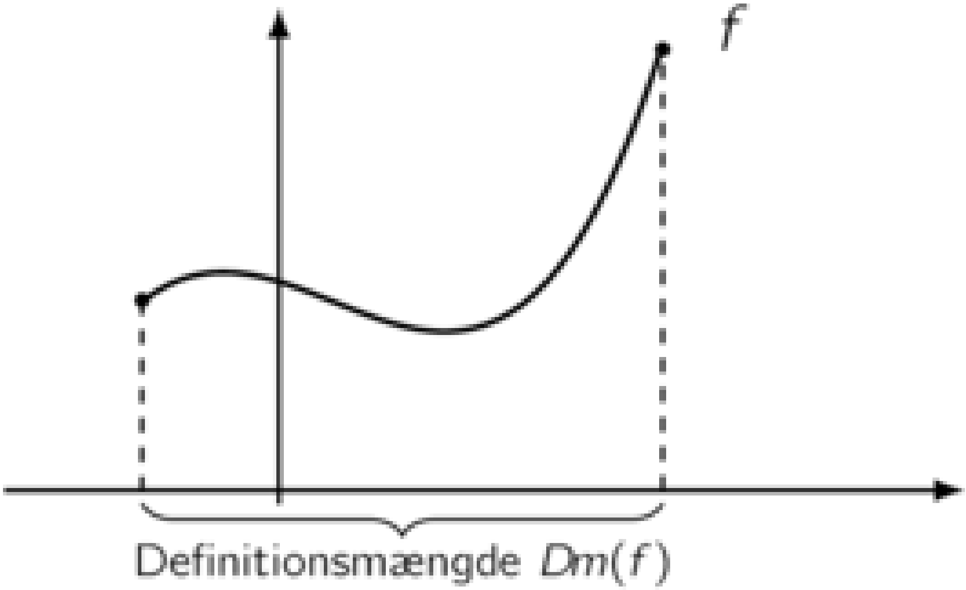
En given forskrift f mellem et reelt tal x og et andet reelt tal $y = f(x)$ danner talpar $(x, y) = (x, f(x))$, som vi kan indtegne som punkter i et koordinatsystem. Herved fremkommer en kurve, se figur 3111.

ISBN 9788761685704



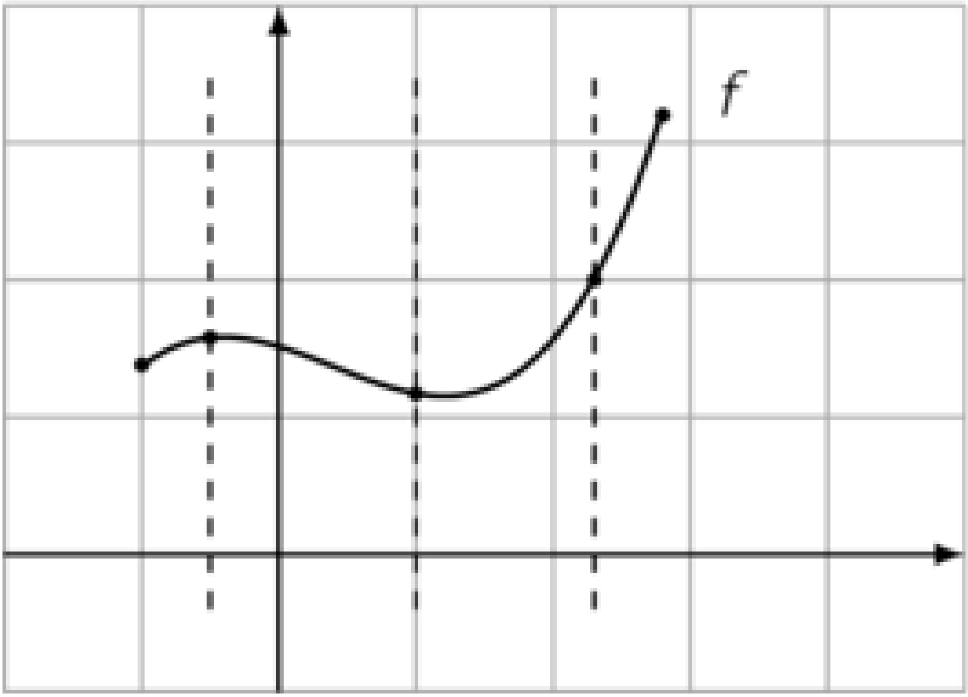
Figur 3111

De *x*-værdier, som vi betragter, kalder vi forskriftens *definitionsmængde Dm(f)*, der er vist på figur 3112.



Figur 3112

Såfremt enhver lodret linje $x = k$ højst skærer kurven i ét punkt, siger vi, at kurven opfylder *lodret-kriteriet*, se figur 3113.



Figur 3113

En *funktion* er en forskrift, hvor der til hver værdi af x kun kan forekomme én værdi af y.

Det præciserer vi i følgende

Definition 3111 (Funktion)

En *funktion* er fastlagt ved

1) en definitionsmængde *Dm(f)*

2) en forskrift f, der forbinder ethvert x i *Dm(f)* med et reelt tal $y = f(x)$

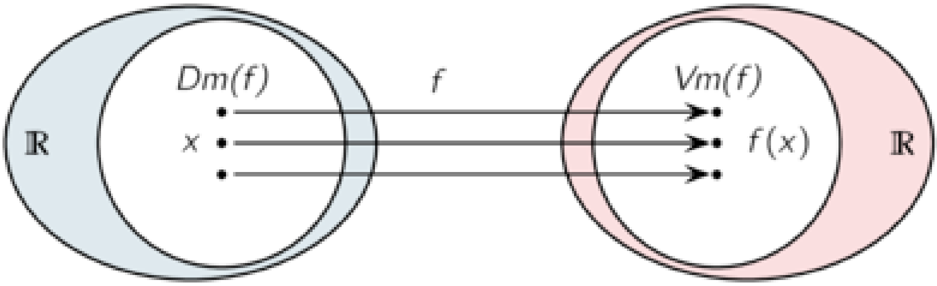
3) en *graf*, hvis punkter (x, y) opfylder lodret-kriteriet

Når x gennemløber definitionsmængden, vil funktionen give os de tilhørende *funktionsværdier* $f(x)$.

Mængden af funktionsværdier (typisk et eller flere intervaller) kalder vi *værdimængden* for funktionen f og betegner den *Vm(f)*.

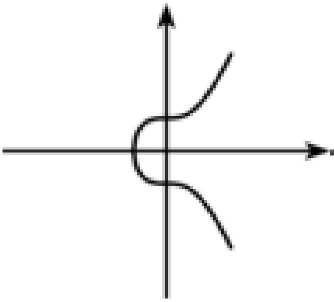
De gennemgåede begreber er illustreret på figur 3114.

ISBN 9788761685704

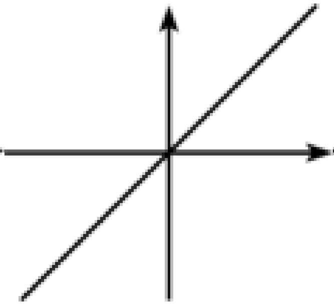


Figur 3114

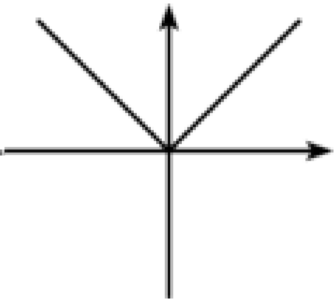
Hvis en kurve skal være *graf* for en funktion, skal lodret-kriteriet være opfyldt. Det må altså ikke være muligt at aflæse flere *y*-værdier hørende til en *x*-værdi på kurven.



Figur 3115 *Ikke graf*



Figur 3116 *Graf*



Figur 3117 *Graf*

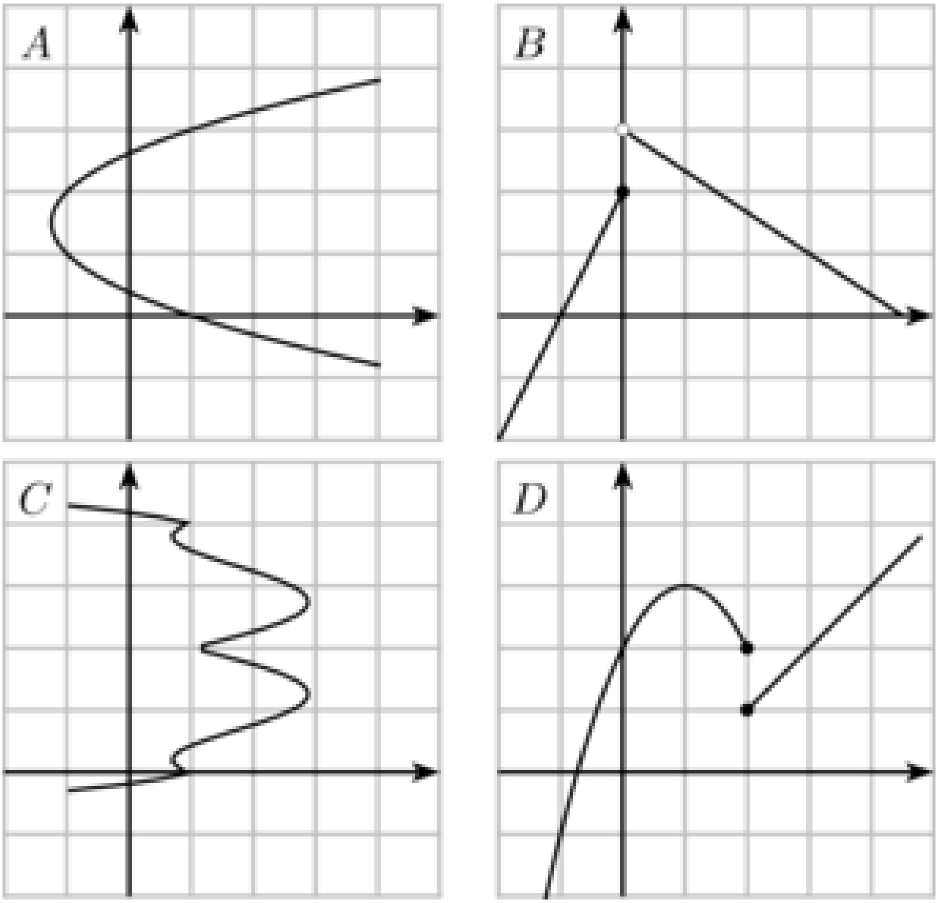
Kurven vist på figur 3115 svarer ikke til grafen for en funktion, da der til en *x*-værdi hører flere kurvepunkter.

ISBN 9788761685704

Øvelse 3111

På figuren nedenfor er der vist fire kurver.

Afgør i hvert tilfælde, om den viste kurve er grafen for en funktion.

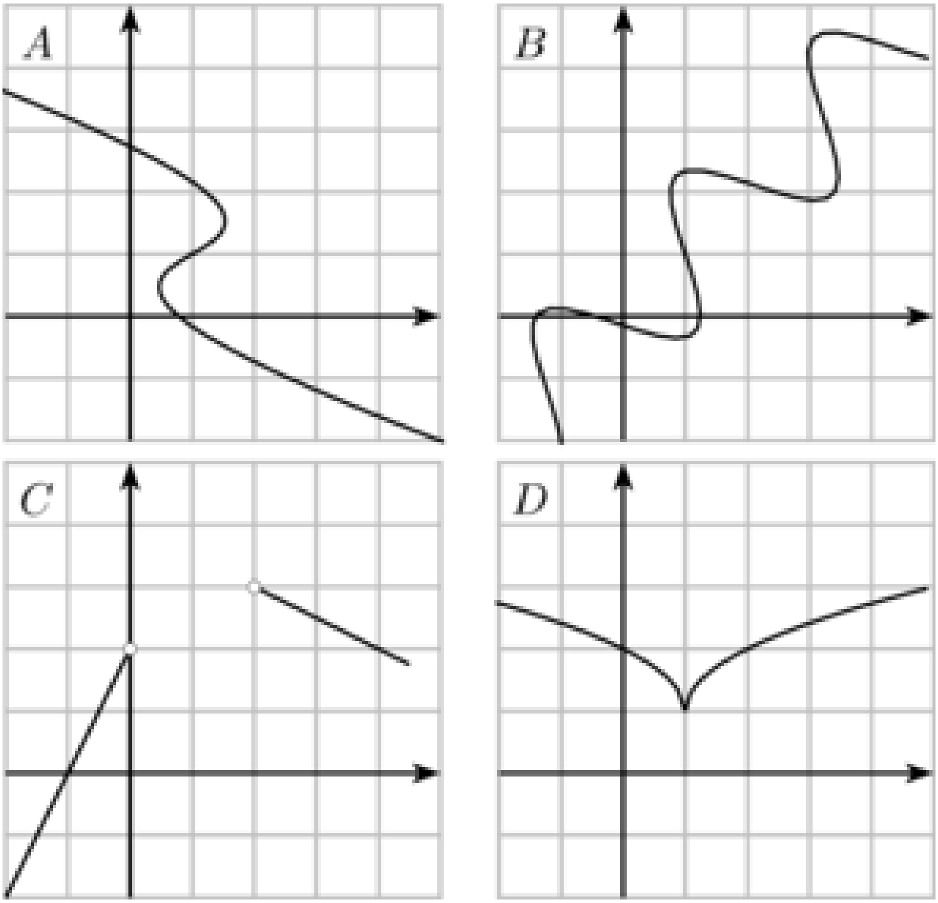


Figur 3118

ISBN 9788761685704

Øvelse 3112

Hvilke(n) af nedenstående kurver er grafen for en funktion?



Figur 3119

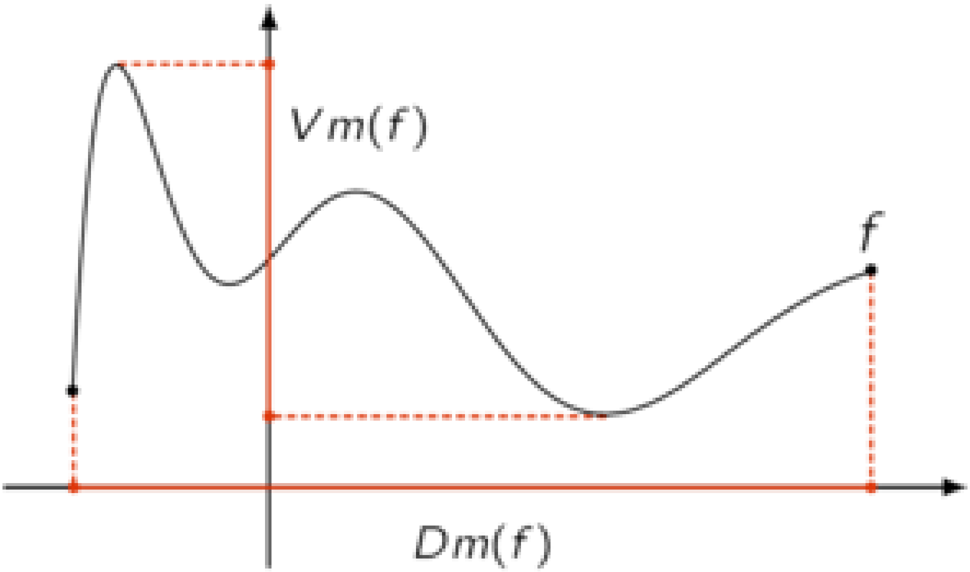
3.1.2 Funktion givet ved graf

Definitionsmængde og værdimængde

En funktion *f* kan være givet ved en graf.

ISBN 9788761685704

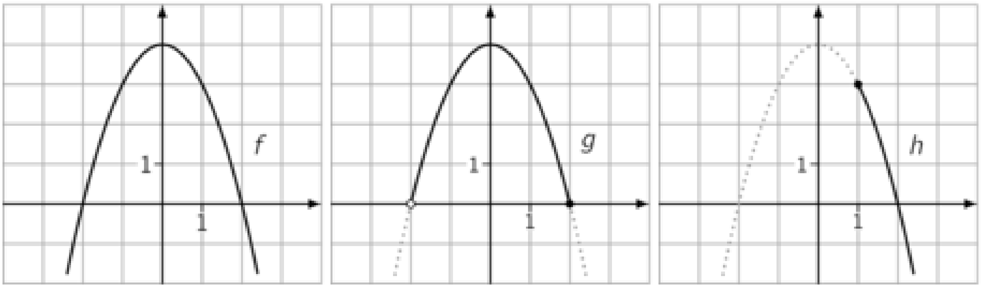
I dette tilfælde må vi bestemme funktionsværdien $f(x)$ hørende til et x ved en omhyggelig aflæsning. Definitionsmængden *Dm(f)* og værdimængden *Vm(f)* aflæser vi på henholdsvis x-aksen og y-aksen, se figur 3121.



Figur 3121

Hvis en graf stopper, sætter vi en bolle. Er bollen udfyldt, tilhører punktet grafen, ellers ikke.

Dette er illustreret på figur 3122 – figur 3124.



Figur 3122 **Figur 3123** **Figur 3124**

For alle tre grafer er $y = -x^2 + 4$, men de tilsvarende funktioner er ikke ens, da de har de tre forskellige definitionsmængder

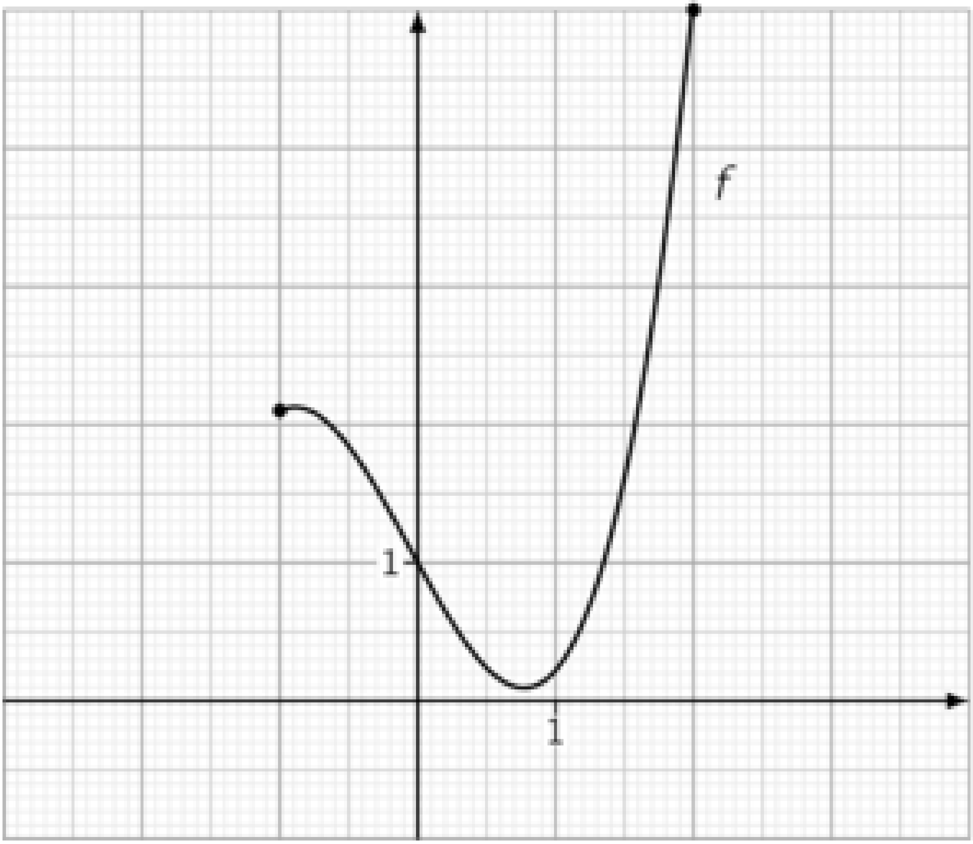
$$Dm(f) =]-\infty; \infty[\quad Dm(g) =]-2; 2] \quad Dm(h) = [1; \infty[$$

Deres værdimængder er

$$Vm(f) =]-\infty;4] \quad Vm(g) = [0;4] \quad Vm(h) =]-\infty;3]$$

Aflæsning af funktionsværdier

Figur 3125 viser grafen for en funktion f.



Figur 3125

Vi aflæser punkterne

$$(0{,}1) \quad \text{og} \quad (1{,}6\ ,2)$$

på grafen, så

$$f(0) = 1 \qquad \text{og} \qquad f(1{,}6) = 2$$

Disse aflæsninger kan vi også angive i en tabel

ISBN 9788761685704

x	0	1,6
f(x)	1	2

Tabel3121

Den mindste x-værdi, der svarer til et punkt på grafen, er $x = -1$, og den største x-værdi svarende til et grafpunkt, er x = 2. Af grafen fremgår altså, at definitionsmængden er

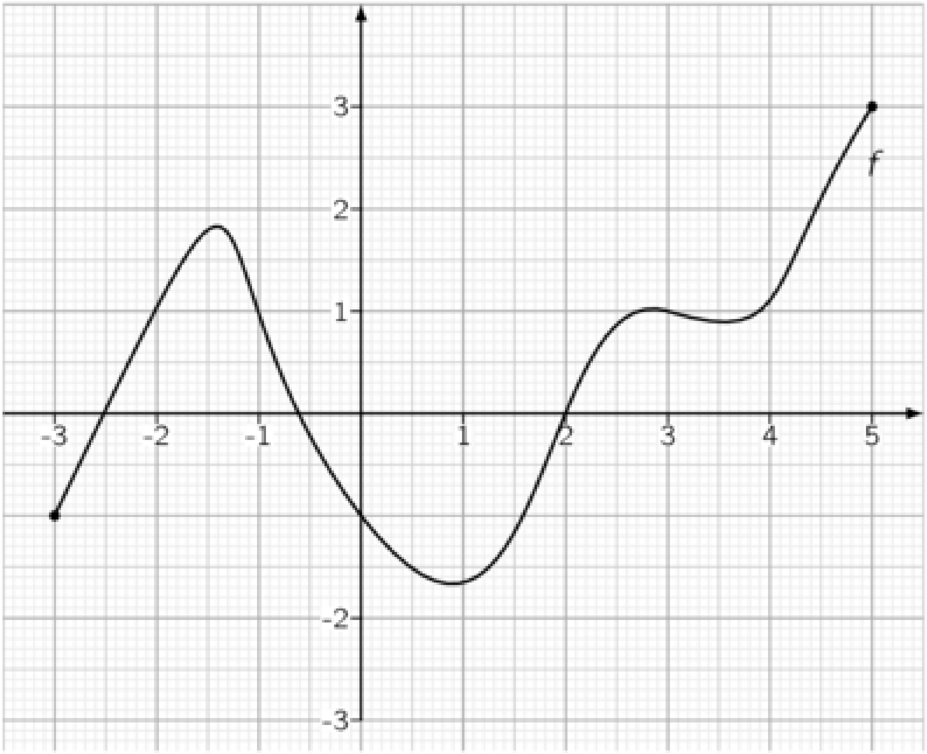
$$Dm(f) = [\,-1;\ 2\,]$$

For at finde værdimængden aflæser vi tilsvarende den mindste y-værdi og den største y-værdi, der svarer til punkter på grafen. Aflæsninger giver den mindste y-værdi 0,1 og den største y-værdi 5, så værdimængden er

$$Vm(f) = [\,0{,}1\,;\ 5\,]$$

Øvelse 3121

Den følgende figur viser grafen for en funktion *f*.



Figur 3127

Udfyld tabellen ved aflæsning på grafen

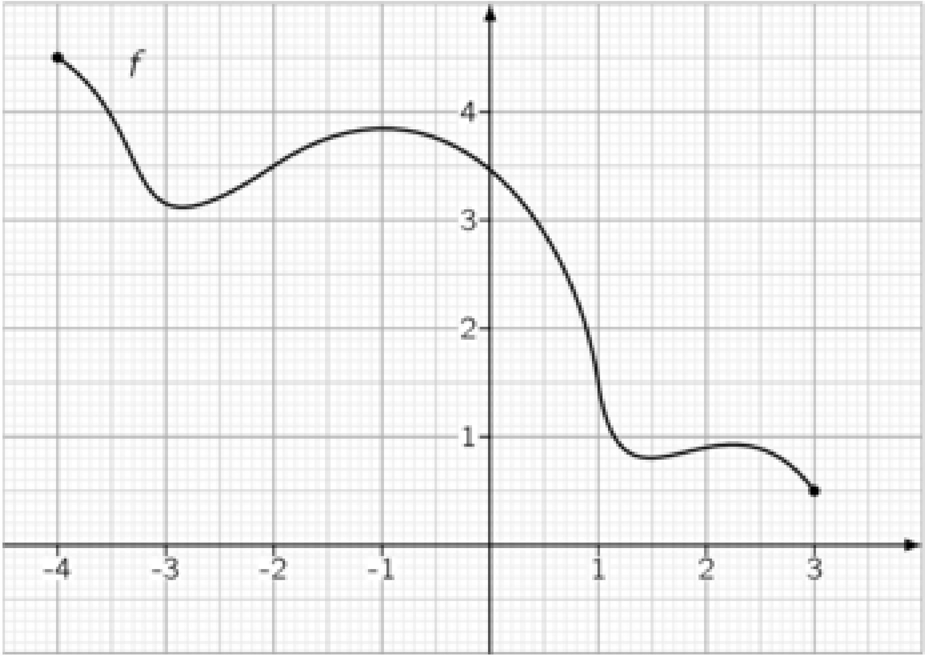
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$									

Tabel 3121

Aflæs ligeledes definitonsmængden $Dm(f)$.

Øvelse 3122

Grafen for funktionen f er vist nedenfor



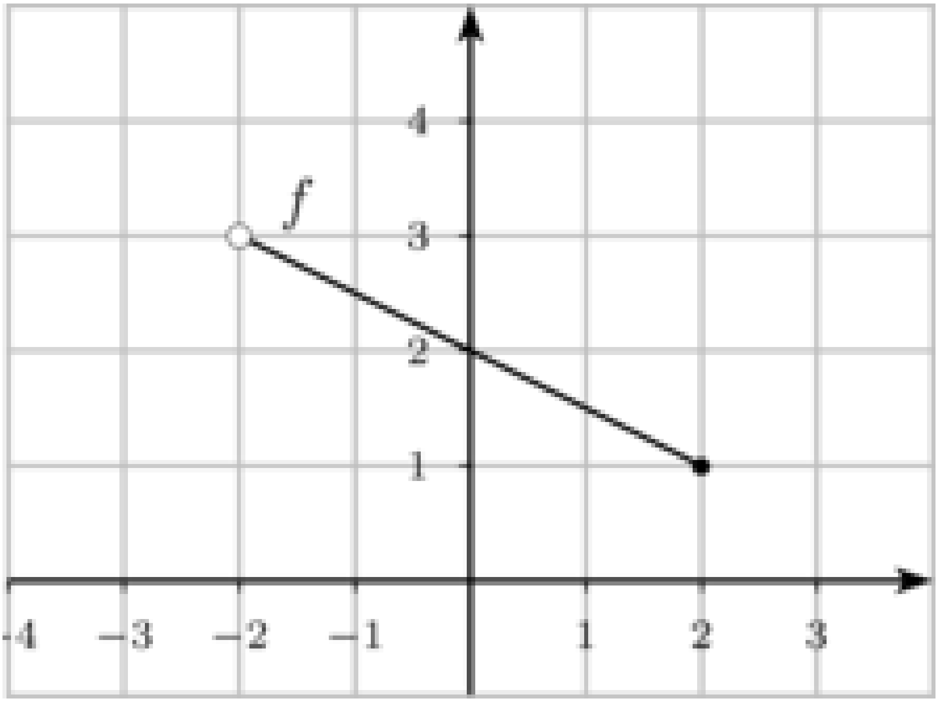
Aflæs

$$f(-4)\ ,\ \ f(-2)\ ,\ \ f(0)\ ,\ \ f(1)\ \ \text{og}\ \ f(3)$$

samt definitionsmængden $Dm(f)$ og værdimængden $Vm(f)$.

Øvelse 3123

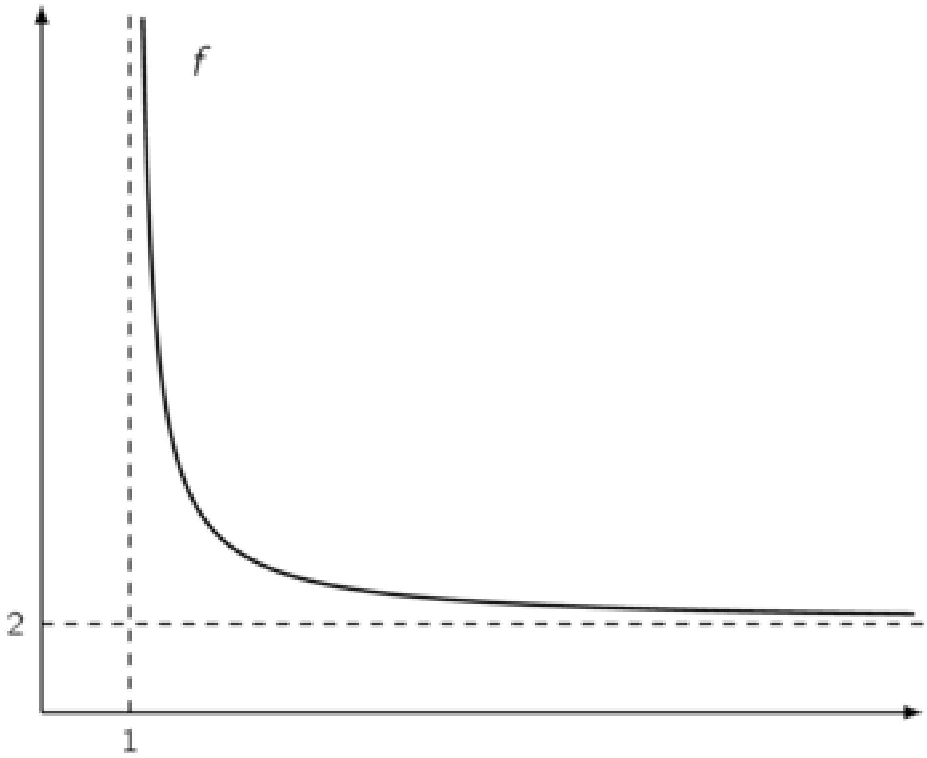
Aflæs $f(0)$, $f(-1)$, $f(1)$, definitionsmængden $Dm(f)$ og værdimængden $Vm(f)$ for funktionen f nedenfor.



Figur 3126

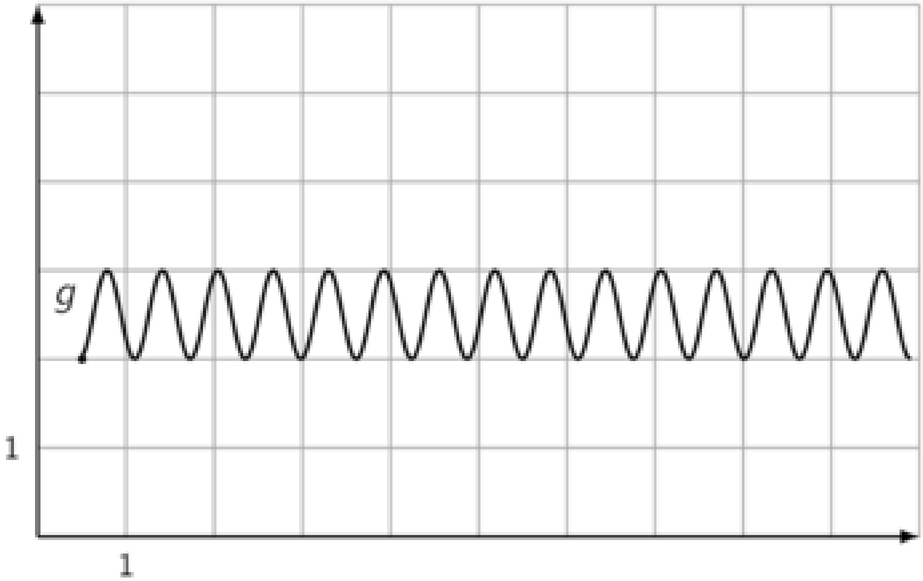
Øvelse 3124

Aflæs definitionsmængderne og værdimængderne for funktionerne *f* og *g* nedenfor.



Figur 3127

ISBN 9788761685704



Figur 3128

3.1.3 Regneforskrift og graf

Regneforskrift

En regneforskrift består både af et regneudtryk og en definitionsmængde. Regneudtrykket benytter vi til at beregne funktionsværdier $f(x)$ ud fra.

Et eksempel på en funktion givet ved en regneforskrift er

$$f(x) = 3x^2 - 1 \quad , \quad x \in [\,-3;\ 4\,]$$

Ved brug af regneudtrykket finder vi

$$f(2) = 3 \cdot 2^2 - 1 = 3 \cdot 4 - 1 = 11$$
$$f(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 1 = 3 \cdot 1 - 1 = 2$$
$$f(4) = 3 \cdot 4^2 - 1 = 3 \cdot 16 - 1 = 47$$

Vi kan ikke beregne f.eks. $f(-4)$ og $f(5)$, da definitionsmængden kun består af tallene mellem –3 og 4.

ISBN 9788761685704

Øvelse 3131

Givet funktionen $f(x) = 4x - 1, x \in \mathbb{R}$.

Beregn $f(2)$, $f(-6)$ og $f(0)$.

Øvelse 3132

Givet funktionen $g(t) = 1 - t^2, \quad t \in \mathbb{R}$.

Beregn $g(2)$, $g(6)$ og $g(\sqrt{5})$.

Øvelse 3133

Find funktionsværdien i 2 for hver af de følgende funktioner.

a. $f(x) = 5x$
b. $f(t) = 5t - t^3$
c. $h(s) = 3 - 5s$
d. $f(x) = \frac{1}{1-x}$
e. $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$
f. $h(x) = \sqrt{4x+1}$
g. $g(x) = \frac{x}{6} + \frac{2}{3}$
h. $f(x) = 10$

Størst mulige definitionsmængde

Hvis vi angiver en funktion uden definitionsmængde, er det underforstået, at definitionsmængden er den største mulige mængde.

ISBN 9788761685704

Eksempel 3131

Vi må aldrig dividere med nul.

For funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

må vi derfor kræve, at x ikke er 0, hvilket vi skriver $x \neq 0$. Så inklusiv definitionsmængde er regneforskriften

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad x \neq 0$$

Eksempel 3132

Vi kan ikke tage kvadratroden af et negativt tal.

For funktionen

$$g(x) = \sqrt{x-5}$$

må vi kræve, at $x - 5 \geq 0$, dvs. $x \geq 5$. Altså er regneforskriften

$$g(x) = \sqrt{x-5} \quad , \quad x \geq 5$$

Øvelse 3134

Bestem definitionsmængden for de følgende funktioner.

a. $f_1(x) = \frac{3}{1+x}$
b. $f_2(x) = \frac{x}{6-2x}$
c. $f_3(x) = \sqrt{x+2}$
d. $f_4(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$
e. $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{12-4t}}$

ISBN 9788761685704

Graf ud fra regneforskrift

Vi betragter funktionen

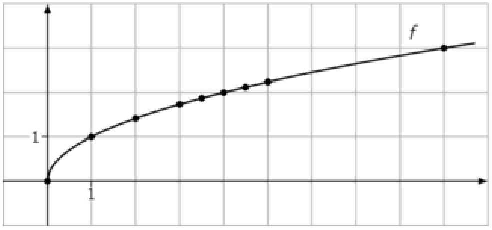
$$f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad x \geq 0$$

Grafen for funktionen tegner vi ud fra en tabel med støttepunkter

x	0	1	2	3	3,5	4	4,5	5	9
$y = \sqrt{x}$	0	1	1,4	1,7	1,9	2	2,1	2,2	3

Tabel 3132

Vi afsætter støttepunkterne i et koordinatsystem og forbinder dem med en blød, sammenhængende kurve, som vist på figur 3131.



Figur 3131

Grafen for

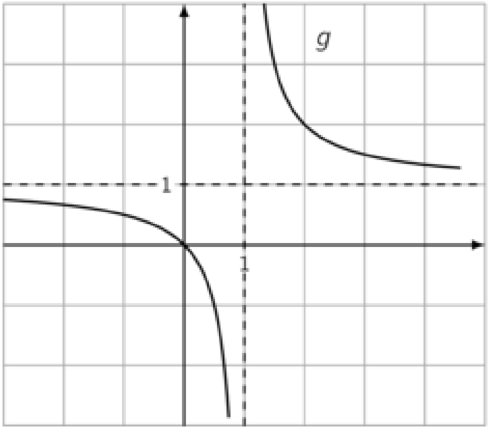
$$f(x) = \sqrt{x}$$

Grafen for funktionen

$$g(x) = \frac{x}{x-1} \quad , \quad x \neq 1$$

består af to dele.

ISBN 9788761685704



Figur 3132

Grafen for

$$g(x) = \frac{x}{x-1}$$

Vi kan ikke forbinde grafens to dele, da funktionen ikke er defineret for $x = 1$. Grafen nærmer sig den stiplede lodrette linje med ligningen $x = 1$ uden nogen sinde at skære denne. Grafen nærmer sig også den stiplede vandrette linje med ligningen $y = 1$ for meget store og meget små værdier af x.

Øvelse 3135

Funktionen f er givet ved

$$f(x) = x^2 + 1 \ , \ x \in [-2; 2]$$

Udfyld tabellen

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

Indtegn de tilsvarende grafpunkter i et koordinatsystem, og tegn grafen for f.

ISBN 9788761685704

Øvelse 3136

Funktionen f er givet ved

$$f(x) = \sqrt{x+3} - 1 \ , \ x \geq -3$$

Udfyld tabellen

x	-3	-2	6	13
$f(x)$				

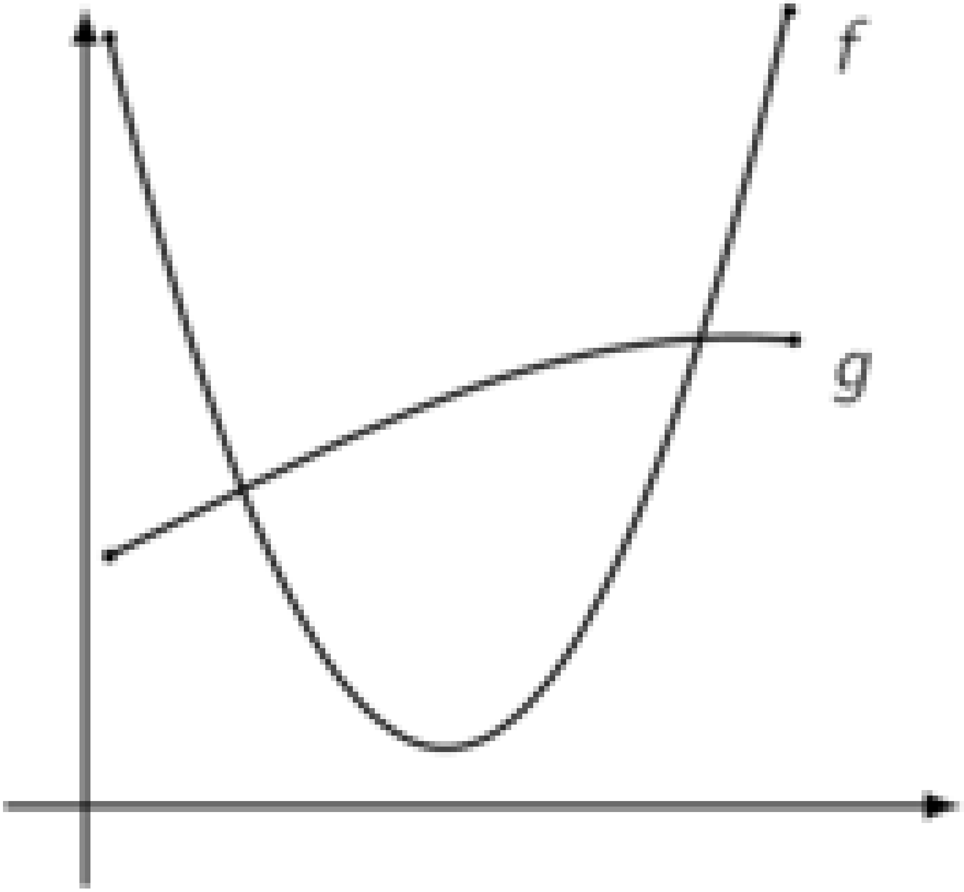
Indtegn de tilsvarende støttepunkter i et koordinatsystem, og tegn grafen for f ved hjælp af disse.

3.1.4 Grafiske løsninger

Vi vil her beskrive, hvordan vi løser ligninger og uligheder ved aflæsning på grafer. Denne metode kalder vi den *grafiske metode*, og de fundne løsninger omtaler vi som *grafiske løsninger*.

Vi tager udgangspunkt i figur 3141, som viser graferne for to funktioner f og g.

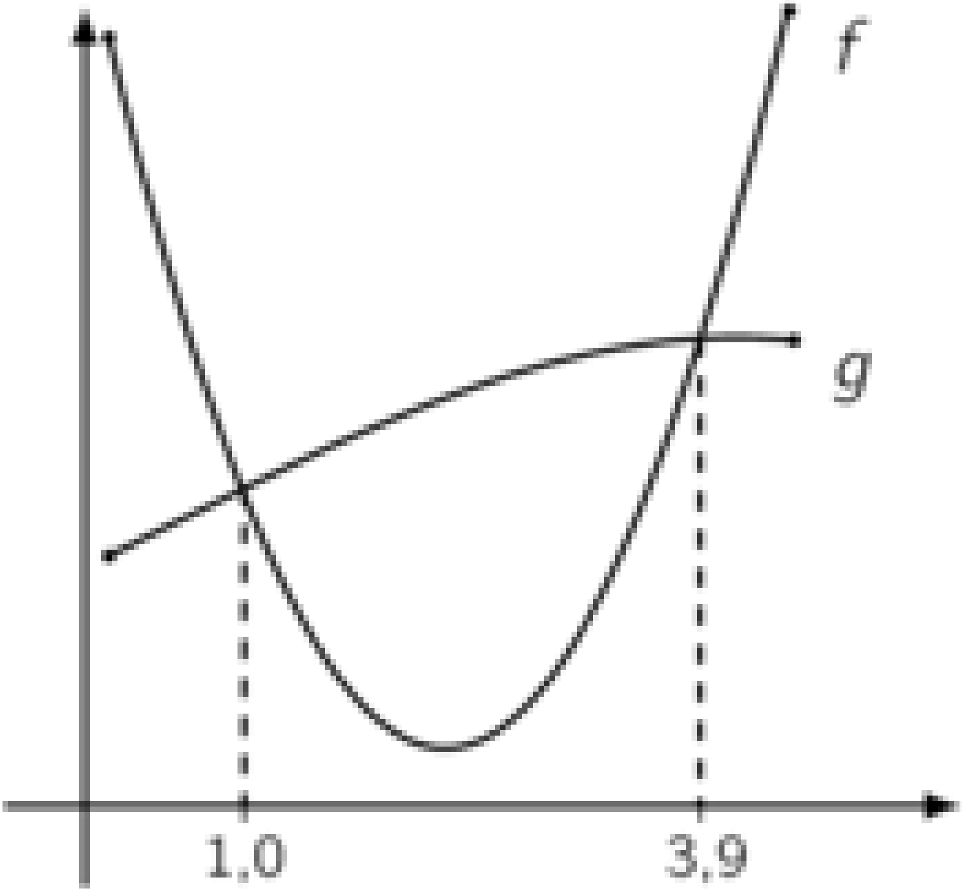
ISBN 9788761685704



Figur 3141

For at løse ligningen $f(x) = g(x)$ opsøger vi grafernes skæringspunkter og aflæser deres 1. koordinater.

ISBN 9788761685704



Figur 3142

På figur 3142 er skæringspunkternes 1. koordinater aflæst til $x = 1{,}0$ og $x = 3{,}9$, dvs.

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = 1{,}0 \text{ eller } x = 3{,}9$$

Uligheden $f(x) < g(x)$ svarer grafisk til, at grafen for f forløber under grafen for g. Af figur 3142 aflæser vi, at dette er tilfældet mellem $x = 1$ og $x = 3{,}9$, så

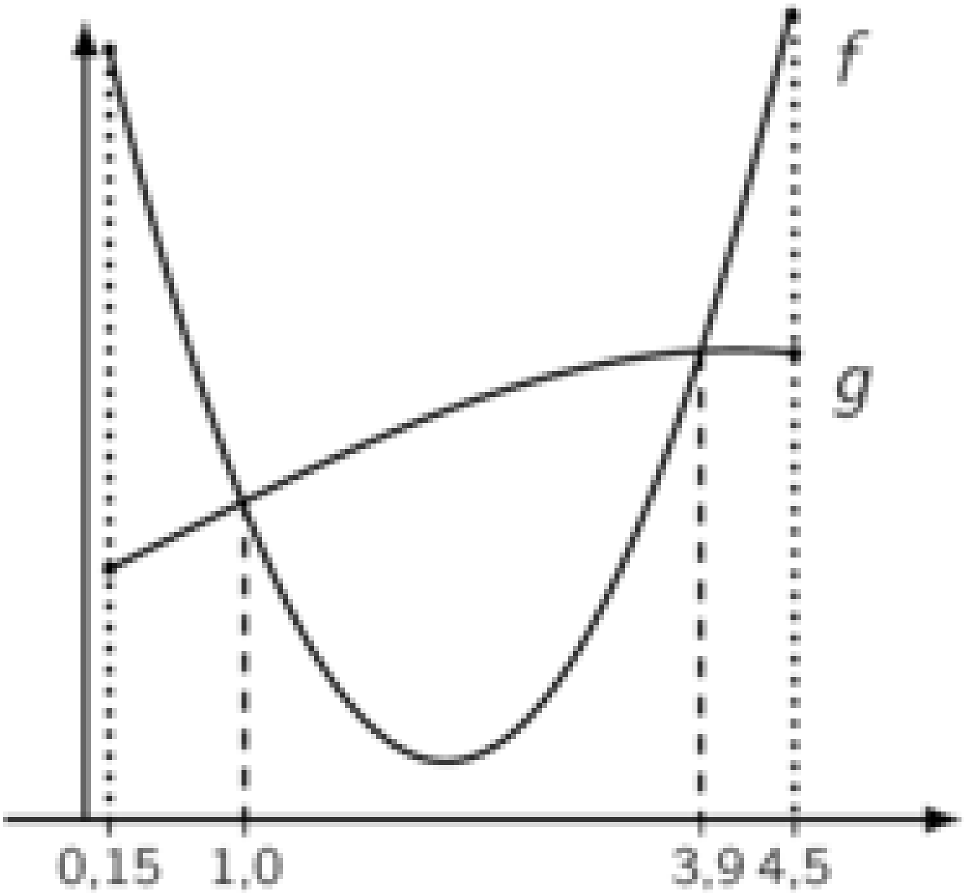
$$f(x) < g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x \in]1{,}0\,;\,3{,}9[$$

Hvis vi i stedet skal løse uligheden $f(x) > g(x)$, opsøger vi de områder på x-aksen, hvor grafen for f forløber over grafen for g.

I figur 3143 ser vi, at dette er opfyldt, når $x \in [0{,}15\ \ 1{,}0[$, og når $x \in]3{,}9;\ 4{,}5]$, dvs.

$$f(x) > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x \in [0{,}15\ \ 1{,}0[\cup]3{,}9;\ 4{,}5]$$

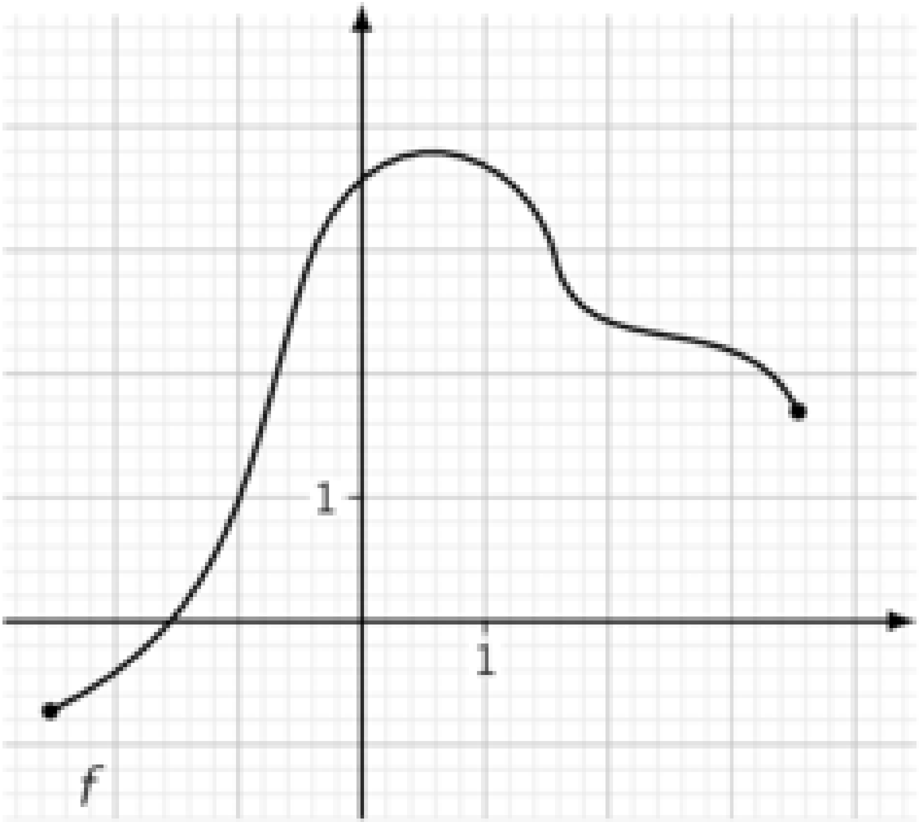
ISBN 9788761685704



Figur 3143

Eksempel 3141

Figur 3144 viser grafen for funktionen *f*.

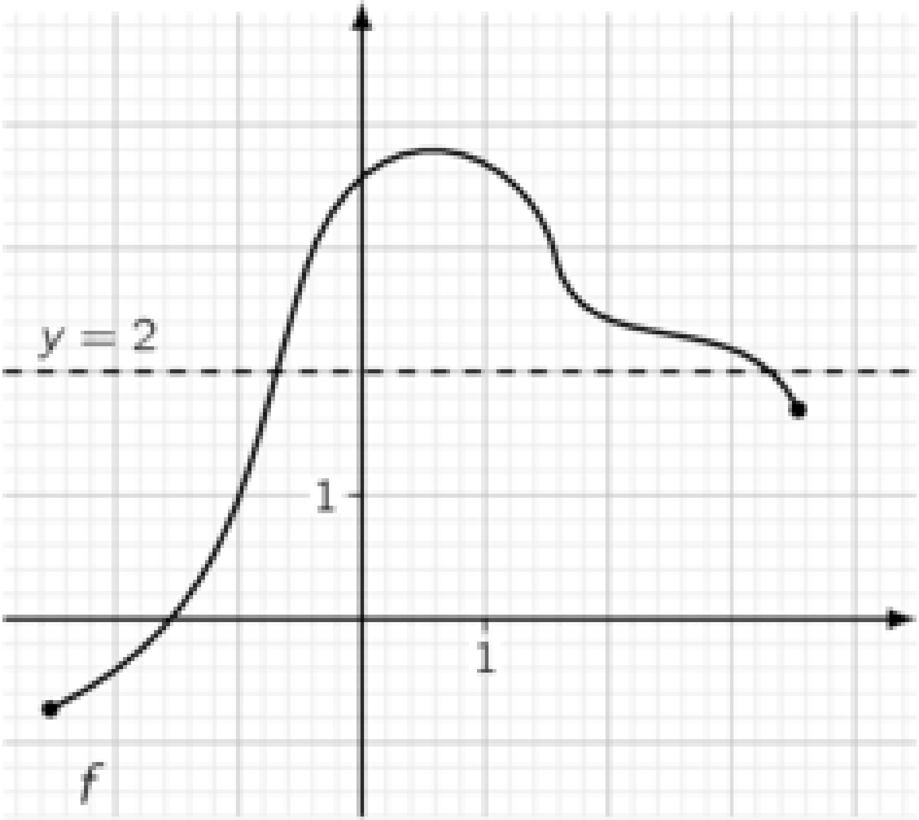


Figur 3144

Vi vil løse ligningen $f(x) = 2$ og ulighederne $f(x) > 2$ og $f(x) < 2$ grafisk.

Vi starter med at indtegne den vandrette linje med ligning $y = 2$, som skærer grafen i to punkter.

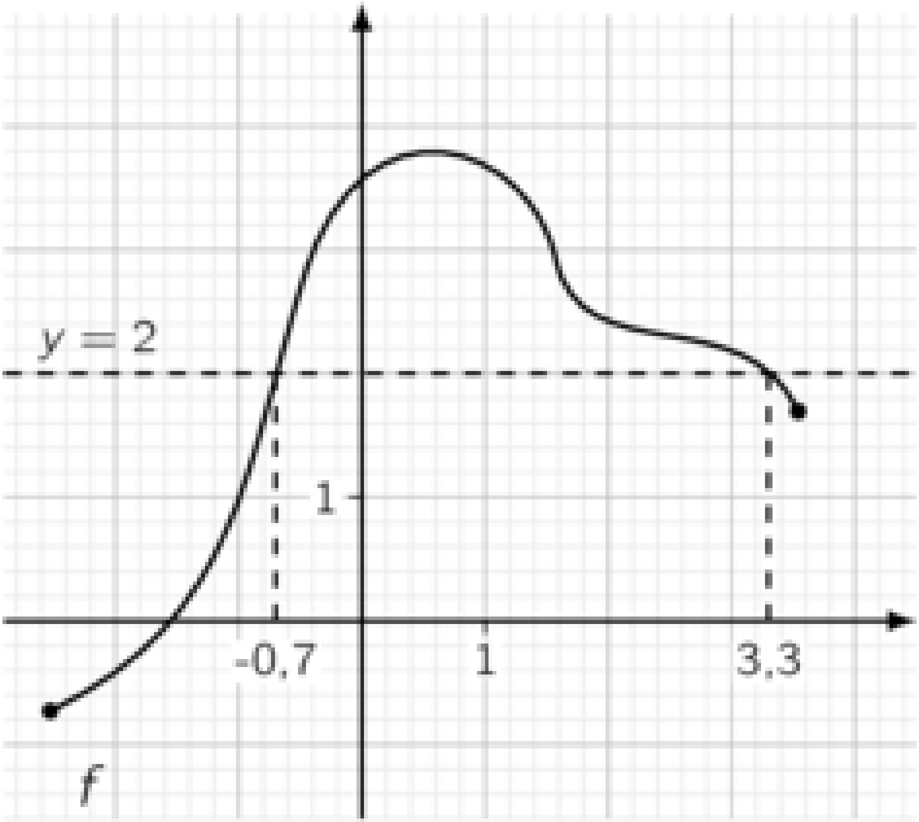
ISBN 9788761685704



Figur 3145

Vi aflæser, at graferne skærer hinanden, når $x = -0{,}7$ og når $x = 3{,}3$.

ISBN 9788761685704



Figur 3146

Altså har ligningen $f(x) = 2$ de to løsninger $x = -0{,}7$ og $x = 3{,}3$.

Vi ser nu på løsning af ulighederne $f(x) > 2$ og $f(x) < 2$.

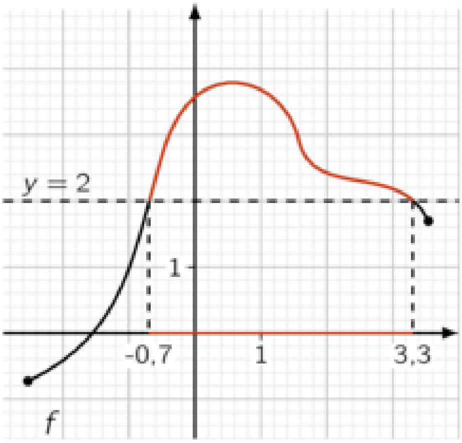
Den første ulighed $f(x) > 2$ svarer grafisk til, at grafen for f skal ligge over den vandrette linje. Af figuren aflæser vi

$$f(x) > 2 \quad \text{når} \quad x \in]-0{,}7\,;\,3{,}3[$$

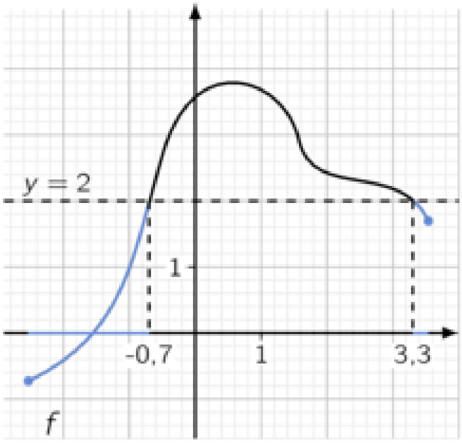
Den anden ulighed $f(x) < 2$ svarer grafisk til, at grafen for f skal ligge under den vandrette linje. Af figuren aflæser vi

$$f(x) < 2 \quad \text{når} \quad x \in]-2{,}5\,;\,-0{,}7[\cup]3{,}3\,;\,3{,}5[$$

ISBN 9788761685704



Figur 3147



Figur 3148

Eksempel 3142

Vi vil løse uligheden

$$2x^2 \leq 3 - x$$

grafisk.

Sætter vi

$$f(x) = 2x^2 \quad \text{og} \quad g(x) = 3 - x$$

kan vi skrive uligheden

$$f(x) \leq g(x)$$

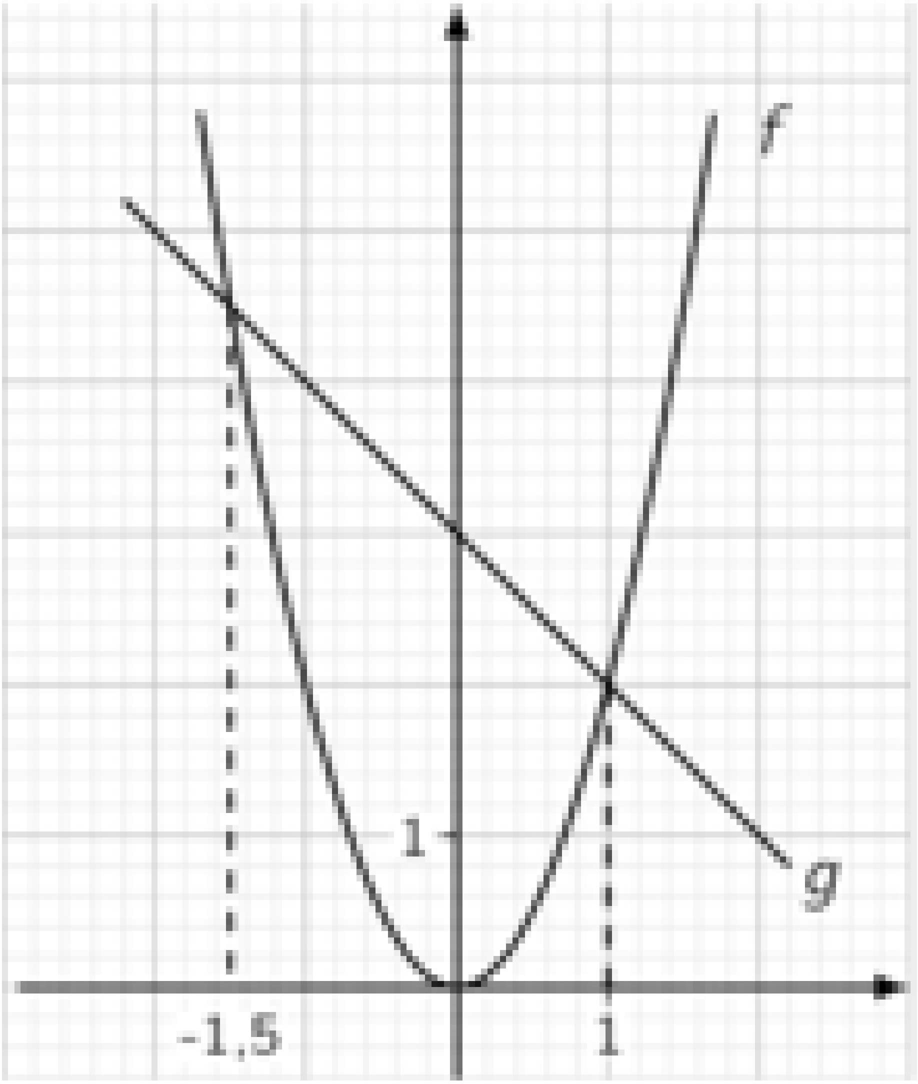
Vi tegner graferne for f og g og aflæser på figur 3149, at graferne skærer hinanden, når $x = -1{,}5$ og $x = 1$.

Mellem disse værdier ligger grafen for f under grafen for g.

Altså er $f(x) \leq g(x)$, når $x \in [-1{,}5;\ 1]$, dvs.

$$2x^2 \leq 3 - x \quad \text{når} \quad x \in [-1{,}5;\ 1]$$

ISBN 9788761685704

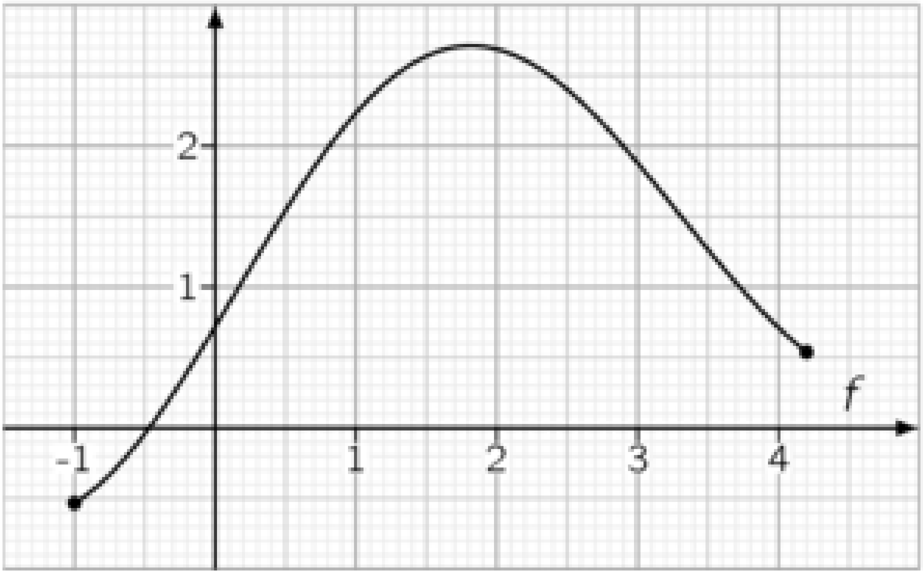


Figur 3149

Af figuren ser vi også, at løsningen til uligheden $f(x) \geq g(x)$ er
$x \in]-\infty; -1{,}5] \cup [1; \infty[$.

ISBN 9788761685704

Øvelse 3141

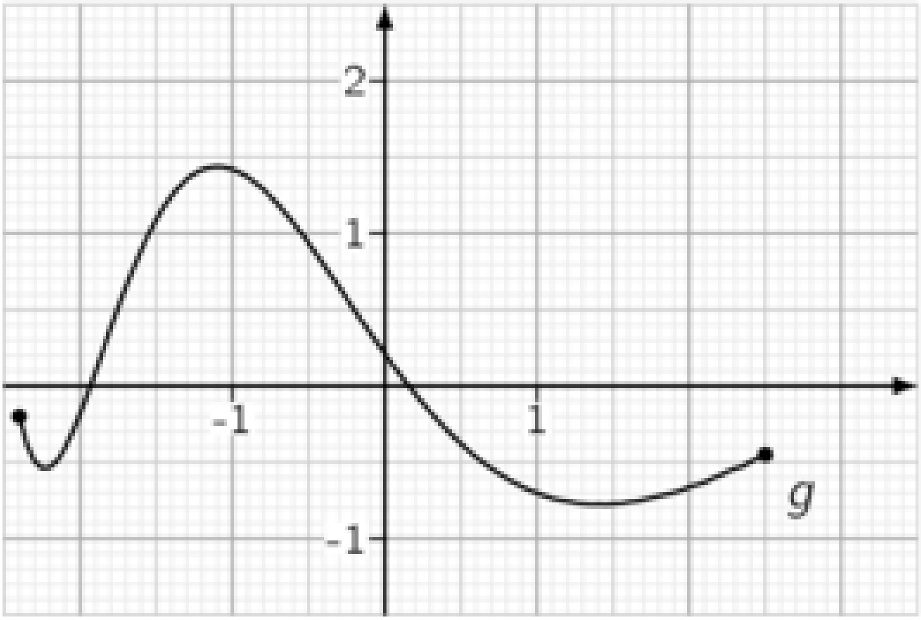


Figur

Figuren viser grafen for en funktion *f*. Bestem ved brug af grafen løsningerne til de følgende ligninger og uligheder

a. $f(x) = 2$
b. $f(x) > 2$
c. $f(x) = 1$
d. $f(x) \leq 1$

Øvelse 3142

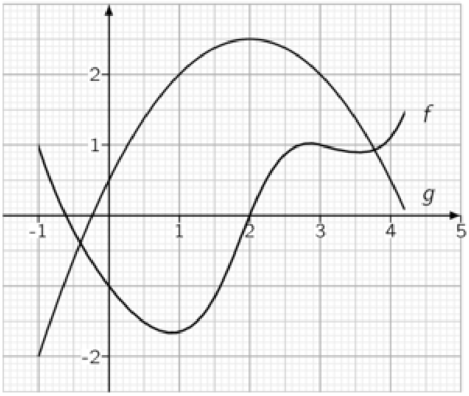


Figur

Figuren viser grafen for en funktion g. Bestem løsningerne til

a. $g(x) > 1$
b. $g(x) \leq 0$
c. $g(x) = -1$

Øvelse 3143



Figur

Figuren viser graferne for to funktioner *f* og *g*. Bestem ved aflæsning løsningen til

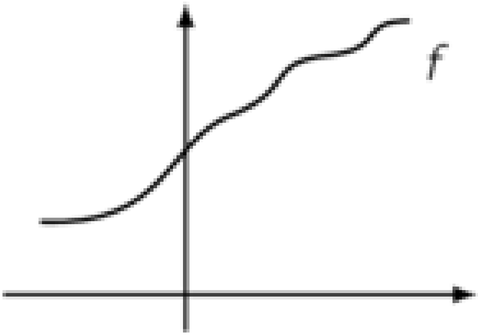
a. $g(x) = 2$
b. $g(x) < f(x)$
c. $f(x) < -1$

3.1.5 Monotoniforhold

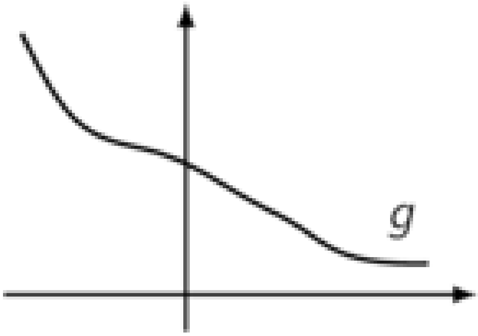
Monoton funktion

Vi siger, at en funktion er *voksende*, dersom funktionsværdierne bliver større, når *x* vokser. Hvis funktionsværdierne bliver mindre, når *x* vokser, siger vi, at funktionen er *aftagende*. En funktion, der udelukkende er voksende eller aftagende overalt i sin definitionsmængde, kalder vi *monoton* (ensformig).

ISBN 9788761685704



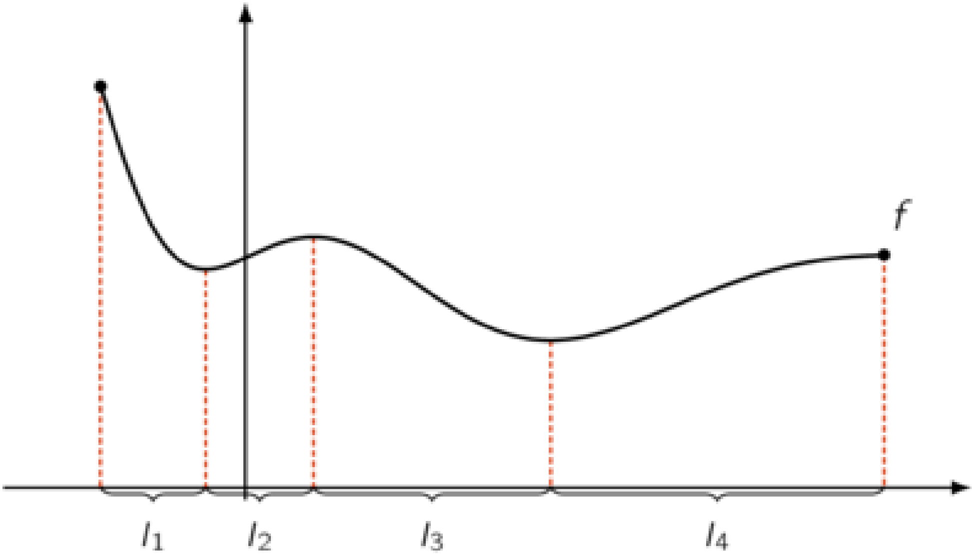
Figur 3151 *Funktionen f er voksende.*



Figur 3152 *Funktionen g er aftagende.*

Monotoniforhold

For mange funktioner vil funktionsværdierne nogle gange vokse og andre gange aftage. I disse tilfælde deler vi definitionsmængden op i de intervaller, hvorpå funktionen vokser, og de intervaller, hvorpå funktionen aftager. En sådan opdeling er illustreret på figur 3153.



Figur 3153

Intervallerne I_1, I_2, I_3 og I_4 kalder vi funktionens *monotoniintervaller*, idet *f* er monoton i disse intervaller, og vi angiver funktionens *monotoniforhold* ved at skrive

f aftager på intervallerne I_1 og I_3

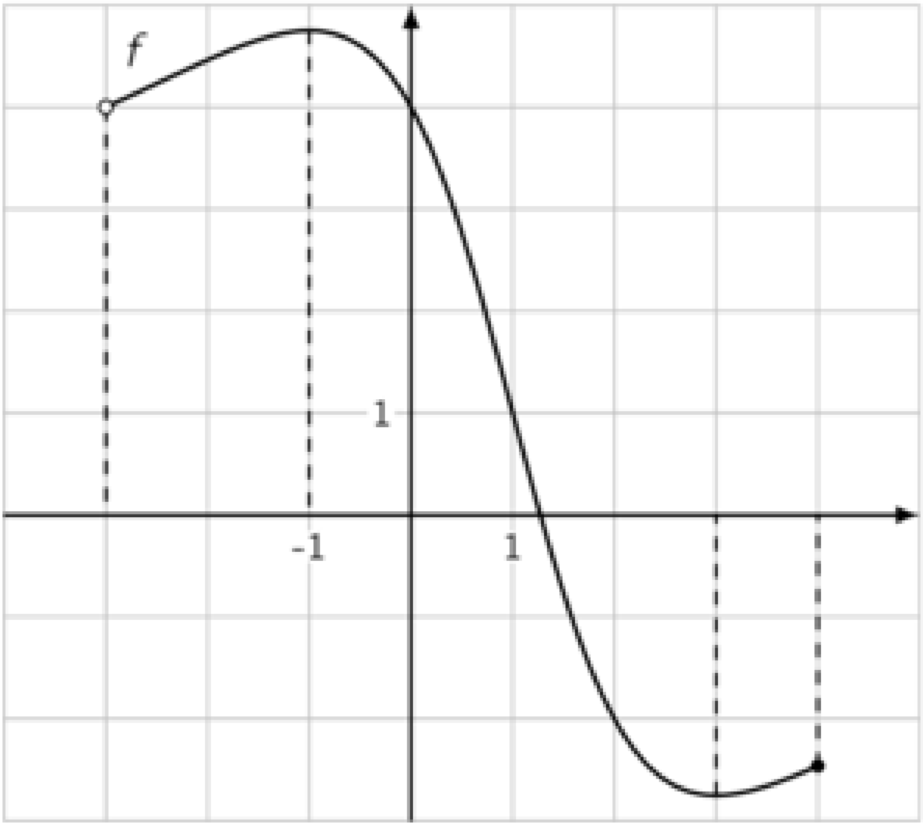
og

ISBN 9788761685704

f vokser på intervallerne I_2 og I_4

Eksempel 3151

Figur 3154 indeholder grafen for funktionen *f*.



Figur 3154

Af figuren aflæser vi monotoniforholdene for *f* til

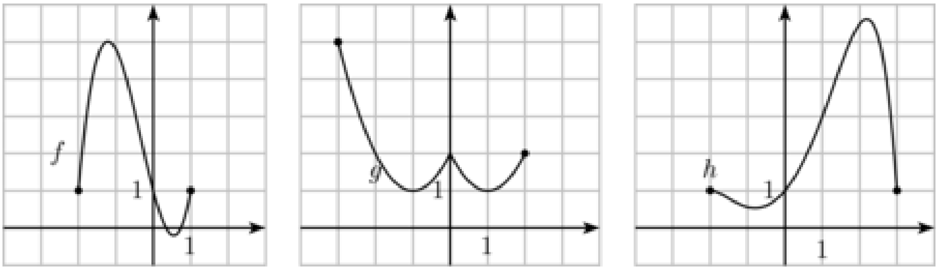
f er voksende på intervallet $]-3;-1]$ og på intervallet $[3;4]$

f er aftagende på intervallet $[-1;3]$

ISBN 9788761685704

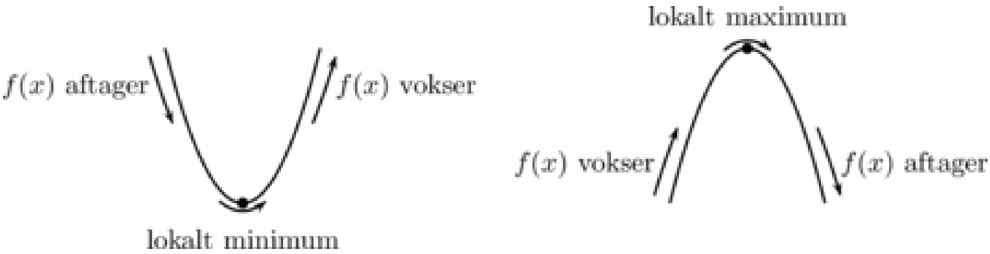
Øvelse 3151

Aflæs og opskriv monotoniintervaller for hver af de tre funktioner *f*, *g* og *h*, hvis grafer er vist nedenfor.



Lokalt maksimum og lokalt minimum

En *x*-værdi, hvori funktionen skifter monotoni, er enten et *lokalt minimumspunkt* eller et *lokalt maksimumspunkt*. Den tilhørende funktionsværdi $f(x)$ er henholdsvis et *lokalt minimum* eller et *lokalt maksimum* for funktionen *f*.



Figur 3155
Disse *ekstremumspunkter*, som er endepunkter i monotoniintervallerne, kan vi beregne ud fra forskriften ved hjælp af den såkaldte differentialregning, som er en del af B-niveauet.

3.1.6 Egenskaber ved grafer

Grafen for en funktion afspejler naturligvis egenskaber ved funktionen, og vi kan ud fra grafen ofte afsløre disse. Er funktionen givet ved en regneforskrift, kan vi efterfølgende forsøge at eftervise de aflæste egenskaber.

ISBN 9788761685704

Skæring med akserne

Grafen for en funktion f kan kun skære y-aksen i ét punkt. I dette punkt er $x = 0$, så punktets y-koordinat er $f(0)$. Punktet har dermed koordinaterne $(0, f(0))$.

I ethvert punkt på x-aksen er y-koordinaten 0. En graf for en funktion f skærer dermed x-aksen, når $f(x) = 0$, og løsningerne til ligningen

$$f(x) = 0$$

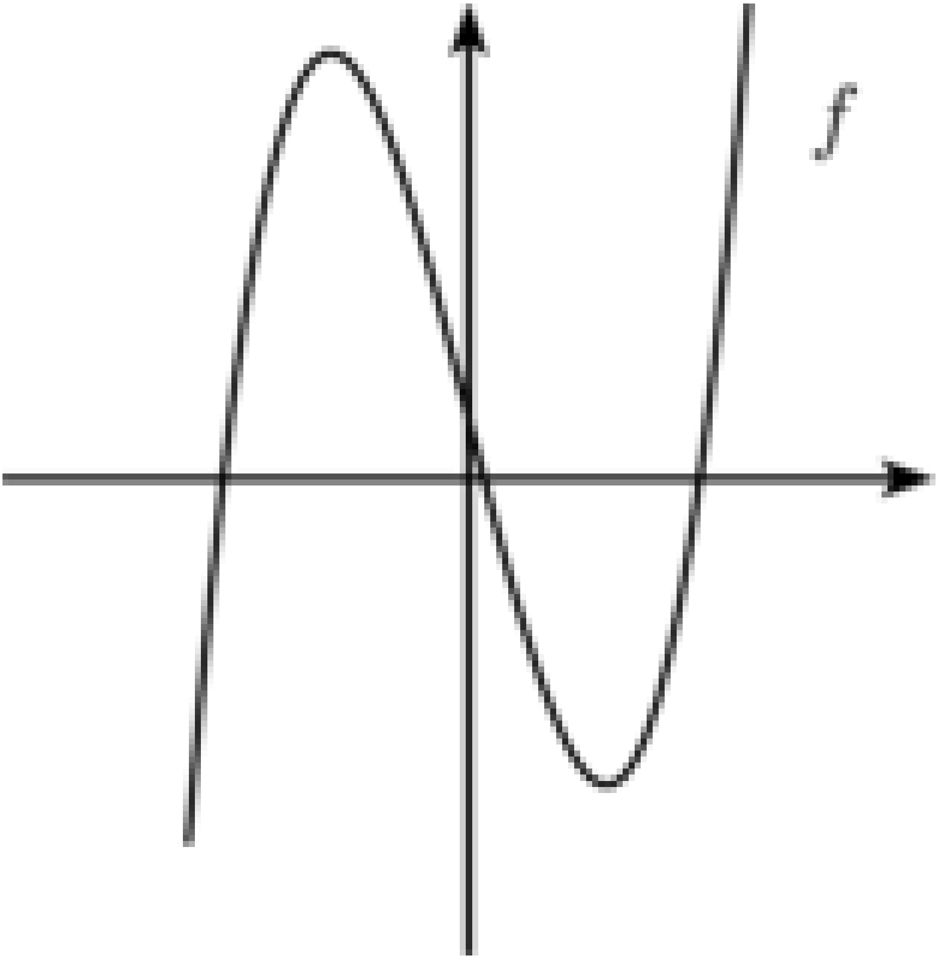
kalder vi funktionens *nulpunkter*.

ISBN 9788761685704

Eksempel 3161

Figur 3161 viser grafen for funktionen

$$f(x) = x^3 - 4x + \frac{1}{2}$$



Figur 3161 *Grafen for*

$$f(x) = x^3 - 4x + \frac{1}{2}$$

Grafen har fire skæringspunkter med akserne, og da

$$f(0) = 0^4 - 4 \cdot 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ISBN 9788761685704

har skæringspunktet med y-aksen koordinaterne $(0, \frac{1}{2})$.

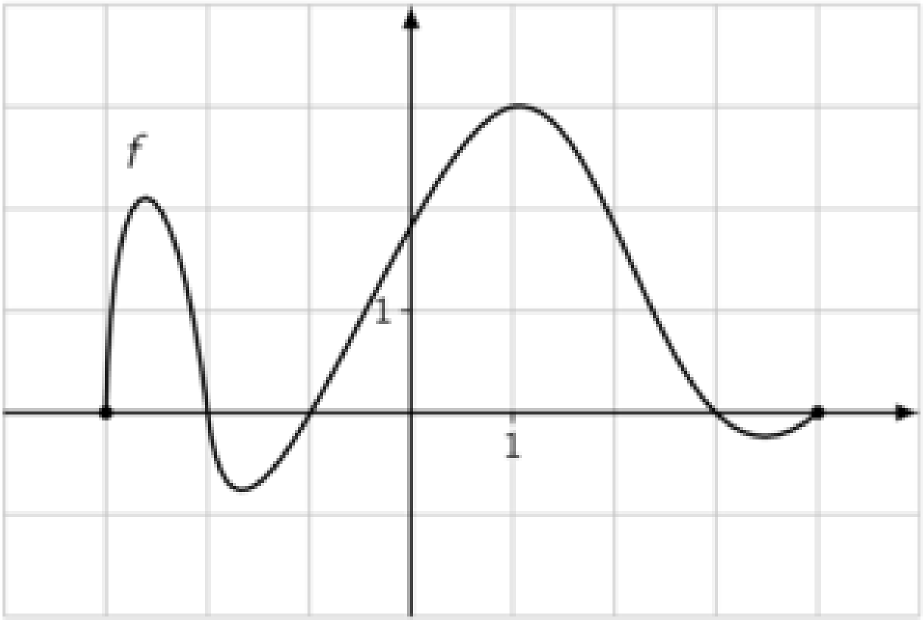
De tre nulpunkter viser, at ligningen

$$x^3 - 4x + \frac{1}{2} = 0$$

har tre løsninger. Ligningen er en tredjegradsligning, som vi kan løse vha. et CAS-program.

Øvelse 3161

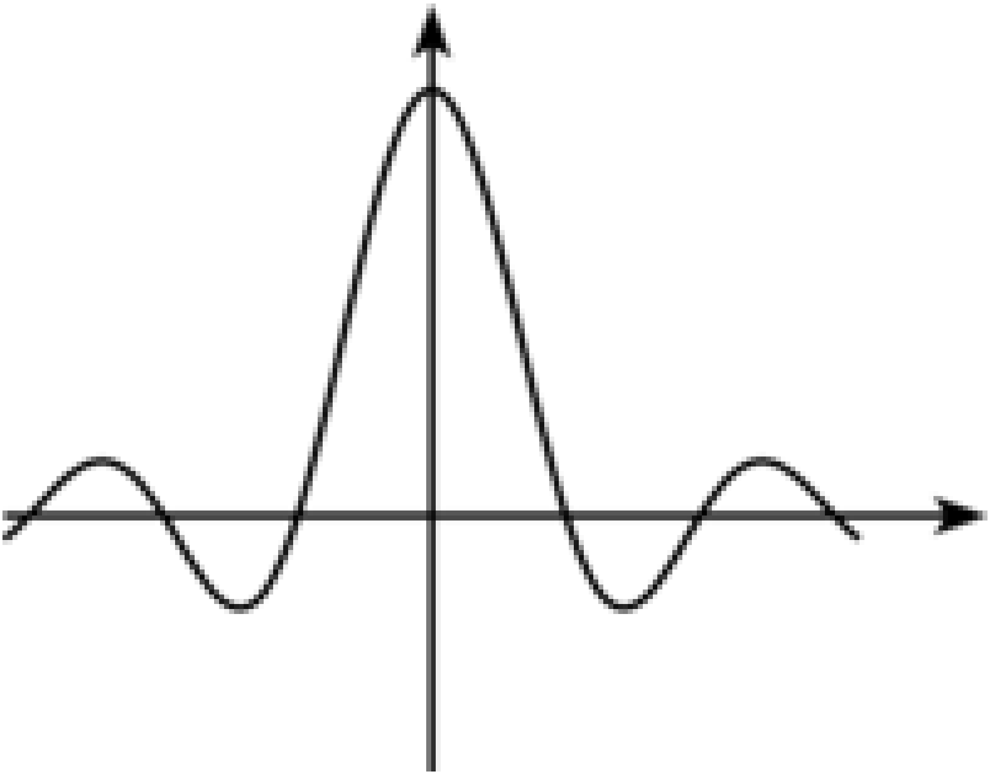
Aflæs nulpunkterne for funktionen f med den følgende graf



ISBN 9788761685704

Symmetri om y-aksen

Figur 3163 viser grafen for en funktion, som er symmetrisk. Spejler vi den del af grafen, som svarer til $x > 0$, vil den spejlede del falde sammen med den del af grafen, som svarer til $x < 0$.



Figur 3163
Når grafen er symmetrisk omkring y-aksen, må

$$f(x) = f(-x)$$

og vi kalder funktionen *lige*.

ISBN 9788761685704

Øvelse 3162

Afgør, om den anførte funktion er lige.

a. $f(x) = x^2 + 10$
b. $g(x) = -x^2 + 9$
c. $h(x) = x^4 + x^2$
d. $k(x) = x^4 + x$

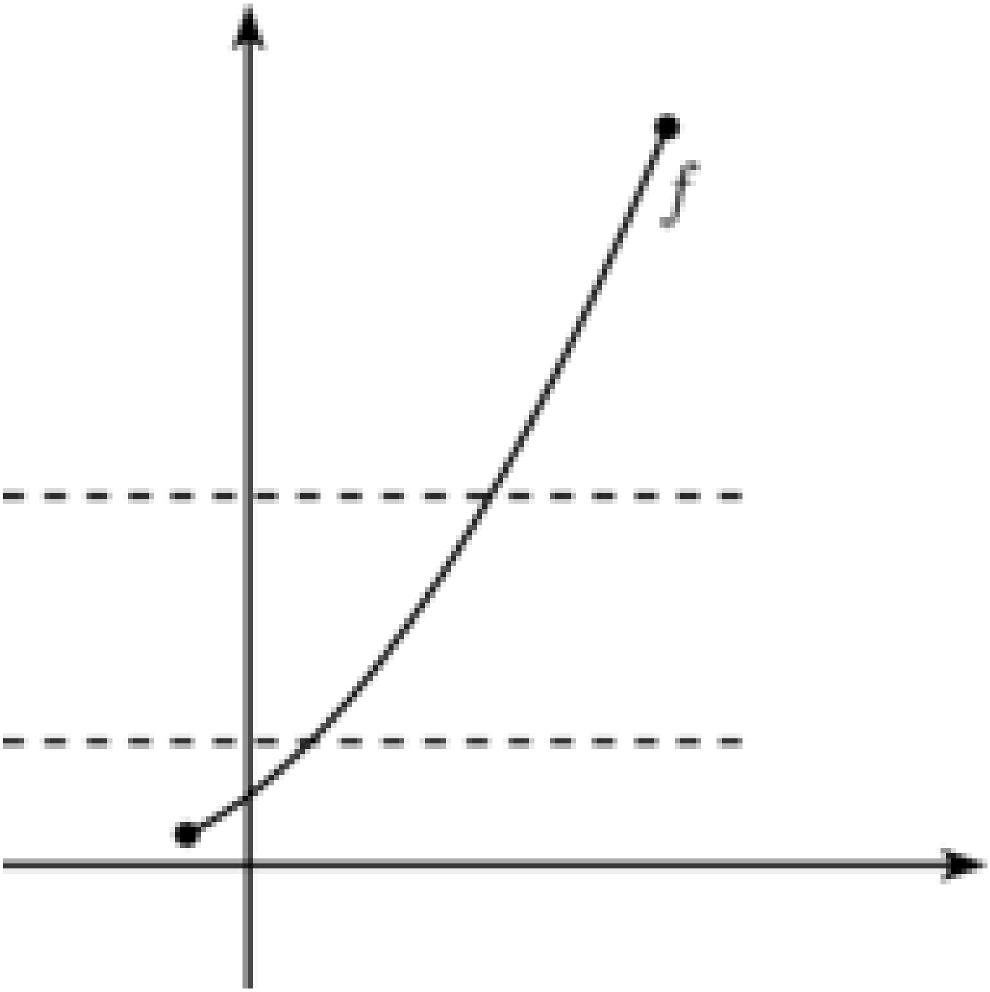
3.1.7 Omvendt funktion

Vandret-kriteriet og omvendt funktion

Vi betragter grafen for funktionen f i figur 3171.

Uanset hvilken vandret linje vi tegner, vil den vandrette linje højst skære grafen én gang.

ISBN 9788761685704



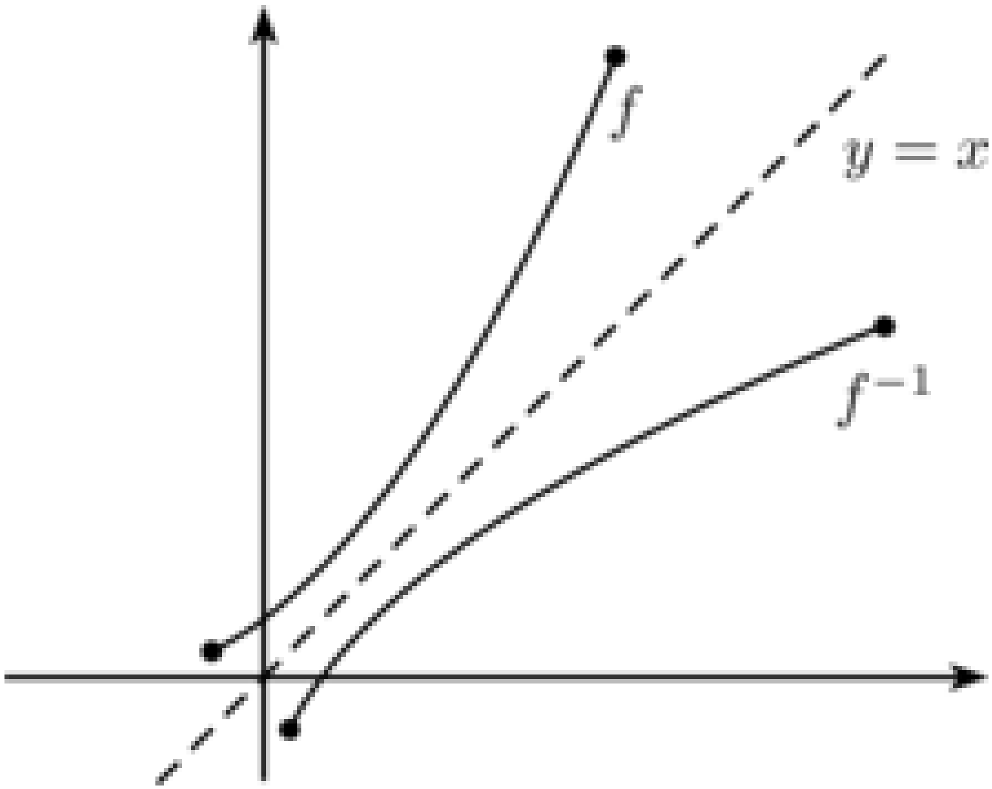
Figur 3171
Når en graf har denne egenskab, siger vi, at den opfylder *vandret-kriteriet,* og at funktionen er *injektiv*.

Spejler vi grafen for f i linjen med ligningen $y = x$, fremkommer en kurve, som opfylder lodret-kriteriet.

Kurven er dermed grafen for en funktion, og denne funktion kalder vi den *omvendte funktion* til f.

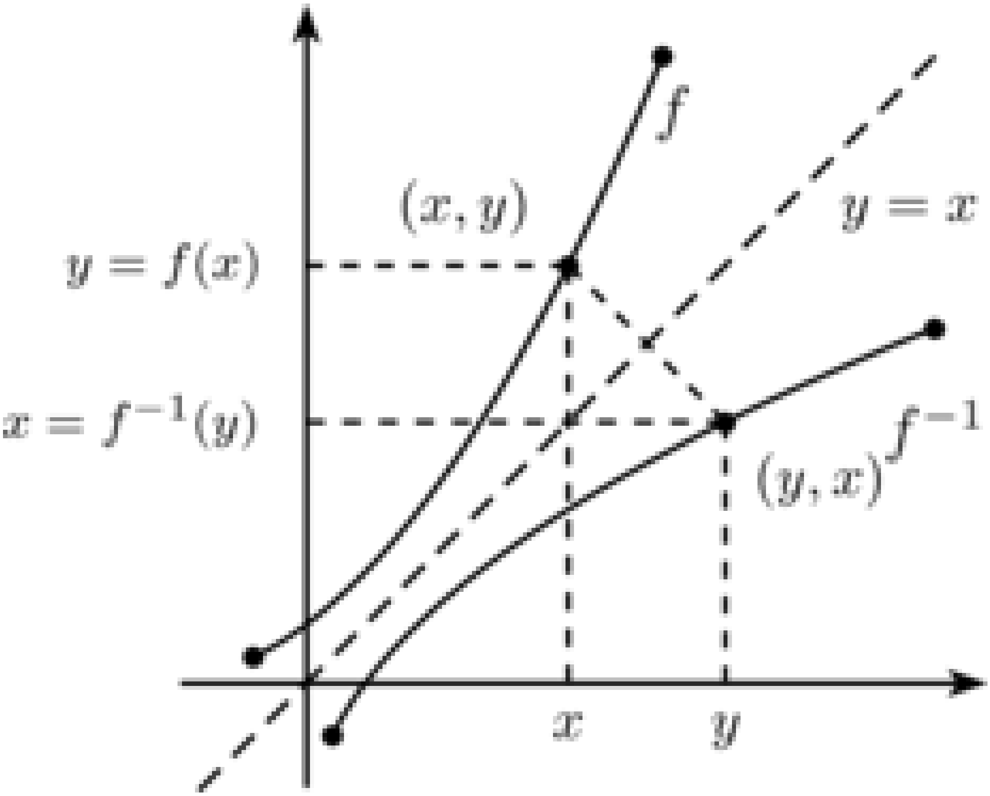
Den omvendte funktion betegner vi med f^{-1}, se figur 3172.

ISBN 9788761685704



Figur 3172
Spejlingen svarer til "en ombytning" af *y*-aksen og *x*-aksen, og ved spejlingen bliver punktet (*x*,*y*) på grafen for *f* ført over i punktet (*y*,*x*).

ISBN 9788761685704



Figur 3173

Altså er

$$Dm(f^{-1}) = Vm(f)$$
$$Vm(f^{-1}) = Dm(f)$$

Endvidere "ophæver" f og f^{-1} hinanden, idet

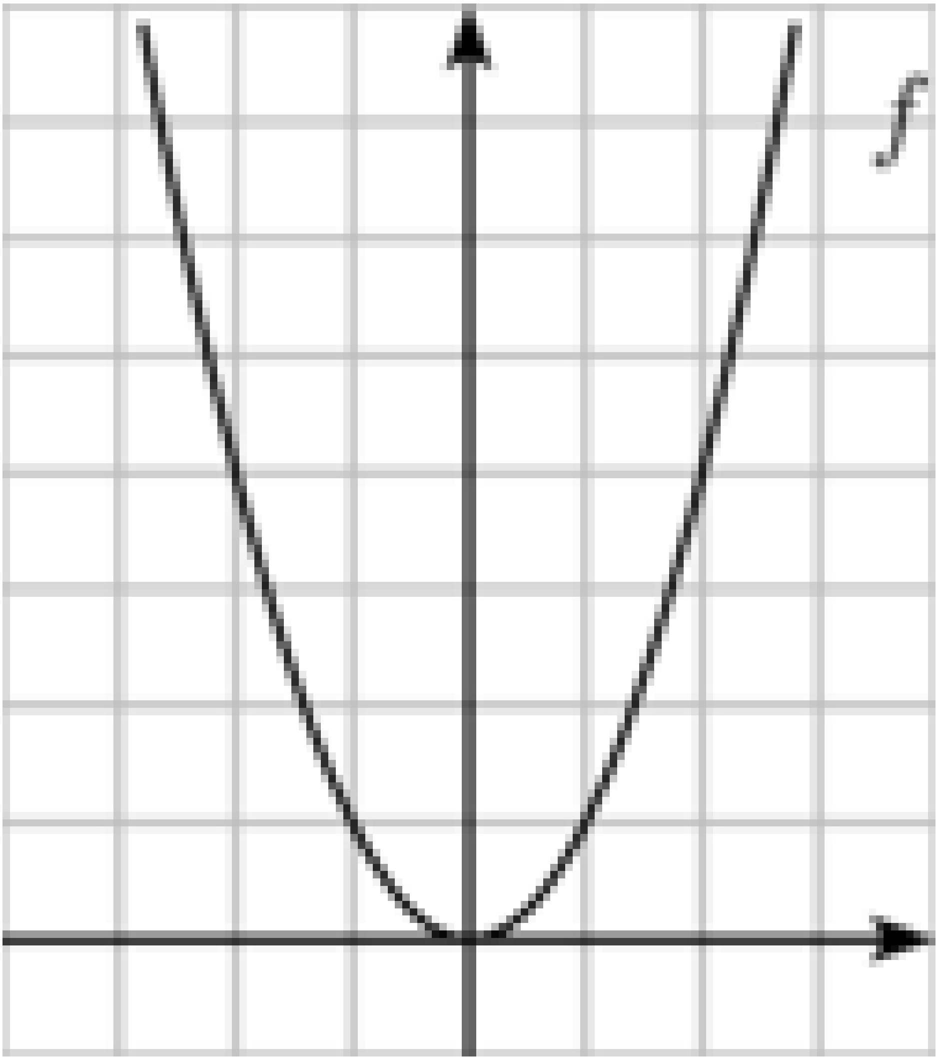
$$f^{-1}(f(x)) = x \ , \quad x \in Dm(f) \tag{3171}$$

$$f(f^{-1}(x)) = x \ , \quad x \in Dm(f^{-1}) \tag{3172}$$

ISBN 9788761685704

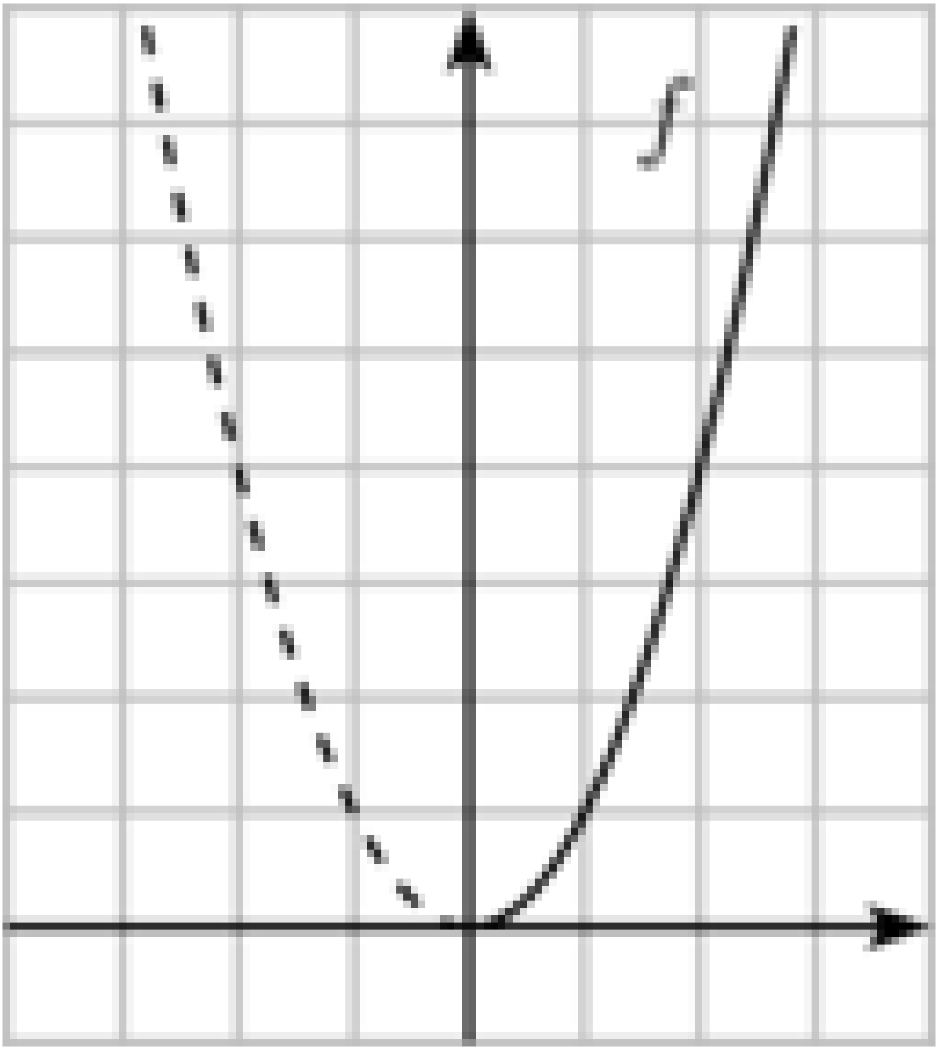
Eksempel 3171

Grafen for funktionen $f(x) = x^2$ er en parabel, der er symmetrisk omkring y-aksen, fordi funktionen er lige, se figur 3174.



Figur 3174

Grafen opfylder ikke vandret-kriteriet, men hvis vi begrænser definitionsmængden til $x \geq 0$, er grafen en halv parabel, som vist i figur 3175.

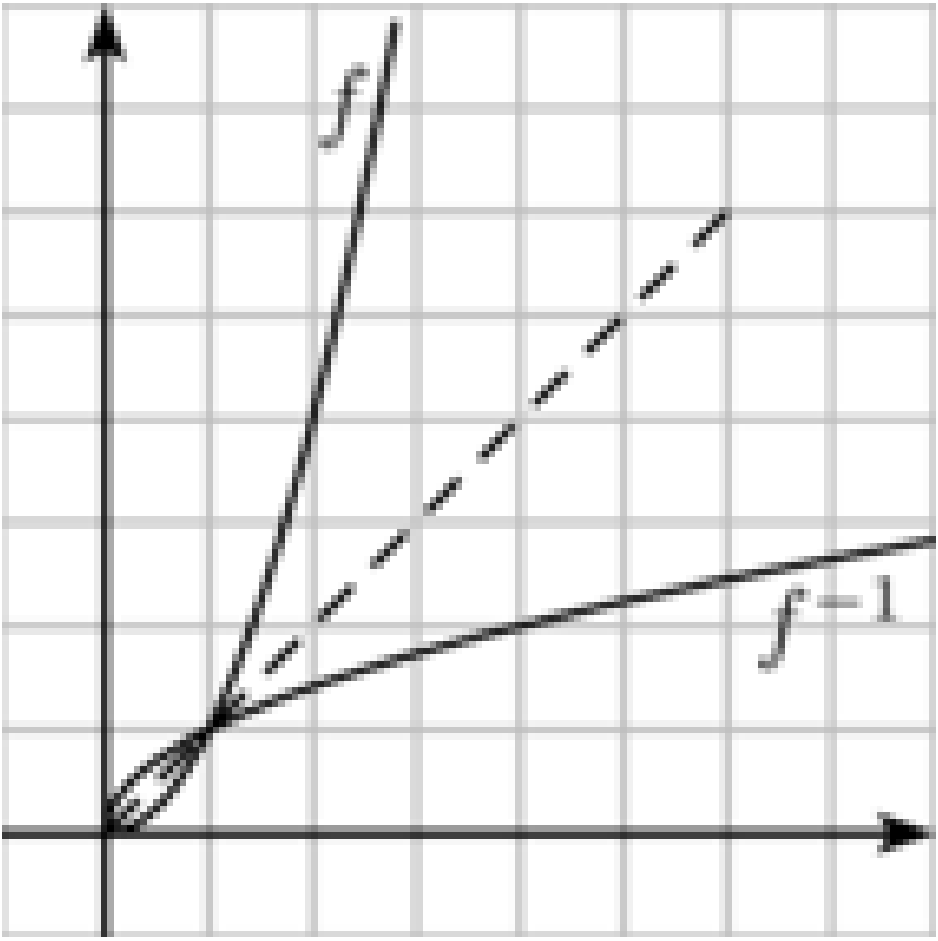


Figur 3175
Denne graf opfylder vandret-kriteriet, og dermed har funktionen

$$f(x) = x^2 \quad , \qquad x \geq 0$$

en omvendt funktion f^{-1}, hvis graf fremgår af figur 3176.

ISBN 9788761685704



Figur 3176
Når $x^2 = y$ og $x \geq 0$, er $x = \sqrt{y}$, så den omvendte funktion f^{-1} er kvadratrodsfunktionen

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} \ , \quad x \geq 0$$

Af udtrykkene

$$\sqrt{x^2} = x \quad \text{for alle } \ x \geq 0 \quad \text{og} \quad (\sqrt{x})^2 = x \quad \text{for alle } \ x \geq 0$$

fremgår det også klart, at x^2 og $\sqrt{x}$ er hinandens omvendte, da de kan "ophæve" hinanden.

ISBN 9788761685704

Eksempel 3172

Vi betragter funktionen

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 3\ ,\ \ x \in \mathbb{R}$$

Sætter vi $f(x) = y$, finder vi

$$\begin{aligned} & y = \frac{1}{2}x + 3 \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{1}{2}x = y - 3 \\ \Leftrightarrow\quad & x = 2y - 6 \end{aligned}$$

Hermed har vi med ensbetydende regninger fået udtrykt x som funktion af y. Altså er f injektiv, og den omvendte funktion til f er

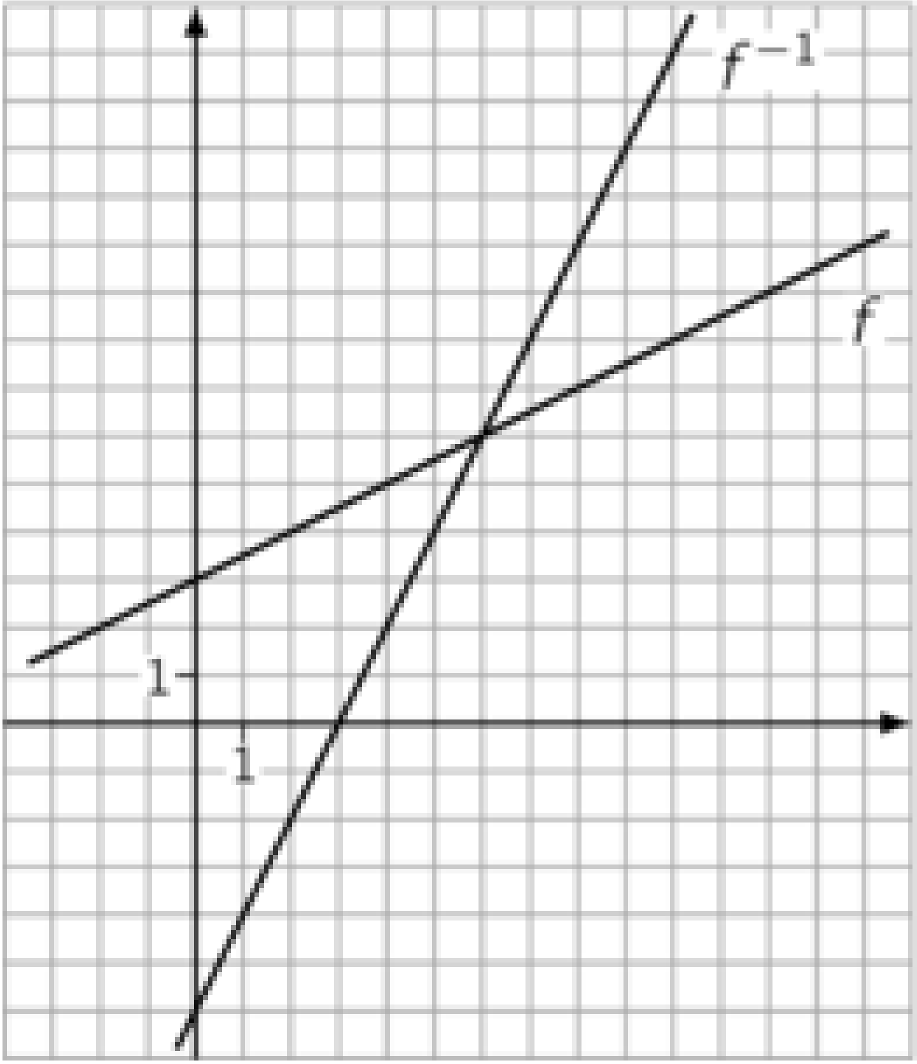
$$f^{-1}(y) = 2y - 6$$

Som sædvanlig foretrækker vi at benytte x som variabel, så vi omdøber y til x i denne forskrift.

Dermed har vi fundet

$$f^{-1}(x) = 2x - 6\ ,\ \ x \in \mathbb{R}$$

ISBN 9788761685704



Figur 3177

ISBN 9788761685704

Øvelse 3171

Bestem den omvendte funktion til hver af de følgende injektive funktioner.

a. $f(x) = -2x + 4\ ,\ x \in \mathbb{R}$
b. $f(x) = \frac{1}{3}x + 1\ ,\ x \in \mathbb{R}$
c. $f(x) = \sqrt{x}\ ,\ x \geq 0$
d. $f(x) = 0{,}25x\ ,\ x \in \mathbb{R}$

3.2 Lineære funktioner

3.2.1 Grundbegreber

En ligning på formen

$$y = ax + b$$

fastlægger en ret linje i et koordinatsystem, som ikke er lodret. Linjen opfylder lodret-kriteriet og kan derfor opfattes som graf for en funktion, som vi kalder lineær.

Definition 3211 (Lineær funktion)

En funktion *f* kalder vi lineær, hvis *f* har en forskrift på formen

$$f(x) = ax + b\ , \quad x \in Dm(f)$$

hvor *a* og *b* er reelle tal.

Tallet *a* kalder vi *hældningskoefficienten* (eller hældningen), og tallet *b* kalder vi *konstantleddet*.

Ifølge definitionen er en funktion lineær, hvis dens graf er en ret linje eller dele af en ret linje.

Den maksimale definitionsmængde for en lineær funktion er alle reelle tal. Hvis hældningskoefficienten *a* er positiv, er funktionen voksende, og hvis *a* er negativ, er funktionen aftagende.

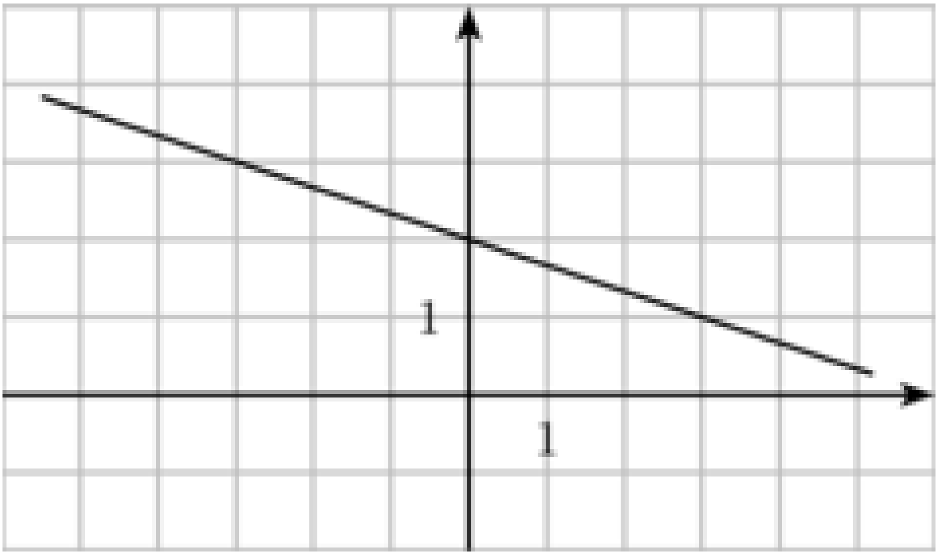
ISBN 9788761685704

Eksempel 3211

For den lineære funktion *f* med forskrift

$$f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$$

er $a = -\frac{1}{3}$ og *b* = 2, og grafen en ret linje, som skærer *y*-aksen i (0,2).

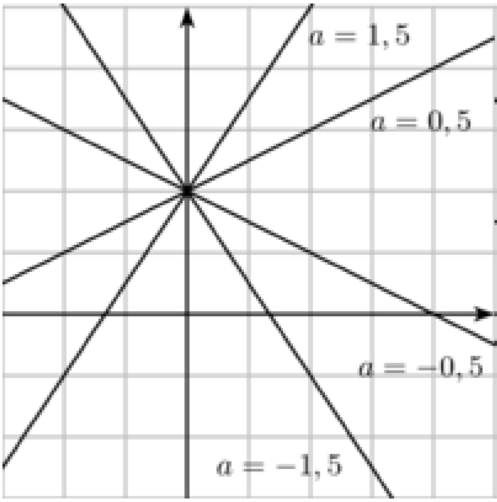


Figur 3211 *Grafen for*

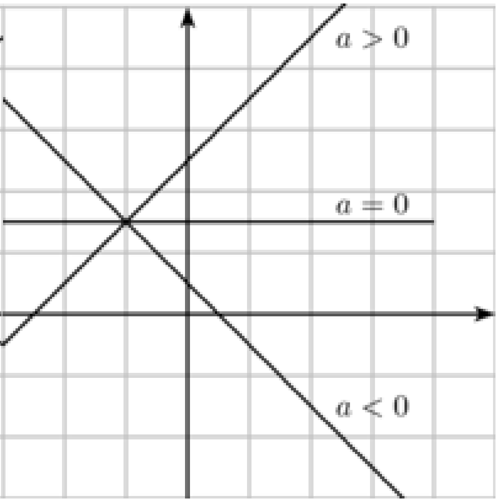
$$f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$$

Hældningskoefficienten

Hældningskoefficienten a fastlægger, hvor stejl grafen er, se figur 3212. Figur 3213 illustrerer, at funktionen er voksende, når $a > 0$, konstant når $a = 0$ og aftagende når $a < 0$.



Figur 3212 *Grafer for f (x) = ax + 2*



Figur 3213

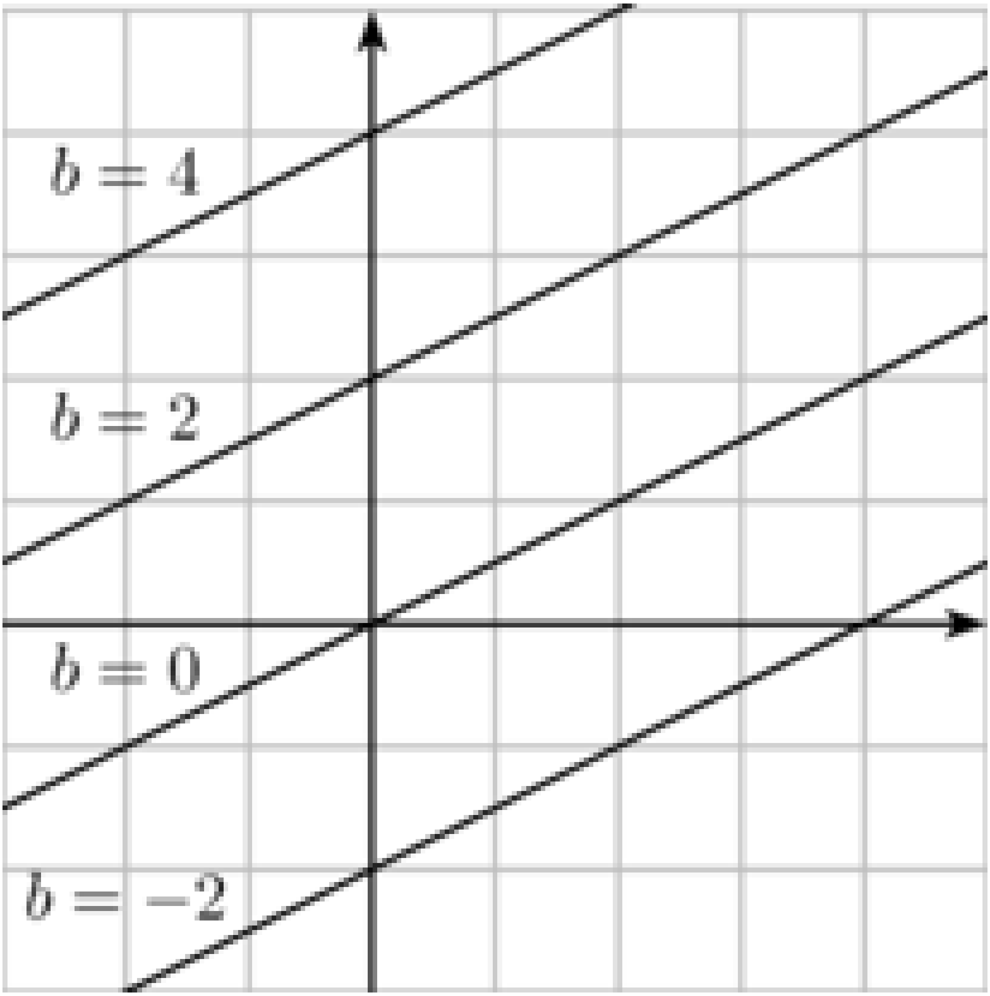
Når hældningskoefficienten er 0, bliver alle funktionsværdier lig *b*. I dette tilfælde kalder vi funktionen *konstantfunktionen*, og grafen for denne er en vandret linje.

Konstantleddet

Konstantleddet b fastlægger grafens skæring med *y*-aksen. Grafen vil altid skære *y*-aksen i (0,*b*), fordi

$$f(0) = a \cdot 0 + b = 0 + b = b$$

ISBN 9788761685704



Figur 3124

$y = \frac{1}{2}x + b$

Hvis grafen skærer *x*-aksen, må

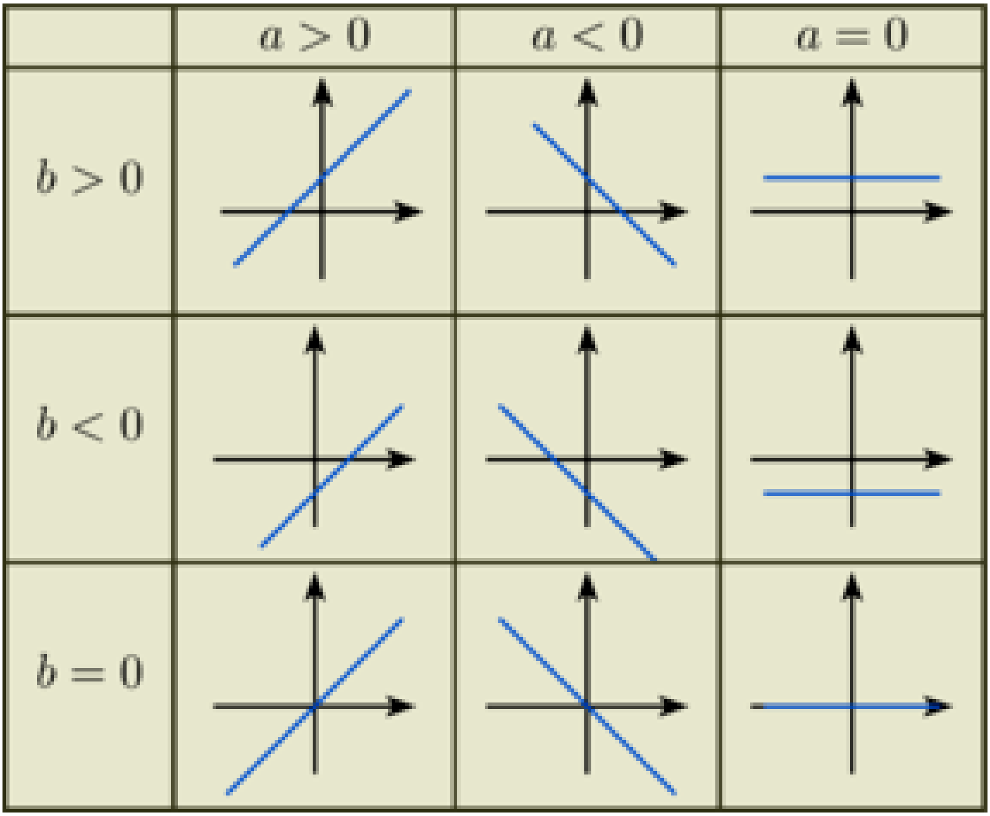
$$ax + b = 0 \;\Leftrightarrow\; ax = -b \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{b}{a}$$

som giver os punktet med koordinaterne

$$\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$$

ISBN 9788761685704

Oversigt



Figur 5.29 *Den lineære funktion f (x) = ax + b*

Øvelse 3211

Tegn grafen for

$$f(x) = 4x - 3 \quad , \quad x \in]-1,\ 3\,]$$

Øvelse 3212

Den lineære funktion *f* har forskrift

$$f(x) = -2x + 10 \quad , \quad x \in [\,0,\ 12\,]$$

Bestem koordinaterne til grafens skæringspunkt med *x*-aksen.

ISBN 9788761685704

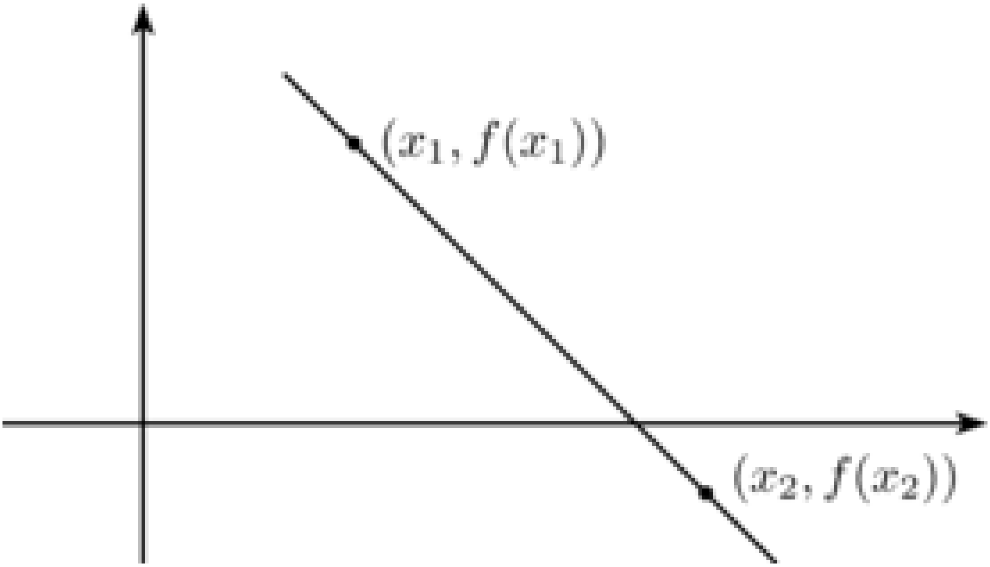
Øvelse 3213

Angiv værdimængden for funktionen

$$f(x) = -3x + 2 \ , \quad x \in [\,-1,\ 7\,[$$

3.2.2 Forskrift ud fra to punkter

Både graf og forskrift for en lineær funktion er entydigt fastlagt, hvis vi kender to forskellige punkter $(x_1, f(x_1))$ og $(x_2, f(x_2))$ på grafen, fordi to punkter er nok til at kunne tegne en ret linje.



Figur 3221

To punkter bestemmer dermed også entydigt a og b i forskriften $f(x) = ax + b$.

Værdierne af a og b kan vi beregne ved at benytte sætning 3221 nedenfor, hvis indhold vi kort omtaler som to-punktsformlerne.

ISBN 9788761685704

Sætning 3221 (Forskrift ud fra to punkter)

Antag, at grafen for en lineær funktion f går gennem de to forskellige punkter med koordinater $(x_1, f(x_1))$ og $(x_2, f(x_2))$.

Så er

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{og} \quad b = f(x_1) - ax_1$$

Bevis (Forskrift ud fra to punkter)

Når $f(x_1) = ax_1 + b$ og $f(x_2) = ax_2 + b$, er

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b) = ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1)$$

Vi har dermed, at

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$$

eller

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

hvilket er udtrykket til beregning af hældningskoefficienten.

Når vi først har beregnet a, kan vi beregne b ved at isolere b i ligningen

$$f(x_1) = ax_1 + b$$

som giver

$$b = f(x_1) - ax_1$$

Vi kan også bruge $f(x_2) = ax_2 + b$, som giver $b = f(x_2) - ax_2$.

Hvad enten vi benytter det ene eller det andet punkt, får vi naturligvis samme værdi af b.

ISBN 9788761685704

Sætning 3222 (Forskrift ud fra punkt og hældning)

Antag, at grafen for en lineær funktion med hældningskoefficient a går gennem punktet med koordinater $(x_1, f(x_1))$.

Så er forskriften for f

$$f(x) = a(x - x_1) + f(x_1)$$

Bevis (Forskrift ud fra punkt og hældning)

Når $(x_1, f(x_1))$ ligger på grafen, og vi kender hældningskoefficienten a, så er konstantleddet

$$b = f(x_1) - ax_1$$

ifølge sætning 3221. Dermed er

$$f(x) = ax + b = ax + f(x_1) - ax_1 = a(x - x_1) + f(x_1)$$

Eksempel 3221

Grafen for den lineære funktion f, som går gennem punkterne med koordinater $(-2, -6)$ og $(2,0)$, har hældningskoefficient

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{0 - (-6)}{2 - (-2)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

og konstantleddet

$$b = f(x_1) - ax_1 = -6 - \frac{3}{2}(-2) = -6 + 3 = -3$$

Forskriften for f er dermed

$$f(x) = \frac{3}{2}x - 3$$

ISBN 9788761685704

Eksempel 3222

Grafen for en lineær funktion *f* har hældningenskoefficient 4 og går gennem punktet med koordinater (1,3). Forskriften for *f* bliver

$$f(x) = 4(x-1)+3 = 4x-4+3 = 4x-1$$

Øvelse 3221

Bestem hældningskoefficienten for den lineære funktion *f*, hvis graf går gennem punkterne med de givne koordinater.

a. (–2,3) og (6,7)
b. (–2,3) og (4,3)
c. (–2,3) og (4,–3)

Øvelse 3222

Find forskriften for den lineære funktion *f*, hvis graf går gennem punkterne med koordinater (–2,7) og (5,–3).

Øvelse 3223

a. Bestem forskriften for den lineære funktion *f* med hældningskoefficient –3, hvis grafen går gennem punktet med koordinater (1,5).
b. Bestem forskriften for den lineære funktion *h*, hvis graf går gennem punktet med koordinater (–3,1), og hvis graf er parallel med grafen for funktionen $g(x) = 2x + 5$

Øvelse 3224

Find forskriften for den lineære funktion *f*, som opfylder, at

$$f(2) = -7 \qquad \text{og}$$
$$f(-6) = 1$$

ISBN 9788761685704

Øvelse 3225

En lineær funktion f_t har forskrift

$$f_t(x) = (2 + t)x + 3t$$

hvor t er reelt tal.

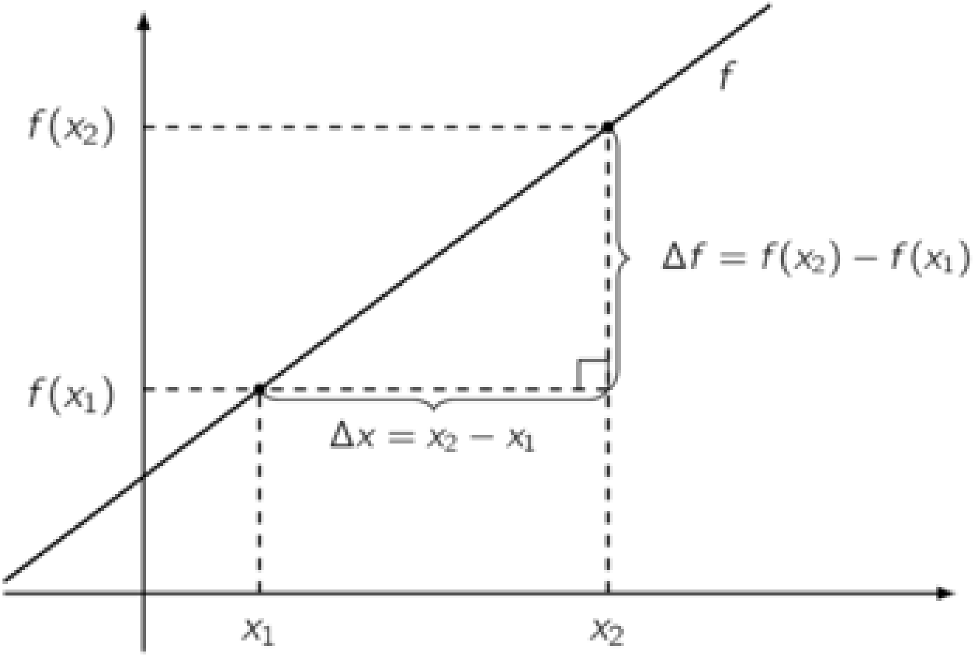
a. Angiv forskriften for f_2.
b. Bestem t, så grafen for f_t går gennem (1,4).
c. Bestem t, så grafen for f_t er parallel med x-aksen.

3.2.3 Vækstegenskaber

Vi benytter generelt symbolet Δ, det græske bogstav delta, til at angive en ændring af en størrelse. Ændringen svarer til en differens mellem to værdier af størrelsen.

Sætter vi $\Delta x = x_2 - x_1$ og $\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$, er Δx en ændring i x og Δf den tilhørende ændring i funktionsværdier. Størrelserne Δx og Δf kalder vi henholdsvis *tilvæksten* i x og *tilvæksten* i funktionsværdier $f(x)$.

Begreberne er illustreret på figur 3231 for en lineær funktion $f(x) = ax + b$.



Figur 3231

ISBN 9788761685704

Med denne notation kan vi skrive udtrykket for hældningskoefficienten for f i sætning 3221 som

$$a = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

og så kan vi udtrykke tilvæksten i funtionsværdier som

$$\Delta f = a \cdot \Delta x \qquad (3231)$$

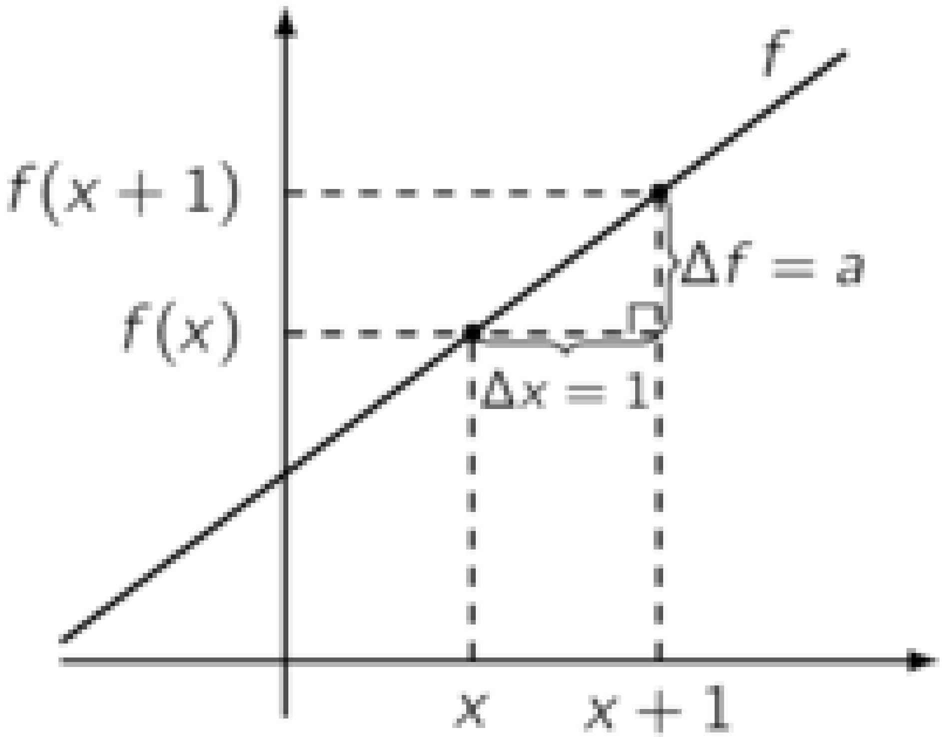
Dvs. at for en lineær funktion er tilvæksten i funktionsværdier en konstant (hældningskoefficienten a) gange tilvæksten i x.

Dette er den karakteristiske vækstegenskab ved den linære funktion.

Vælger vi specielt de to værdier x og $x + 1$, er tilvæksten $\Delta x = 1$ og

$$\Delta f = a \cdot \Delta x = a \cdot 1 = a$$

Det betyder, at tilvæksten i de tilhørende funktionsværdier bliver hældningskoefficienten a, se figur 3232.



Figur 3232

Eksempel 3231

Vi ser på den linære funktion $f(x) = 8x - 5$.

En tilvækst i x på 1 giver en tilvækst på 8 i funktionsværdien.
En tilvækst i x på 5 giver en tilvækst på $8 \cdot 5 = 40$ i funktionsværdien.

Eksempel 3232

For den lineære funktionen $g(x) = -25x + 1000$ vil en x-tilvækst på 12 give en tilvækst på $-25 \cdot 12 = -300$ i funktionsværdien.

Dette svarer til, at $g(x)$ aftager med 300.

Øvelse 3231

For en lineær funktion er $a = 6$. Beregn

a. Δf, når Δx er 3
b. x-tilvæksten, når f-tilvæksten er 30
c. forskellen i $f(x)$, når forskellen i x er 20

Øvelse 3232

For en lineær funktion er $a = -\frac{1}{2}$.

Beregn

a. Δf, når Δx er $-\frac{2}{3}$
b. x-tilvæksten, når tilvæksten i $f(x)$ er $-\frac{4}{3}$
c. forskellen i $f(x)$, når forskellen i x er 2

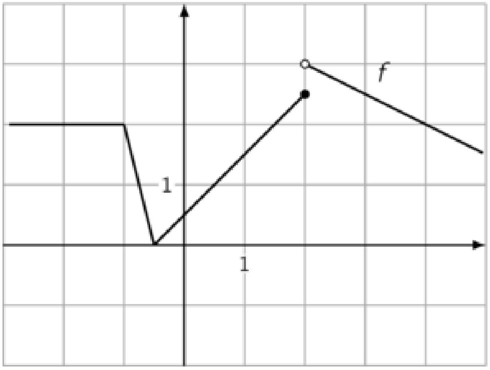
3.2.4 Stykkevis lineære funktioner

ISBN 9788761685704

Sumkurver i statistik er grafer, som er sammensat af linjestykker og halvlinjer med varierende hældninger. Kurven er graf for en stykkevis lineær funktion i overensstemmelse med den følgende definition.

Definition 3241 (Stykkevis lineær funktion)

En funktion f kalder vi *stykkevis lineær*, hvis dens graf er sammensat af linjestykker og/eller halvlinjer.



Figur 3241

Grafen for en stykkevis lineær funktion f

For at angive regneforskriften for en stykkevis lineær funktion, skal vi lave en opdeling af definitionsmængden, svarende til hver del af grafen, og angive de forskrifter, der gælder på hver del.

Hertil benytter vi en såkaldt *gaffelforskrift*.

ISBN 9788761685704

Eksempel 3241

Et eksempel på en gaffelforskrift er

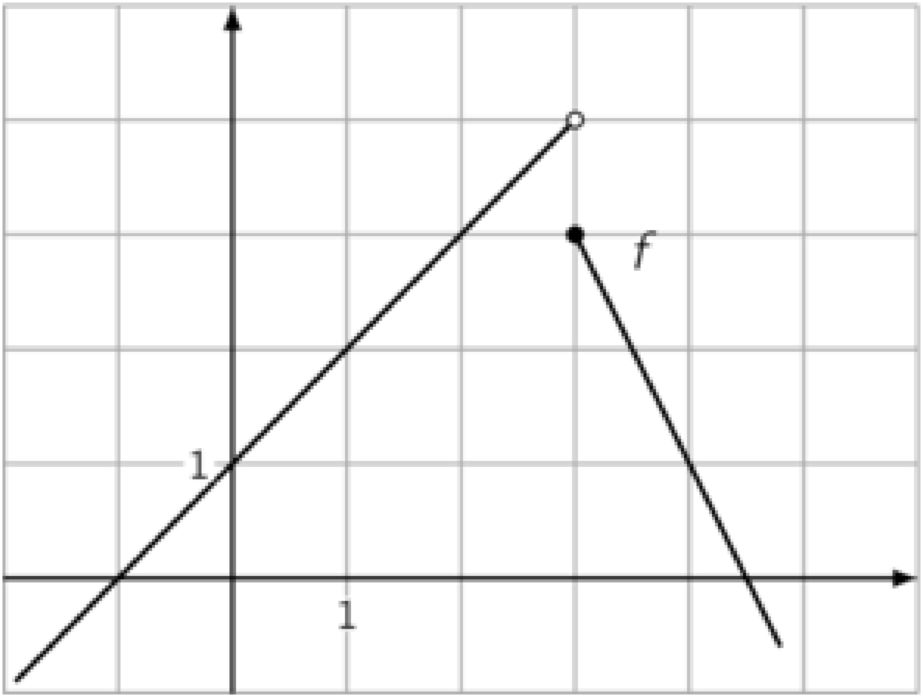
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{når } x < 3 \\ -2x+9 & \text{når } x \geq 3 \end{cases}$$

Når vi skal beregne *f*(*x*), afgør vi først om tallet *x* er større eller mindre end 3. Hvis *x* er mindre end 3, skal vi indsætte i *x* + 1, ellers i −2*x* + 9.

Vi får

$$f(2) = 2+1 = 3$$
$$f(5) = -2 \cdot 5 + 9 = -1$$
$$f(3) = -2 \cdot 3 + 9 = 3$$

Funktionen er stykkevis lineær, da ligningerne *y* = *x* + 1 og *y* = −2x + 9 svarer til rette linjer.

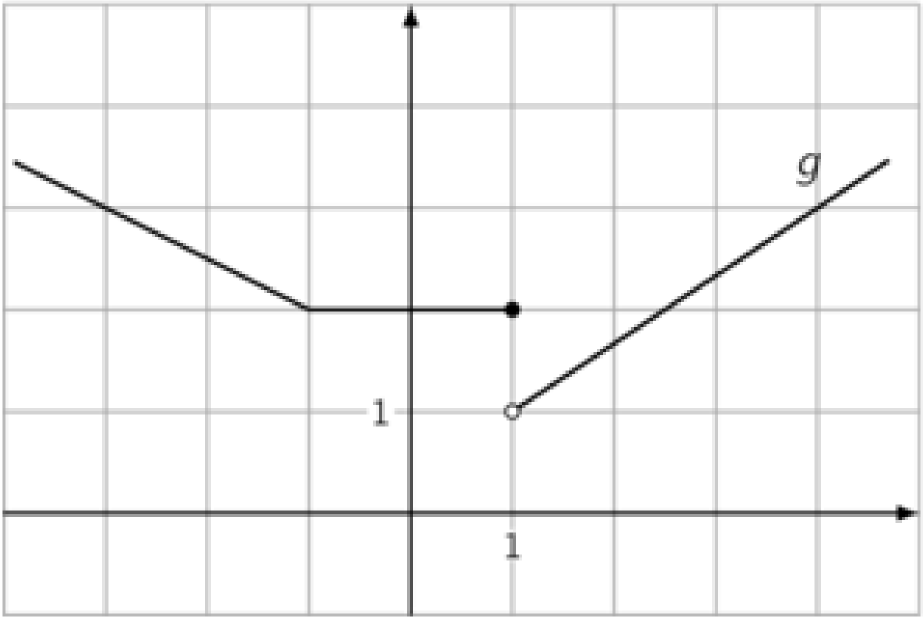


Figur 3242

ISBN 9788761685704

Eksempel 3242

Vi betragter grafen for den stykkevise lineære funktion *g*



Figur 3243

Grafen består af en halvlinje, når $x \leq -1$, et linjestykke, når $-1 < x \leq 1$ og en halvlinje, når $x > 1$.

Forskriften for *g* er

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & \text{når } x \leq -1 \\ 2 & \text{når } -1 < x \leq 1 \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} & \text{når } x > 1 \end{cases}$$

Vi kunne også have valgt ikke at medtage –1 ved den øverste delforskrift og i stedet medtage –1 ved den mellemste.

ISBN 9788761685704

Øvelse 3241

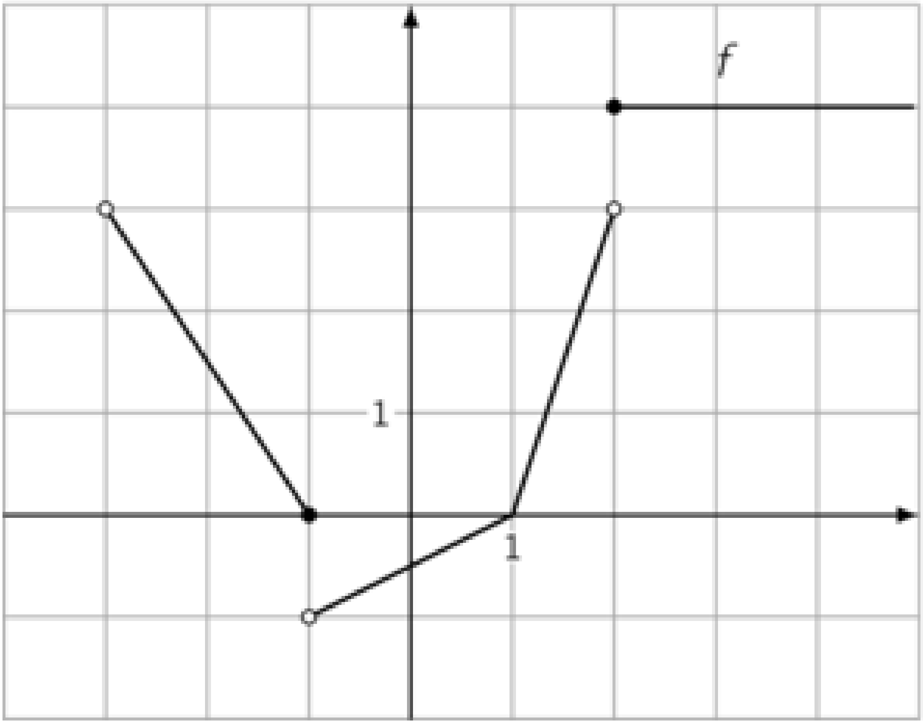
Tegn grafen for funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{når } x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x - 1 & \text{når } x > 2 \end{cases}$$

Løs ligningen $f(x) = 4$.

Øvelse 3242

Figuren viser grafen for en funktion f



Angiv forskriften for f.

Øvelse 3243

Tegn grafen for funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x+6 & \text{når } -5 < x \leq -2 \\ -2x+1 & \text{når } -2 < x \leq 1 \\ -2 & \text{når } 1 < x \leq 4 \end{cases}$$

Løs uligheden $f(x) > \frac{1}{2}x + 3$.

ISBN 9788761685704

Eksempel 3243

Et mobilabonnement har en fast månedlig abonnementspris på 89,- kr., som inkluderer fri SMS, MMS og datatrafik. Hertil kommer betalingen for månedens forbrug af taletid, så prisen er sammensat af betaling for abonnement og betaling for taletid.

I abonnementet koster de første 100 minutters taletid pr. måned 0,75 kr. pr. minut, taletiden mellem 100 og 200 minutter pr. måned koster 0,50 kr. pr. minut, mens prisen for minutter over 200 pr. måned er 0,25 kr. pr. minut.

Vi lader x angive taletiden (i min. pr. mdr.) og $f(x)$ angiver den pris (i kr.), der skal betales pr. måned.

Hvis den månedlige taletid højst er 100 minutter, kan vi udregne omkostningerne som

$$f(x) = 89 + 0{,}75x = 0{,}75x + 89$$

Når taletiden x overstiger 100 minutter, men holder sig under 200 minutter, skal vi betale 0,75 kr for de første 100 minutter og herefter 0,50 kr. pr. min. Omkostningerne er derfor

$$\begin{aligned} f(x) &= 89 + \overbrace{0{,}75 \cdot 100}^{\text{første 100 min}} + \overbrace{0{,}5 \cdot (x - 100)}^{\text{efterfølgende min}} \\ &= 89 + 75 + 0{,}5x - 50 \\ &= 0{,}5x + 114 \end{aligned}$$

Hvis endelig taletiden x overstiger 200 minutter, skal vi betale

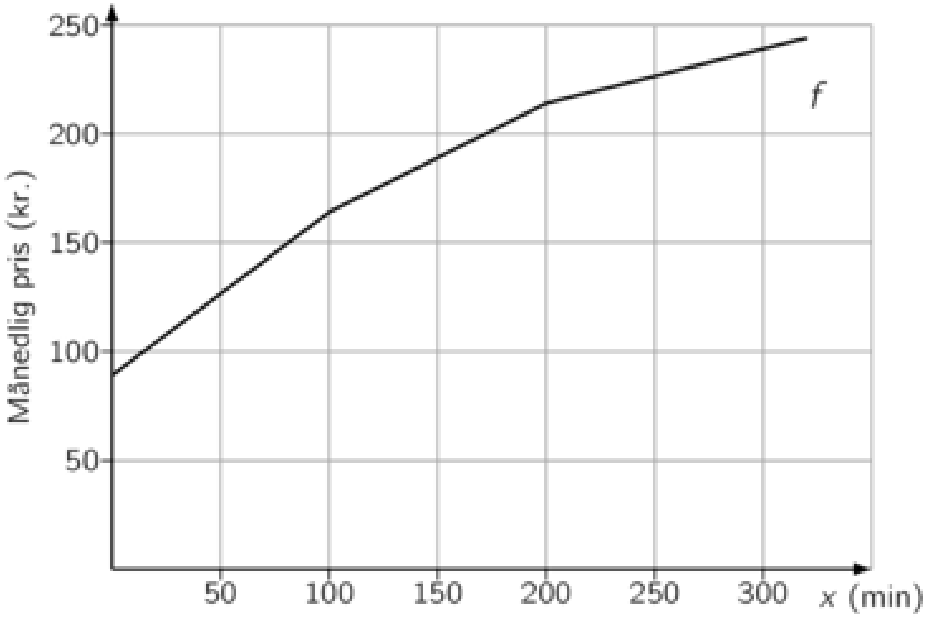
$$\begin{aligned} f(x) &= 89 + \overbrace{0{,}75 \cdot 100}^{\text{første 100 min}} + \overbrace{0{,}50 \cdot 100}^{\text{næste 100 min}} + \overbrace{0{,}25 \cdot (x - 200)}^{\text{efterfølgende min}} \\ &= 89 + 75 + 50 + 0{,}25x - 50 \\ &= 0{,}25x + 164 \end{aligned}$$

Samlet kan vi beskrive prisen $f(x)$ ved gaffelforskriften

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}75x + 89 & \text{når } 0 \leq x \leq 100 \\ 0{,}50x + 114 & \text{når } 100 < x \leq 200 \\ 0{,}25x + 164 & \text{når } x > 200 \end{cases}$$

Grafen for f er vist i figur 3244.

ISBN 9788761685704



Figur 3244

Øvelse 3244

I et land gælder følgende skattesatser for den årlige indkomstskat

- Der betales 8 % i indkomstskat af de første 50 000 kr. i indtægten
- Der betales 45 % i indkomstskat af indtægten mellem 50 000 kr. og 400 000 kr.
- Der betales 60 % i indkomstskat af indtægten over 400 000 kr.

Sæt $f(x)$ til at være indkomstskatten (i kr.) ved en årlig indtægt på x kr.

a. Angiv forskriften for indkomstskatten $f(x)$.
b. Hvor meget skal der betales i indkomstskat ved en årlig indtægt på 475 000 kr.?
c. Bestem indtægten hos en person, der betaler 152 500 kr. i indkomstskat.

3.2.5 Skæring mellem lineære grafer

I afsnit 1.3.3 så vi på metoder til beregning af løsningen af to ligninger med to ubekendte. Ligningerne kan også løses grafisk.

ISBN 9788761685704

Eksempel 3251

Vi vil løse de to ligninger med to ubekendte

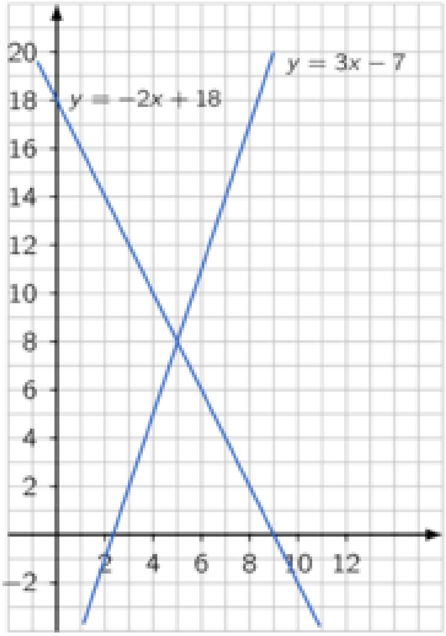
$$\begin{aligned} 3x - y &= 7 \\ 2x + y &= 18 \end{aligned} \tag{3251}$$

Isolerer vi y i hver af ligningerne, får vi

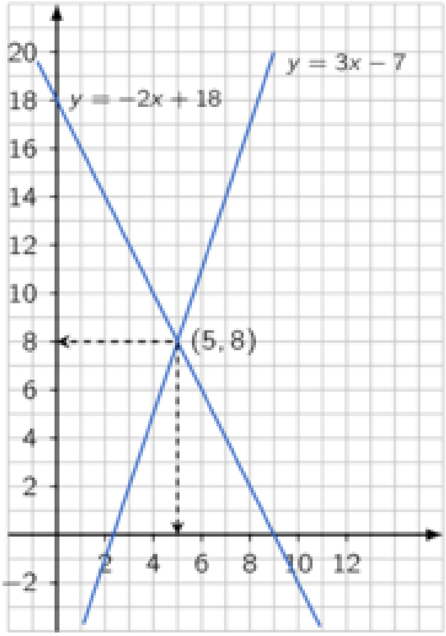
$$\begin{aligned} y &= 3x - 7 \\ y &= -2x + 18 \end{aligned} \tag{3252}$$

Udtrykkene på højre side af lighedstegnet er på formen $ax+b$, og opfatter vi y som funktion af x, viser omformningen i (3252), at ligningerne fastlægger hver sin lineære funktion. Ligningssystemet beskriver vi af denne grund som et *lineært ligningssystem*.

Et plot af de to sammenhænge i (3252) i samme koordinatsystem giver os således to rette linjer med forskellige hældningskoefficienter, som derfor skærer hinanden. De rette linjer er vist i figur 3251, og deres skæringspunkt er aflæst i figur 3252 til (5,8).



Figur 3251



Figur 3252

Ved aflæsning af skæringspunktet mellem linjerne har vi lavet en grafisk løsning af ligningssystemet i (3251).

ISBN 9788761685704

Ønsker vi i stedet at bestemme løsningen ved beregning, kan vi sætte de to udtryk for y i (3252) lig hinanden og isolere x.

$$\begin{aligned} & 3x-7=-2x+18 \\ \Leftrightarrow\quad & 5x=25 \\ \Leftrightarrow\quad & x=5 \end{aligned}$$

Da $y = 3x - 7$, bliver den tilhørende y-værdi

$$y=3\cdot 5-7=8$$

Vi har hermed genfundet løsningen til ligningssystemet til $(x, y) = (5{,}8)$.

ISBN 9788761685704

Eksempel 3252

En forbrugerundersøgelse viser, at en ny model af en elkedel kan sælges for 320 kr.

Til produktion af op til 850 elkedler vil kapacitetsomkostninger være 67 440 kr., mens de variable omkostninger er 200 kr. pr. kedel.

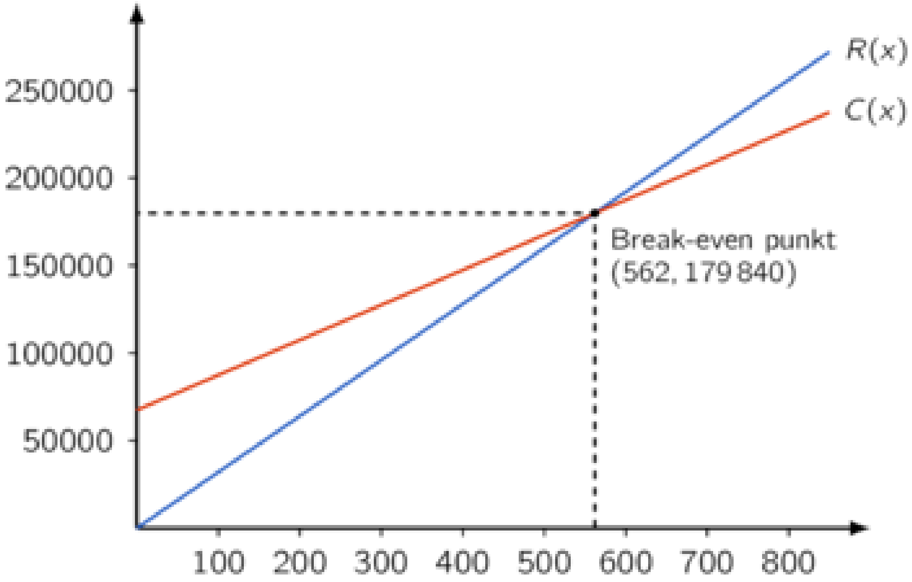
Ved salg af *x* elkedler kan vi beregne de samlede omkostninger *C(x)* som

$$C(x) = 200x + 67\,440$$

Indtægterne *R(x)* ved salg af *x* elkedler er

$$R(x) = 320x$$

For at bestemme break-even-punktet, som er det antal elkedler, der skal produceres, for at indtægterne dækker totalomkostningerne, og produktionen ikke medfører tab for producenten, tegner vi graferne for indtægten og totalomkostningerne. Graferne er rette linjer, og break-even-punktet svarer til grafernes skæringspunkt.



Figur 3253

Skæringspunktet aflæser vi i til $(562, 179\,840)$ i figur 3253.

Produktionen af elkedler giver således først overskud, når der er solgt mindst 563 elkedler. Dette antal ligger under produktionsbegrænsingen på 850 elkedler, så produktionen kan potentielt give overskud.

Vi kan også bestemme break-even-punktet ved at løse ligningen $R(x) = C(x)$ ved beregning.

$$\begin{aligned} & R(x) = C(x) \\ \Leftrightarrow \quad & 320x = 200x + 67\,440 \\ \Leftrightarrow \quad & 120x = 67\,440 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 562 \end{aligned}$$

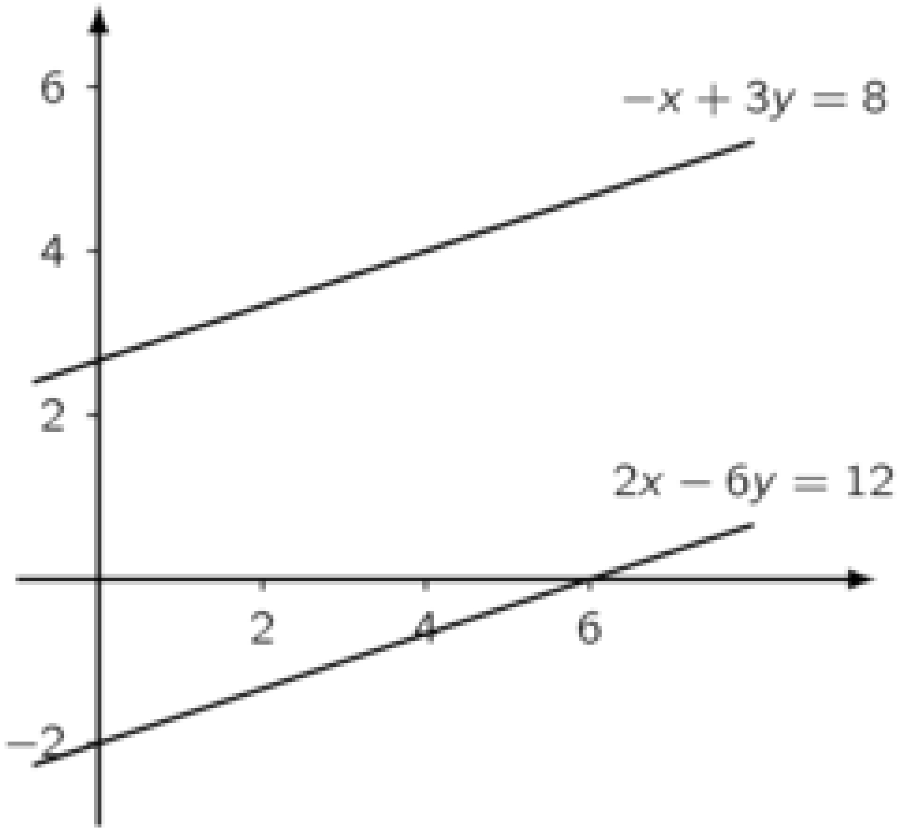
ISBN 9788761685704

Eksempel 3253

De rette linjer bestemt ved ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x - 6y &= 12 \\ -x + 3y &= 8 \end{aligned} \qquad (3253)$$

har begge hældning $\frac{1}{3}$. Linjerne er altså parallelle, som det også fremgår af figur 3254.



Figur 3254

Linjerne har intet skæringspunkt, og dermed har ligningssystemet (3253) ingen løsning.

For et andet ligningssystem

$$
\begin{aligned}
2x - 6y &= 12 \\
-x + 3y &= -6
\end{aligned}
\tag{3254}
$$

er de tilsvarende linjer også parallelle med hældning $\frac{1}{3}$. Her fremkommer den øverste ligning af den nederste ved at gange denne med -2, så linjerne er tillige sammenfaldende. Ligningssystemet (3254) har dermed uendeligt mange løsninger.

Øvelse 3251

To lineære funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = \frac{2}{3}x - 4 \quad \text{og} \quad g(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$$

Løs ligningen

$$f(x) = g(x)$$

både grafisk og ved beregning.

Øvelse 3252

Løs ligningssystemet

$$
\begin{aligned}
x + 4y &= 8 \\
x - 2y &= 1
\end{aligned}
$$

både grafisk og ved beregning.

ISBN 9788761685704

Øvelse 3253

Omkostningerne i kr. til produktion af x enheder af en vare er givet ved

$$C(x) = 9x + 15\,000$$

mens indtægten i kr. ved salg af x enheder af varen er

$$R(x) = 12x$$

Bestem break-even-punktet, hvor omkostninger og indtægter er lige store, såvel grafisk som ved beregning.

3.3 Eksponentielle funktioner

3.3.1 Grundbegreber

En anden type af funktioner er de såkaldte *eksponentielle* funktioner.

Definition 3311 (Eksponentiel funktion)

En funktion f kalder vi en *eksponentiel* funktion, hvis f har en forskrift på formen

$$f(x) = b \cdot a^x$$

hvor $a > 0$, $a \neq 1$ og $b > 0$.

Tallet a i forskriften kalder vi *grundtallet*, og tallet b kalder vi *begyndelsesværdien*.

Eksempel 3311

Funktionen

$$f(x) = 215 \cdot 1{,}04^x$$

er en eksponentiel funktion med grundtal $a = 1{,}04$ og begyndelsesværdi $b = 215$.

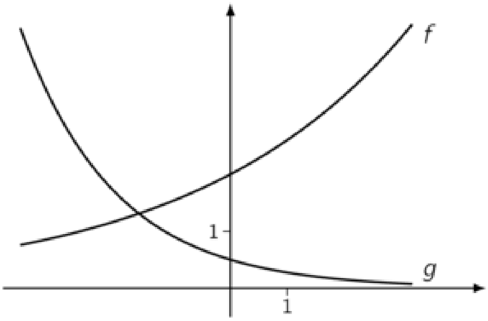
I forskriften for den eksponentielle funktion g med

$$g(x) = 9{,}08 \cdot 0{,}731^x$$

er $a = 0{,}731$ og $b = 9{,}08$.

ISBN 9788761685704

Grafen for to eksponentielle funktioner *f* og *g* er vist på figur 3311



Figur 3311

Grafen for $f(x) = 2 \cdot 1{,}3^x$ *og* $g(x) = 0{,}5 \cdot 0{,}55^x$

Definitionsmængden for en eksponentiel funktion er $Dm(f) = \mathbb{R}$, og værdimængden er $Vm(f) =]\,0;\ \infty\,[$.

For en eksponentiel funktion med grundtal *a* vil

$$f(0) = b \cdot a^0 = b$$
$$f(1) = b\dot{a}^1 = ba$$
$$f(x) > 0 \quad \text{for alle } \ x$$

Grafen for *f* vil dermed altid gå gennem punktet (0, *b*) og altså dermed altid skære *y*-aksen i begyndelsesværdien *b*.

Af $f(1) = ba$ følger, at vi kan finde grundtallet *a* som $a = \frac{f(1)}{b}$.

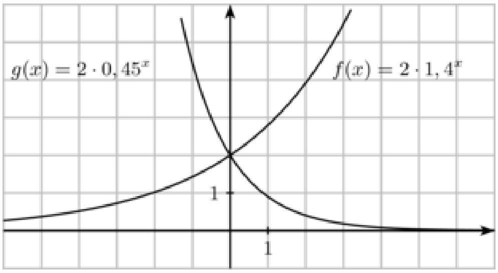
Grafen forløber altid over *x*-aksen og vil aldrig skære denne. En eksponentiel funktion har altså ingen nulpunkter.

Grundtallet for en eksponentiel funktion afgør, om funktionen er voksende eller aftagende. Hvis grundtallet ligger mellem 0 og 1, er den eksponentielle funktion aftagende, og hvis grundtallet er større end 1, er den eksponentielle funktion voksende, altså

$$f(x) = b \cdot a^x \text{ er aftagende, når } 0 < a < 1$$
$$f(x) = b \cdot a^x \text{ er voksende, når } a > 1$$

ISBN 9788761685704

som illustreret på figur 3312.



Figur 3312

Graferne for en voksende og en aftagende eksponentiel funktion

En voksende eksponentiel funktion kalder vi også for en *eksponentielt voksende funktion*. En aftagende eksponentiel funktion kalder vi tilsvarende for en *eksponentielt aftagende funktion*.

En vigtig eksponentiel funktion er funktionen med grundtallet

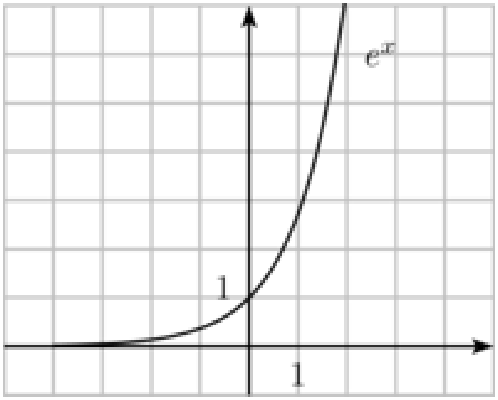
$$e = 2{,}718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 352\ 662\ 497\ 757\ 2\ldots.$$

– det såkaldte Eulertal eller Eulers konstant. Eulers konstant er sammen med π og den imaginære enhed *i* de tre mest grundlæggende konstanter inden for matematik. Eulers konstant *e* er et irrationalt tal, og dermed er decimalbrøksfremstillingen uendelig og ikke-periodisk.

Den eksponentielle funktion med begyndelsesværdi *b* = 1 og grundtallet *e* kalder vi *den naturlige eksponentialfunktion*, og vi betegner den også med $\exp$, dvs.

$$\exp(x) = e^x$$

Den naturlige eksponentialfunktion er voksende.



Figur 3313

Grafen for

$$\exp(x) = e^x$$

Øvelse 3311

Angiv grundtallet a og begyndelsesværdien b for nedenstående funktioner.

$$f(x) = 2 \cdot 1{,}6^x \qquad g(x) = 1{,}6 \cdot 2^x \qquad h(x) = 0{,}6 \cdot 0{,}75^x$$

Hvilke af funktionerne er aftagende, og hvilke er voksende?

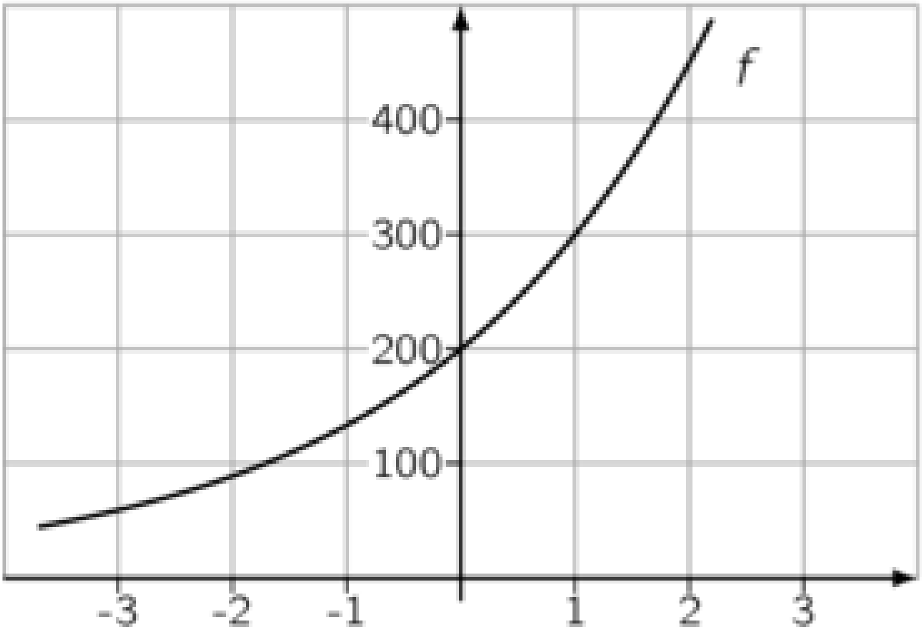
Tegn graferne for f, g og h.

ISBN 9788761685704

Øvelse 3312

Figuren viser grafen for en eksponentiel funktion *f*.

Hvad er forskriften for *f* ?



Øvelse 3313

Tegn graferne for de eksponentielle funktioner

a. $f_1(x) = 2^x$
b. $f_2(x) = (\frac{1}{2})^x$

Hvad er sammenhængen mellem graferne for f_1 og f_2 ?

3.3.2 Forskrift ud fra to punkter

Kender vi to punkter på grafen for en eksponentiel funktion, kan vi finde konstanterne *a* og *b*.

ISBN 9788761685704

Sætning 3321 (Forskrift ud fra to punkter)

Lad

$$f(x) = b \cdot a^x$$

være en eksponentiel funktion, hvis graf går gennem to forskellige punkter med koordinater (x_1, y_1) og (x_2, y_2).

Så er

$$a = \sqrt[x_2-x_1]{\frac{y_2}{y_1}} \qquad \text{og} \qquad b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$$

Bevis (Forskrift ud fra to punkter)

Når punkterne ligger på grafen for f, må

$$y_1 = f(x_1) \qquad og \qquad y_2 = f(x_2)$$

dvs.

$$y_1 = b \cdot a^{x_1} \qquad og \qquad y_2 = b \cdot a^{x_2}$$

Så må

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{b \cdot a^{x_2}}{b \cdot a^{x_1}} = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} = a^{x_2-x_1}$$

altså

$$\frac{y_2}{y_1} = a^{x_2-x_1}$$

Tager vi nu den $x_2 - x_1$-rod på begge sider, finder vi a

$$a = \sqrt[x_2-x_1]{\frac{y_2}{y_1}}$$

Herefter finder vi b

$$y_1 = b \cdot a^{x_1} \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$$

Eksempel 3321

Når vi skal finde forskriften for den eksponentielle funktion f med $f(2) = 3$ og $f(5) = 7$, finder vi først a.

Grafen går gennem $(x_1, y_1) = (2,3)$ og $(x_2, y_2) = (5,7)$, så

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = \sqrt[5-2]{\frac{7}{3}} = 1{,}3264$$

og

$$b = \frac{y_1}{a^{x_1}} = \frac{3}{1{,}3264^2} = 1{,}71$$

Altså er

$$f(x) = 1{,}71 \cdot 1{,}3264^x$$

Eksempel 3322

Om en eksponentiel funktion g får vi oplyst, at $b = 3{,}2$ og $g(4) = 9$, dvs. at vi ved, at

$$g(x) = 3{,}2 \cdot a^x$$

For at finde a i forskriften benytter vi den anden oplysning

$$\begin{aligned} g(4) &= 9 \\ \Leftrightarrow \quad 3{,}2 \cdot a^4 &= 9 \\ \Leftrightarrow \quad a^4 &= \frac{9}{3{,}2} \\ \Leftrightarrow \quad a &= \sqrt[4]{\frac{9}{3{,}2}} = 1{,}2950 \end{aligned}$$

Forskriften for g bliver dermed

$$g(x) = 3{,}2 \cdot 1{,}2950^x$$

I stedet for at løse ligningen kunne vi have brugt samme formel som i foregående eksempel, idet vi kender punktet (4,9). Oplysningen $b = 3{,}2$ fortæller os, at (0, 3,2) ligger på grafen for g.

Øvelse 3321

I hver af nedenstående opgaver er f en eksponentiel funktion. Bestem forskriften ud fra de givne oplysninger.

a. $f(8) = 6$ og $f(10) = 8$
b. $f(-2) = 6$ og $f(2) = 3$
c. $f(0) = 14$ og $f(4) = 9$

Øvelse 3322

I hver af nedenstående opgaver er f en eksponentiel funktion. Bestem forskriften ud fra de givne oplysninger.

a. $b = 6$ og $f(3) = 12$
b. $f(2{,}4) = 1{,}7$ og $a = 1{,}5$

Øvelse 3323

Grafen for en eksponentiel funktion f går gennem punkterne $A(1{,}72)$ og $B(10{,}136)$.

Bestem $f(5)$.

Øvelse 3324

Grafen for en eksponentiel funktion f går gennem punkterne $A(2{,}60)$ og $B(8{,}90)$.

Løs uligheden $f(x) \geq 125$.

Øvelse 3325 (Træning)

Bestem forskriften for den eksponentielle funktion *f*, hvis graf går gennem følgende 2 punkter

a. $(x_1, y_1) = (2{,}5)$ og $(x_2, y_2) = (6{,}8)$
b. $(x_1, y_1) = (8{,}18)$ og $(x_2, y_2) = (15{,}28)$
c. $(x_1, y_1) = (3{,}12)$ og $(x_2, y_2) = (7{,}4)$
d. $(x_1, y_1) = (1{,}5)$ og $(x_2, y_2) = (7{,}6)$
e. $(x_1, y_1) = (19{,}200)$ og $(x_2, y_2) = (25{,}250)$
f. $(x_1, y_1) = (10{,}28500)$ og $(x_2, y_2) = (15{,}27200)$
g. $(x_1, y_1) = (30{,}75)$ og $(x_2, y_2) = (22{,}94)$
h. $(x_1, y_1) = (0{,}100)$ og $(x_2, y_2) = (2{,}121)$
i. $(x_1, y_1) = (4.5{,}12)$ og $(x_2, y_2) = (7{,}18.3)$
j. $(x_1, y_1) = (14.3{,}22.5)$ og $(x_2, y_2) = (17{,}9.6)$

3.3.3 Vækstegenskaber

Hvis vi i den eksponentielle funktion

$$f(x) = b \cdot a^x$$

giver *x* tilvæksten 1, får vi

$$\begin{aligned} f(x+1) &= b \cdot a^{x+1} \qquad \text{(bruger potensregnereglen } a^{x+y} = a^x \cdot a^y\text{)} \\ &= b \cdot a^x \cdot a^1 \\ &= a \cdot b \cdot a^x \\ &= a \cdot f(x) \end{aligned}$$

Når vi giver *x* en tilvækst på 1, bliver den nye funktionsværdi $f(x+1)$ den oprindelige funktionsværdi $f(x)$ ganget med *a*. Opfatter vi *a* som en fremskrivningsfaktor, og skriver vi *a* på formen

$$a = 1 + r \tag{3331}$$

svarer multiplikationen med *a* til at ændre $f(x)$ med $r \cdot 100\,\%$.

Denne faste procentvis ændring *r* i $f(x)$ er en vækstrate. Den er bestemt af grundtallet *a*, idet

$$r = a - 1$$

Kender vi den procentvise ændring *r* (vækstraten) for en eksponentiel funktion, kan vi skrive funktionens forskrift ifølge (3331)

$$f(x) = b \cdot (1+r)^x$$

Eksempel 3331 (a > 1)

Funktionen

$$f(x) = 505 \cdot 1{,}27^x$$

er en voksende eksponentiel funktion med *a* = 1,27. Funktionen vokser med $r = a - 1 = 1{,}27 - 1 = 0{,}27 = 27\,\%$ pr. x-enhed.

Eksempel 3332 (a < 1)

Funktionen

$$g(x) = 27\,856 \cdot 0{,}94^x$$

er en aftagende eksponentiel funktion med *a* = 0,94. Den procentvise ændring er $r = a - 1 = 0{,}94 - 1 = -0{,}06 = -6\,\%$. Funktionen aftager således med 6 % pr. *x*-enhed.

Eksempel 3333

Jakob indsætter 100 kr. i banken til en rente på $r = 3\,\%$ pr. år. Hver gang Jakob får renter, bliver beløbet på kontoen ganget med 1,03.

Hvis vi sætter $f(x)$ til Jakobs beholdning i banken efter *x* år, vil

$$f(x) = 100 \cdot 1{,}03^x$$

Generelt gælder der, at hvis vi giver *x*-værdien en tilvækst på Δx, så bliver

$$f(x+\Delta x) = b \cdot a^{x+\Delta x} = b \cdot a^x \cdot a^{\Delta x} = f(x) \cdot a^{\Delta x}$$

altså

$$f(x+\Delta x) = a^{\Delta x} \cdot f(x) \qquad (3332)$$

ISBN 9788761685704

Udtrykket viser, at når x får *tilvæksten* Δx, så bliver $f(x)$ ganget med fremskrivningsfaktoren $a^{\Delta x}$.

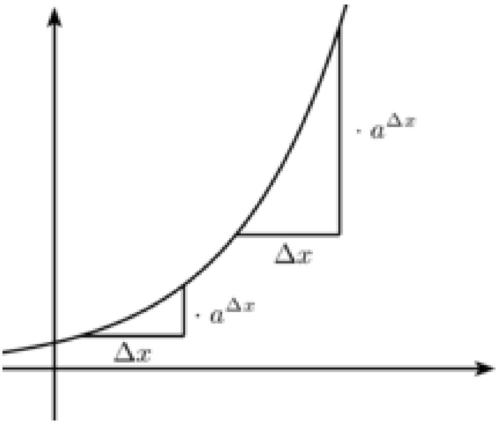
Den tilhørende procentvise ændring r_y i $f(x)$-værdierne er så

$$r_y = a^{\Delta x} - 1 = (1 + r)^{\Delta x} - 1 \tag{3333}$$

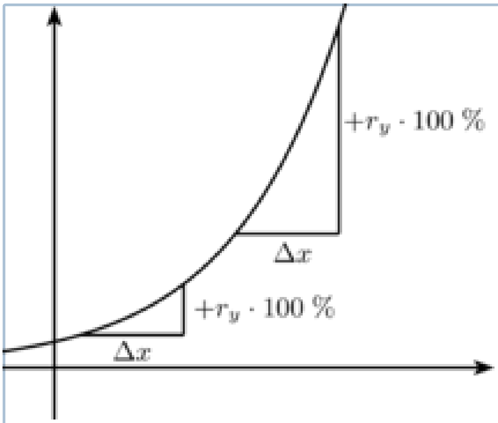
Vi ser, at r_y er uafhængig af x og er altså en konstant for vort valg af Δx.

Ligningerne (3332) og (3333) udtrykker den karakteristiske egenskab ved eksponentielle funktioner, nemlig at der *til lige store tilvækster i x svarer lige store procentvise tilvækster i* $f(x)$.

Går vi det samme stykke ud ad x-aksen, skal vi altså gå det samme procentuelle stykke op ad y-aksen, se figur 3331 og figur 3332.



Figur 3331



Figur 3332

Eksempel 3334

En eksponentiel funktion er givet ved

$$f(x) = 14 \cdot 1{,}09^x$$

svarende til en *vækstrate* på 9 %.

Vi vil beregne den procentvise vækst i $f(x)$, når x vokser med 5.

Af formlen

$$r_y = a^{\Delta x} - 1$$

finder vi

$$r_y = 1{,}09^5 - 1 = 0{,}539$$

$f(x)$-værdierne vokser altså med 53,9 %, hver gang x-værdierne vokser med 5.

Vokser en størrelse med 9 % pr. x-enhed, vil størrelsen altså være vokset med 53,9 % efter 5 x-enheder.

Eksempel 3335

En koncerns omsætning blev i årene 2005-2015 beskrevet ved den eksponentielle funktion

$$f(x) = 751 \cdot 1{,}13^x$$

hvor x angiver antal år efter 2005, og $f(x)$ angiver omsætningen i mio. kr.

Omsætningen i 2012 finder vi som $f(7)$, da 2012 svarer til 7 år efter 2005. Vi får

$$f(7) = 751 \cdot 1{,}13^7 = 1767$$

Den årlige procentvise tilvækst i omsætningen bliver

$$r = a - 1 = 1{,}13 - 1 = 0{,}13 = 13\ \%$$

Den 10-årige procentvise tilvækst, som svarer til $\Delta x = 10$, kan vi beregne ved brug af ligning (3332), som giver

$$\begin{aligned} r_y &= a^{10} - 1 \\ &= 1{,}13^{10} - 1 \\ &= 2{,}39 = 239\ \% \end{aligned}$$

Øvelse 3331

Angiv grundtal, vækstrate og monotoni for hver af de nedenstående eksponentielle funktioner.

a. $f(x) = 100 \cdot 1{,}06^x$
b. $g(x) = 35 \cdot 0{,}89^x$
c. $h(x) = 0{,}4051 \cdot 1{,}27^x$
d. $k(x) = 32\,000 \cdot 1{,}009^x$

Øvelse 3332

For at begrænse væksten i befolkningenstørrelsen indførte man i Kina en etbarns-politik, som skulle sikre et fald i befolkningstallet på 0,5 % om året.

Bestem det tilsvarende procentvise fald over en 10-års periode og en 25-års periode.

ISBN 9788761685704

Øvelse 3333

En virksomhed har siden år 2010 oplevet en gennemsnitlig årlig vækst i omsætningen på 6,2 %. I år 2010 var omsætningen på 28,6 mio. kr.

a. Bestem en forskrift for omsætningen siden år 2010.
b. Bestem den forventede omsætning i år 2025, hvis udviklingen fortsætter uforandret.
c. I hvilket år kan virksomheden forvente at nå en omsætning på 50 mio. kr, hvis udviklingen fortsætter uforandret?

Øvelse 3334

En kommune har på baggrund af prognoser en forventning om, at antallet af børn i skolealderen i de næste mange år vil falde med 3 % årligt. I dag har kommunen 3 268 børn i skolealderen.

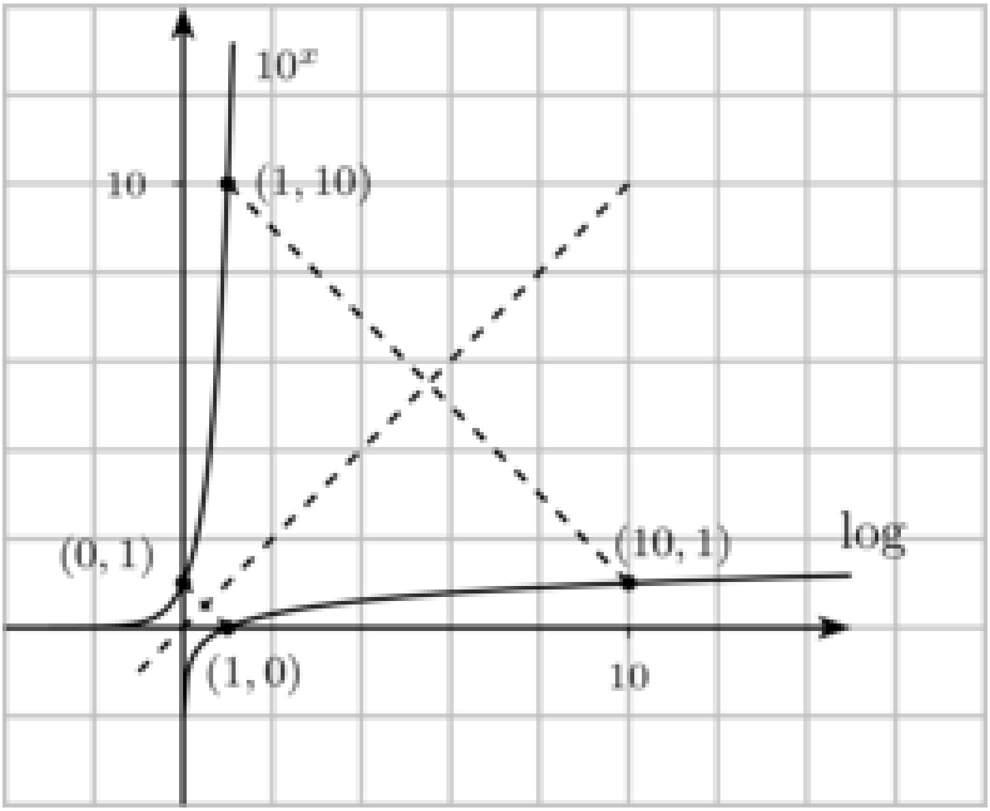
a. Bestem en forskrift for udviklingen i antallet af skolebørn over tid.
b. Bestem, hvor mange skolebørn der kan forventes at være i kommunen om 10 år.

3.3.4 Logaritmefunktioner

Titalslogaritmen

Den eksponentielle funktion $f(x) = 10^x$ er voksende og opfylder derfor vandret-kriteriet. Den har derfor en omvendt funktion, som vi betegner med $\log(x)$, og vi kalder $\log$ for *titalslogaritmen*.

Grafen for $\log$ fremkommer ved spejling af grafen for 10^x i $y = x$.



Figur 3341
Den eksponentielle funktion $f(x) = 10^x$ er defineret på hele $\mathbb{R}$ og har $\mathbb{R}_+$ som værdimængde så

$$
\begin{aligned}
Dm(\log) &= \mathbb{R}_+ \\
Vm(\log) &= \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Ifølge (3171) og (3172) er

$$
\begin{aligned}
\log\left(10^x\right) &= x\ , \quad x \in \mathbb{R} \\
10^{\log(x)} &= x\ , \quad x \in \mathbb{R}_+
\end{aligned}
$$

som vi formulerer som *lemmaer*. Et lemma er en hjælpesætning.

Lemma 3341

$$x = \log(10^x) \quad \text{for alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

Lemma 3342

$$x = 10^{\log(x)} \quad \text{for alle} \quad x \in \mathbb{R}_+$$

De to lemmaer bruger vi til at bevise

Sætning 3341 (Logaritmeregnereglerne for log)

Lad $a, b \in \mathbb{R}_+$ og $x \in \mathbb{R}$. Så gælder

i. $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$

ii. $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$

iii. $\log(a^x) = x\log(a)$

Bevis (Logaritmeregnereglerne for log)

Da a og b er positive, kan vi ifølge Lemma 3342 skrive a og b som

$$a = 10^{\log(a)} \quad \text{og} \quad b = 10^{\log(b)}$$

Bevis for i.

Vi har nu

$$\begin{aligned}\log(a \cdot b) &= \log\left(10^{\log(a)} \cdot 10^{\log(b)}\right) \\ &= \log\left(10^{\log(a)+\log(b)}\right) \\ &= \log(a) + \log(b)\end{aligned}$$

Ved den sidste omskrivning har vi benyttet Lemma 3341.

Bevis for ii.

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{a}{b}\right) &= \log\left(\frac{10^{\log(a)}}{10^{\log(b)}}\right) \\ &= \log\left(10^{\log(a)-\log(b)}\right) \\ &= \log(a) - \log(b)\end{aligned}$$

Bevis for iii.

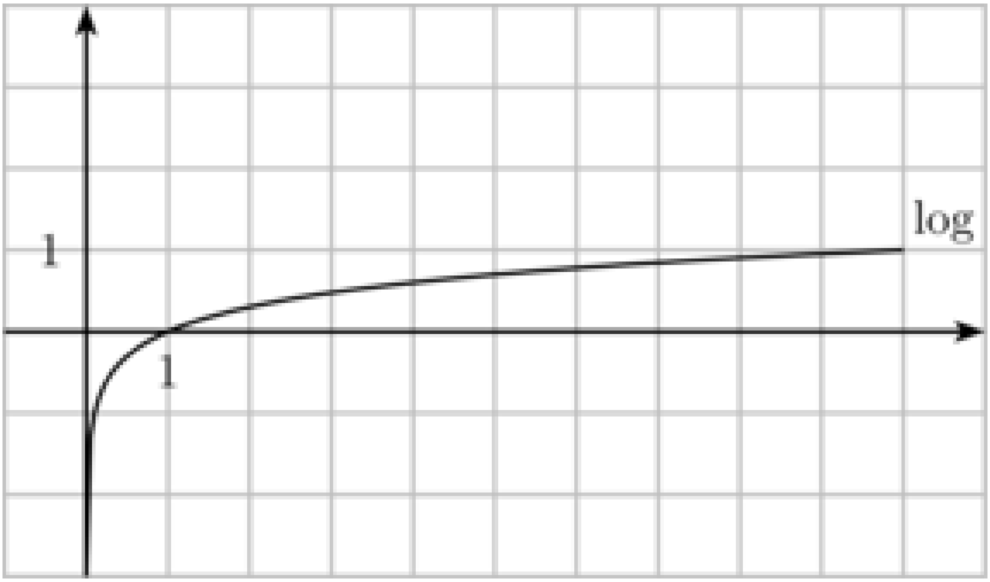
$$\begin{aligned}\log\left(a^x\right) &= \log\left(\left(10^{\log(a)}\right)^x\right) \\ &= \log\left(10^{x\log(a)}\right) \\ &= x\log(a)\end{aligned}$$

Titalslogaritmen $\log$ kalder vi også logaritmefunktionen med grundtal 10. Da den er defineret på $\mathbb{R}_+$, kan vi tage titalslogaritmen til ethvert positivt tal evt. ved hjælp af en lommeregner. F.eks. er $\log(3) = 0{,}477\,121\,254\,72$.

Potenser af grundtallet 10 har pæne titalslogaritmer

ISBN 9788761685704

$$\log(1) = 0$$
$$\log(10) = 1$$
$$\log(100) = \log\left(10^2\right) = 2$$
$$\log(1\,000) = \log\left(10^3\right) = 3$$
$$\log(0{,}01) = \log\left(10^{-2}\right) = -2$$
$$\log(\sqrt{10}) = \log\left(10^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}$$



Figur 3342 *Grafen for*

log

Øvelse 3341

Udregn

a. $\log(10^9)$
b. $\log(\frac{1}{1000})$
c. $\log(\sqrt[3]{10})$
d. $\log(0{,}000\ 001)$

ISBN 9788761685704

Øvelse 3342

Udregn

a. $\log(4) + \log(25)$
b. $\log(30) - \log(3)$
c. $\log(2) + \log(35) - \log(7)$

Øvelse 3343

Udregn

a. $10^{\log(5)}$
b. $10^{1+\log(5)}$
c. $10^{2\log(5)}$
d. $10^{-\log(5)}$

Vi kan udnytte, at 10^x og $\log$ er hinandens omvendte til at løse simple ligninger som

$$\log(x) = 1{,}223 \quad \text{og} \quad 10^x = 1{,}45$$

Vi finder

$$\begin{aligned} & \log(x) = 1{,}223 \\ \Leftrightarrow \quad & 10^{\log(x)} = 10^{1{,}223} && \text{(anvender } 10^x \text{ på begge sider)} \\ \Leftrightarrow \quad & x = 16{,}711 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} & 10^x = 1{,}45 \\ \Leftrightarrow \quad & \log(10^x) = \log(1{,}45) && \text{(anvender } \log \text{ på begge sider)} \\ \Leftrightarrow \quad & x = 0{,}161 \end{aligned}$$

Øvelse 3344

Løs nedenstående ligninger.

a. $\log(x) = -1$
b. $\log(x) = 4{,}9$
c. $\log(2x) = 1{,}56$

ISBN 9788761685704

Øvelse 3345

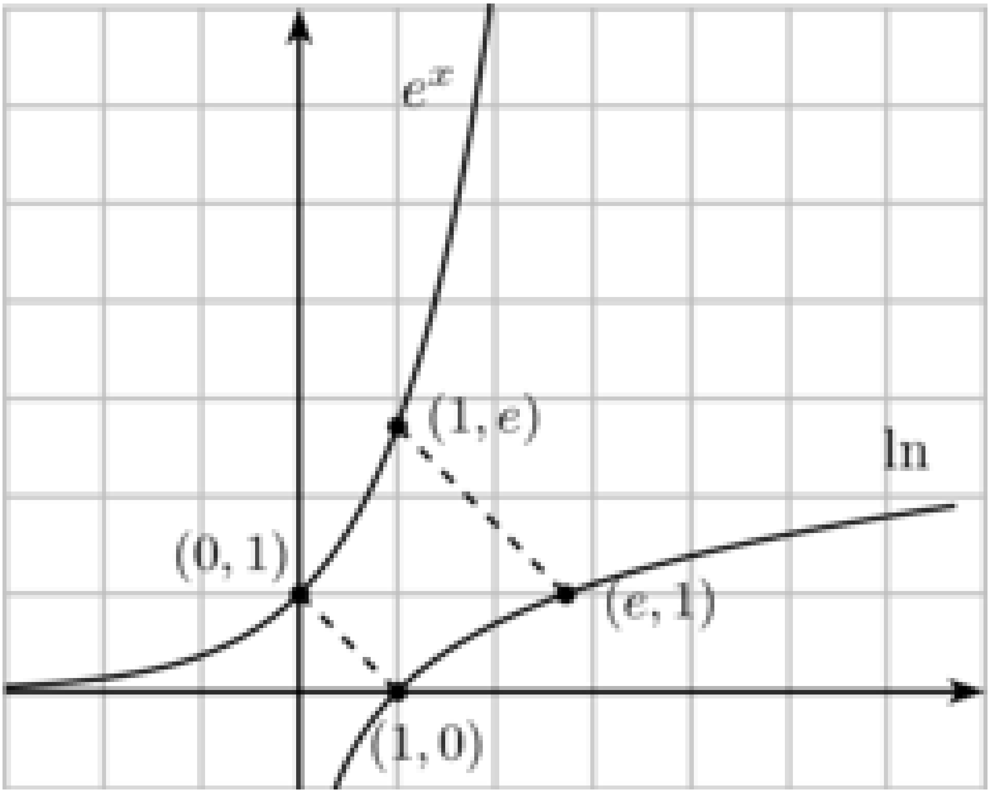
Løs nedenstående ligninger.

a. $10^x = 5{,}68$
b. $10^{3x} = 7{,}21$
c. $10^{2x-1} = 15{,}6$

Den naturlige logaritmefunktion

Den naturlige logaritmefunktion ln er den omvendte funktion til den naturlige eksponentialfunktion e^x.

Grafen for ln fremkommer af grafen for e^x ved spejling.



Figur 3343
Den naturlige logaritmefunktion, som vi også kalder for logaritmefunktionen med grundtal *e*, har egenskaber, som er helt analoge til titalslogaritmen, herunder regneregler.

ISBN 9788761685704

For ln er

$$Dm(\ln) = \mathbb{R}_+$$
$$Vm(\ln) = \mathbb{R}$$

og ifølge (3171) og (3172) er

$$\ln\left(e^x\right) = x\,, \quad x \in \mathbb{R}$$
$$e^{\ln(x)} = x\,, \quad x \in \mathbb{R}_+$$

Specielt kan vi skrive ethvert positivt tal a som

$$a = e^{\ln(a)} \quad \text{og} \quad a = \ln(e^a) \quad \text{når} \quad a > 0 \tag{3341}$$

Ved brug af (3341) kan vi igen vise følgende grundlæggende regneregler.

Sætning 3342 (Logaritmeregnereglerne for ln)

Lad $a,\ b \in \mathbb{R}_+$ og $x \in \mathbb{R}$. Så gælder

i. $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

ii. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

iii. $\ln(a^x) = x\ln(a)$

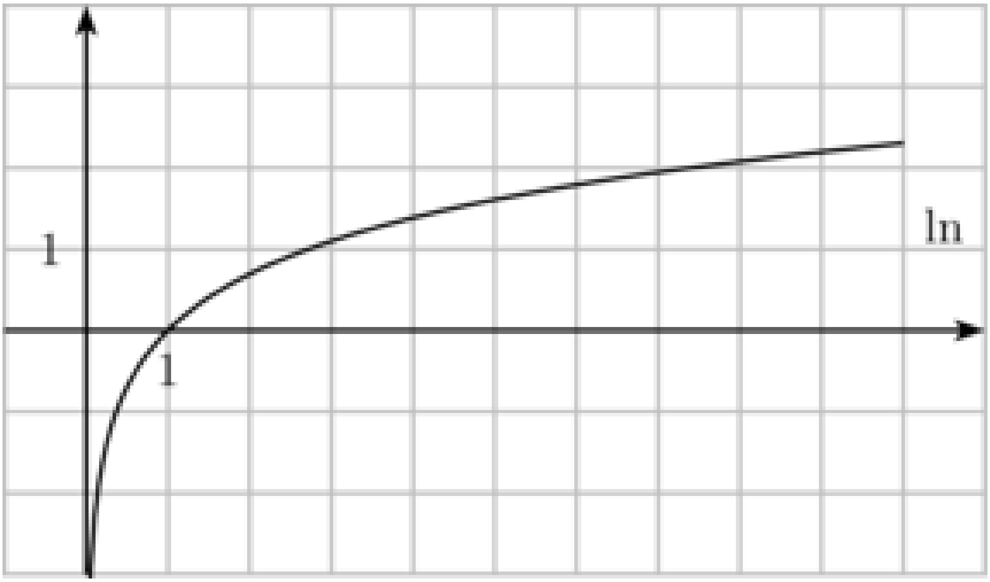
Bevis (Logaritmeregnereglerne for ln)

Beviset kører helt tilsvarende beviset for titalslogaritmeregnereglerne, idet vi erstatter 10 med e og log med ln.

Vi kan udregne naturlige logaritmer ved brug af lommeregner, men nogle værdier af ln lader sig bestemme uden lommeregner.

$$\ln(1) = 0$$
$$\ln(e) = 1$$
$$\ln(e^2) = 2$$
$$\ln(e^3) = 3$$
$$\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ln\left(e^{-1}\right) = -1$$
$$\ln(\sqrt{e}) = \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}$$

ISBN 9788761685704



Figur 3344 *Grafen for*

ln

Da der gælder de samme regneregler for ln og log, forløber regninger med ln helt analogt til regninger med log.

Øvelse 3346

Udregn

a. $\ln(e^5)$
b. $e^{\ln(9)}$
c. $\ln(e^3) - \ln(e)$
d. $\ln(8) - \ln(4) - \ln(2)$

Til at løse simple ligninger som

$$\ln(x) = 4{,}27 \quad \text{og} \quad e^x = 0{,}53$$

kan vi udnytte, at e^x og ln er hinandens omvendte.

Vi finder

$$\begin{aligned} \ln(x) &= 4{,}27 \\ \Leftrightarrow \quad e^{\ln(x)} &= e^{4{,}27} \qquad \text{(anvender } e^x \text{ på begge sider)} \\ \Leftrightarrow \quad x &= 71{,}52 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} e^x &= 0{,}53 \\ \Leftrightarrow \quad \ln(e^x) &= \ln(0{,}53) \qquad \text{(anvender } \ln \text{ på begge sider)} \\ \Leftrightarrow \quad x &= -0{,}63 \end{aligned}$$

Øvelse 3347

Løs nedenstående ligninger.

a. $\ln(x) = 3$
b. $e^x = 5$
c. $\ln(x) + \ln(9) = \ln(18)$
d. $2\ln(x) = \ln(36)$

Øvelse 3348

Løs nedenstående ligninger.

a. $e^{5x} = e^{15}$
b. $e^{3x} = e^{2x-1}$
c. $\ln(3x - 5) = \ln(11) + \ln(2)$
d. $3\ln(x) = 2\ln(8)$

3.3.5 Eksponentielle ligninger

Regel iii. i sætning 3341 bruger vi til at løse ligninger på formen

$$a^x = b$$

Når $a^x = b$, må deres logaritmer også være ens, så

$$\log(a^x) = \log(b)$$

Ved at bruge logaritmeregneregel iii. får vi så

$$x\log(a) = \log(b) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\log(b)}{\log(a)}$$

ISBN 9788761685704

Eksempel 3351

Vi vil løse ligningen

$$2^x = 47$$

Vi får

$$\begin{aligned} 2^x &= 47 \\ \Leftrightarrow \quad \log(2^x) &= \log(47) \qquad\qquad (\text{anvender } \log \text{ på begge sider}) \\ \Leftrightarrow \quad x\log(2) &= \log(47) \\ \Leftrightarrow \quad x &= \frac{\log(47)}{\log(2)} \\ \Leftrightarrow \quad x &= 5{,}55 \end{aligned}$$

Vi kan også anvende den naturlige logaritmefunktion ln og udnytte regel iii. i sætning 3342 .

Eksempel 3352

Vi vil løse ligningen

$$175 \cdot 1{,}4^x = 309$$

Vi får

$$\begin{aligned} 175 \cdot 1{,}4^x &= 309 \\ \Leftrightarrow \quad 1{,}4^x &= \frac{309}{175} \\ \Leftrightarrow \quad \ln(1{,}4^x) &= \ln\left(\frac{309}{175}\right) \qquad\qquad (\text{anvender } \ln \text{ på begge sider}) \\ \Leftrightarrow \quad x\ln(1{,}4) &= \ln\left(\frac{309}{175}\right) \\ \Leftrightarrow \quad x &= \frac{\ln\left(\frac{309}{175}\right)}{\ln(1{,}4)} = 1{,}69 \end{aligned}$$

ISBN 9788761685704

Eksempel 3353

Ifølge en bestemt model vokser Jordens befolkningstal (regnet i mia.) eksponentielt ifølge

$$B(x) = 4{,}7 \cdot 1{,}0185^x$$

hvor x er antal år efter 1984.

Vi vil bestemme, i hvilket år befolkningstallet når op på 10 mia., hvilket svarer til, at vi skal løse ligningen $B(x) = 10$.

Vi får

$$\begin{aligned}
& 4{,}7 \cdot 1{,}0185^x = 10 \\
\Leftrightarrow \quad & 1{,}0185^x = \frac{10}{4{,}7} \\
\Leftrightarrow \quad & \ln(1{,}0185^x) = \ln\left(\frac{10}{4{,}7}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & x \cdot \ln(1{,}0185) = \ln\left(\frac{10}{4{,}7}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & x = \frac{\ln\left(\frac{10}{4{,}7}\right)}{\ln(1{,}0185)} = 41{,}2
\end{aligned}$$

Dvs. befolkningstallet runder 10 mia. 41,2 år efter 1984, altså en gang i løbet af 2026.

Øvelse 3351

Løs nedenstående ligninger.

a. $4^x = 9$
b. $8 \cdot 0{,}987^x = 2$
c. $1{,}2^{5x} = 300$

ISBN 9788761685704

Øvelse 3352

Løs ligningerne

a. $2e^x = 10$
b. $8 \cdot e^x = 20$
c. $e^{3-2x} = 4$

Øvelse 3353

En virksomhed investerer 425 000 kr. i en trykkemaskine, hvis værdi afskrives med 8 % om året. Værdien $V(x)$ (i kr.) af trykkemaskinen efter x år kan vi således beskrive med den eksponentielle funktion

$$V(x) = 425\,000 \cdot 0{,}92^x$$

Bestem, hvor lang tid der går, indtil trykkemaskinens værdi er nedskrevet til 100 000 kr.

Eksempel 3354

Vi vil løse ligningen

$$8 \cdot 1{,}20^x = 12 \cdot 1{,}15^x$$

Vi får

$$\begin{aligned}
& 8 \cdot 1{,}20^x = 12 \cdot 1{,}15^x \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1{,}20^x}{1{,}15^x} = \frac{12}{8} \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\frac{1{,}20}{1{,}15}\right)^x = 1{,}5 \\
\Leftrightarrow \quad & \log\left(\left(\frac{1{,}20}{1{,}15}\right)^x\right) = \log(1{,}5) \\
\Leftrightarrow \quad & x \cdot \log\left(\frac{1{,}20}{1{,}15}\right) = \log(1{,}5) \\
\Leftrightarrow \quad & x = \frac{\log(1{,}5)}{\log(1{,}20) - \log(1{,}15)} = 9{,}53
\end{aligned}$$

ISBN 9788761685704

Øvelse 3354

Løs ligningerne

a. $4 \cdot 1{,}05^x = 7 \cdot 1{,}03^x$
b. $9{,}5 \cdot 1{,}06^x = 20 \cdot 0{,}98^x$
c. $62 \cdot 0{,}87^x = 22 \cdot 0{,}93^x$
d. $14 \cdot 0{,}8^x = 31 \cdot 1{,}06^x$
e. $70 \cdot 1{,}56^x = 90 \cdot 1{,}17^x$
f. $1200 \cdot 1{,}15^x = 2500 \cdot 1{,}12^x$

Øvelse 3355

To byers befolkningstal udvikler sig i hver sin retning.

Den ene by har i dag 347 500 indbyggere, og indbyggertallet vokser med 3,5 % årligt.

Den anden by har i dag 522 700 indbyggere, og indbyggertallet falder årligt med 3,3 %.

a. Bestem, hvor mange år, der skal gå, indtil de to byer har samme befolkningstal.
b. Bestem dette befolkningstal.

Øvelse 3356 (Træning)

Løs nedenstående eksponentielle ligninger

a. $3 \cdot 1{,}05^x = 18$
b. $8 \cdot 1{,}08^x = 72$
c. $12 \cdot 0{,}93^x = 3$
d. $7 \cdot 1{,}14^x = 10$
e. $15 \cdot 1{,}22^x = 34$
f. $38 \cdot 0{,}84^x = 20$
g. $50 \cdot 1{,}5^x = 75$
h. $41{,}7 \cdot 0{,}98^x = 26{,}4$
i. $180 \cdot 0{,}5^x = 45$
j. $2{,}8 \cdot 1{,}045^x = 4{,}3$

ISBN 9788761685704

3.3.6 Fordoblings- og halveringskonstant

Funktionsværdierne for en eksponentiel funktion vokser eller aftager med en fast procent. Vi kan derfor finde en tilvækst i *x*, der præcis svarer til en fordobling af funktionsværdierne (hvis funktionen er voksende) eller en halvering af funktionsværdierne (hvis funktionen er aftagende).

Definition 3361 (Fordoblingskonstant og halveringskonstant)

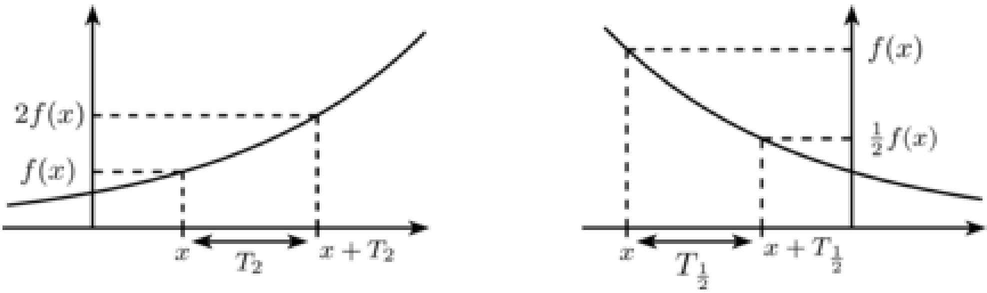
Fordoblingskonstanten T_2 for en voksende eksponentiel funktion er den *x*-tilvækst, der giver en fordobling af funktionsværdien

$$f(x+T_2)=2f(x)$$

Halveringskonstanten $T_{\frac{1}{2}}$ for en aftagende eksponentiel funktion er den *x*-tilvækst, der giver en halvering af funktionsværdien

$$f(x+T_{\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}f(x)$$

En eksponentiel funktion har *enten* en fordoblingskonstant *eller* en halveringskonstant.



Figur 3361

Eksempel 3361

Mængden af et bestemt radioaktivt stof aftager eksponentielt med en halveringstid på 30,1 år.

Efter 30,1 år vil halvdelen af stoffet være tilbage.

Efter 60,2 år vil $\frac{1}{4}$ af stoffet være tilbage.

Efter 90,3 år vil $\frac{1}{8}$ af stoffet være tilbage.

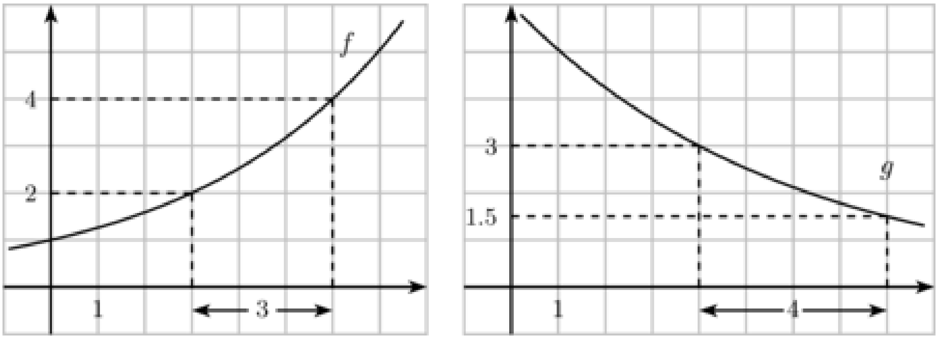
ISBN 9788761685704

Eksempel 3362

Somalias befolkning på cirka 10 mio. mennesker bliver ifølge CIA fordoblet i løbet af 25 år. Altså vil der om 50 år være cirka 40 mio. somaliere, hvis befolkningstilvæksten er uforandret.

Eksempel 3363

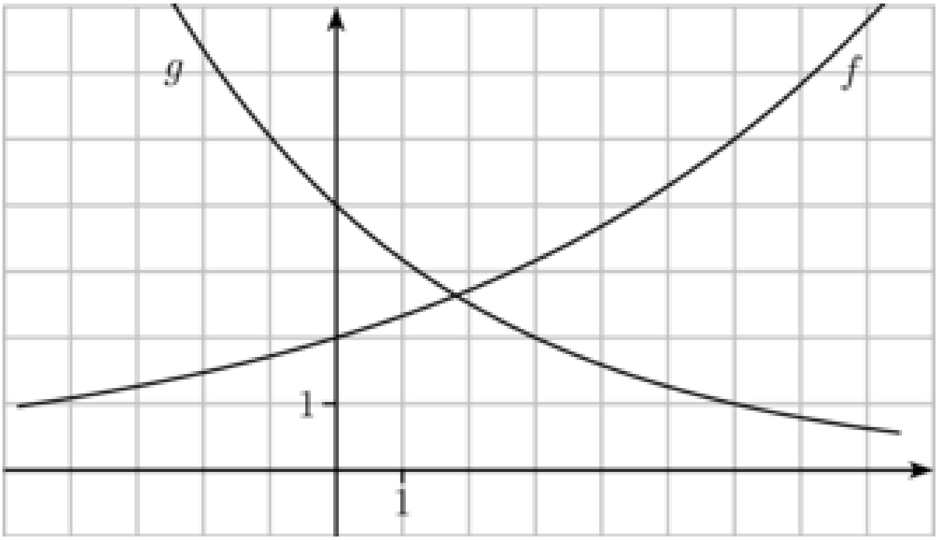
Graferne for to eksponentielle funktioner er vist i figur 3362.



Figur 3362
Vi aflæser af figuren, at fordoblingskonstanten for *f* er 3, og at halveringskonstanten for *g* er 4.

Øvelse 3361

Figuren viser graferne for de eksponentielle funktioner f og g.



Aflæs fordoblingskonstanten for f og halveringskonstanten for g.

Vi kan også beregne fordoblingskonstanter og halveringskonstanter ud fra forskriften ved brug af følgende sætning.

Sætning 3361 (Fordoblingskonstant/halveringskonstant fra forskrift)

Lad den eksponentielle funktion f være givet ved

$$f(x) = b \cdot a^x$$

i. Hvis f er voksende, er fordoblingskonstanten givet ved

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} \qquad \textit{eller} \qquad T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)}$$

ii. Hvis f er aftagende, er halveringskonstanten givet ved

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(a)} \qquad \textit{eller} \qquad T_{\frac{1}{2}} = \frac{\log(\frac{1}{2})}{\log(a)}$$

ISBN 9788761685704

Bevis (Fordoblingskonstant/halveringskonstant fra forskrift)

Bevis for *i)*

$$
\begin{aligned}
& f(x+T_2) = 2f(x) \\
\Leftrightarrow\quad & b \cdot a^{x+T_2} = 2b \cdot a^x \\
\Leftrightarrow\quad & b \cdot a^x \cdot a^{T_2} = 2b \cdot a^x \\
\Leftrightarrow\quad & a^{T_2} = 2 \quad \text{(bruger ln på begge sider)} \\
\Leftrightarrow\quad & \ln(a^{T_2}) = \ln(2) \quad \text{(bruger regnereglen for ln)} \\
\Leftrightarrow\quad & T_2 \ln(a) = \ln(2) \\
\Leftrightarrow\quad & T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}
\end{aligned}
$$

Bevis for *ii)*

$$
\begin{aligned}
& f(x+T_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} f(x) \\
\Leftrightarrow\quad & b \cdot a^{x+T_{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} b \cdot a^x \\
\Leftrightarrow\quad & b \cdot a^x \cdot a^{T_{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} b \cdot a^x \\
\Leftrightarrow\quad & a^{T_{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & \ln(a^{T_{\frac{1}{2}}}) = \ln(\frac{1}{2}) \\
\Leftrightarrow\quad & T_{\frac{1}{2}} \ln(a) = \ln(\frac{1}{2}) \\
\Leftrightarrow\quad & T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(a)}
\end{aligned}
$$

Hermed har vi udledt udtrykkene for T_2 og $T_{\frac{1}{2}}$ med ln.

Erstatter vi ln med log i regningerne, får vi de tilsvarende udtryk med log.

ISBN 9788761685704

Eksempel 3364

Siden 1990 er BNP pr. indbygger i Kina vokset med gennemsnitligt 11,5 % årligt. Vi ønsker at finde ud af, hvor mange år der går mellem fordoblinger af Kinas BNP, hvis denne udvikling fortsætter.

Da BNP vokser med en fast procent pr. år, vokser BNP eksponentielt med grundtallet

$$a = 1 + r = 1 + 0{,}115 = 1{,}115$$

Dermed bliver fordoblingskonstanten

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}115)} = 6{,}4$$

Så BNP i Kina bliver fordoblet efter ca. 6,4 år.

Eksempel 3365

Efter indtagelse af en Panodil vil det aktive stof i pillen blive udskilt fra blodet. Som en tommelfingerregel regner man med, at der bliver udskilt 25 % af stoffet fra blodet hver time. Dermed aftager blodets indhold af det aktive stof eksponentielt med grundtallet $a = 1 + (-0{,}25) = 0{,}75$.

Halveringskonstanten er

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(a)} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(0{,}75)} = 2{,}4$$

Så blodets indhold af det aktive stof er halveret efter 2,4 timer.

Øvelse 3362

En eksponentiel funktion har forskriften

$$f(x) = 228 \cdot 1{,}359^x$$

a. Hvor mange procent vokser $f(x)$ med, når x får en tilvækst på 1?
b. Hvor mange procent vokser $f(x)$ med, når x får en tilvækst på 5?
c. Bestem fordoblingskonstanten.

ISBN 9788761685704

Øvelse 3363

En eksponentiel funktion har forskriften $f(x) = 87 \cdot 0{,}786^x$.

Bestem halveringskonstanten.

Øvelse 3364

Om en eksponentiel funktion f oplyses, at

$$f(3) = 89 \text{ og } f(9) = 406$$

Bestem fordoblingskonstanten.

Øvelse 3365

Om en eksponentiel funktion f oplyses, at

$$f(-2) = 633 \text{ og } f(3) = 189$$

Bestem halveringskonstanten $T_{\frac{1}{2}}$.

Eksemplerne illustrerer, hvordan vi beregner fordoblingskonstanter eller halveringskonstanter ud fra grundtallet a. Omvendt kan vi også beregne a, hvis vi kender fordoblingskonstanten eller halveringskonstanten for den eksponentielle udvikling.

Sætning 3362 (Grundtal ud fra fordoblingskonstant/ halveringskonstant)

For en voksende eksponentiel funktion med fordoblingskonstant T_2 er

$$a = \sqrt[T_2]{2}$$

For en aftagende eksponentiel funktion med halveringskonstant $T_{\frac{1}{2}}$ er

$$a = \sqrt[T_{\frac{1}{2}}]{\frac{1}{2}}$$

ISBN 9788761685704

Bevis (Grundtal ud fra fordoblingskonstant/halveringskonstant)

Af beviset for sætning 3361 fremgår, at

$$a^{T_2} = 2 \quad \text{respektiv} \quad a^{T_{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$$

Ved roduddragning finder vi så, at

$$a = \sqrt[T_2]{2} \quad \text{respektiv} \quad a = \sqrt[T_{\frac{1}{2}}]{\frac{1}{2}}$$

som viser påstandene.

Eksempel 3366

En bil koster fra ny 359 000 kr., og dens værdi afskrives eksponentielt med en halveringskonstant $T_{\frac{1}{2}}$ på 5 år.

Lader vi $V(t)$ angive bilens værdi i kr. t år efter anskaffelsestidspunktet, kan vi beskrive bilens værdi ved den eksponentielle funktion

$$V(t) = 359\,000 \cdot a^t$$

Grundtallet a finder vi ud fra halveringstiden

$$a = \sqrt[T_{\frac{1}{2}}]{\frac{1}{2}} = \sqrt[5]{\frac{1}{2}} = 0{,}8706$$

så

$$V(t) = 359\,000 \cdot 0{,}8706^{\,t}$$

Heraf ses, at bilens årlige værditab er på ca. 13 %.

Øvelse 3366

En eksponentiel funktion har fordoblingskonstanten 9,14.

Bestem grundtallet for funktionen.

ISBN 9788761685704

Øvelse 3367

En eksponentiel funktion har halveringskonstanten 10,5.

Bestem funktionens grundtal.

Øvelse 3368

En eksponentiel funktion f har fordoblingskonstanten 12,5 og $f(3) = 122$.

Bestem $f(8)$.

Øvelse 3369

En eksponentiel funktion g opfylder

$$g(x+6) = 8g(x)$$

Bestem fordoblingskonstanten for g.

Øvelse 3370 (Træning)

Bestem fordoblings- eller halveringskonstanten for nedenstående funktioner

1. $f(x) = 15 \cdot 1{,}05^x$
2. $f(x) = 4{,}7 \cdot 1{,}03^x$
3. $f(x) = 16 \cdot 0{,}97^x$
4. $f(x) = 1272 \cdot 1{,}074^x$
5. $f(x) = 78 \cdot 0{,}62^x$
6. $f(x) = 8{,}6 \cdot 0{,}985^x$
7. $f(x) = 32000 \cdot 1{,}045^x$
8. $f(x) = 3 \cdot 1{,}4142^x$
9. $f(x) = 25 \cdot 1{,}65^x$
10. $f(x) = 100 \cdot 0{,}8409^x$

3.4 Potensfunktioner *

3.4.1 Grundbegreber

Umiddelbart kan det være svært at se, at funktionerne

$$f_1(x) = x^2 \qquad f_2(x) = \sqrt{x} \qquad f_3(x) = \frac{1}{x}$$

har forskrifter, som er af samme type. Imidlertid kan vi omskrive alle forskrifterne til

$$f_1(x) = x^2 \qquad f_2(x) = x^{\frac{1}{2}} \qquad f_3(x) = x^{-1}$$

De har altså det tilfælles, at de alle er potenser af *x*.

Definition 3411 (Potensfunktion)

En funktion *f* med en forskrift på formen

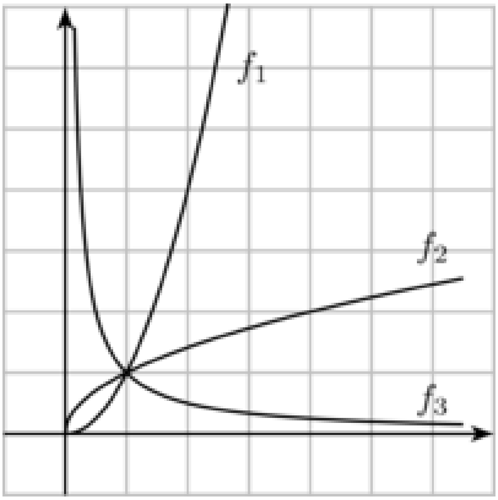
$$f(x) = b \cdot x^a, \quad x > 0$$

hvor *a* er et reelt tal og $b > 0$, kalder vi en potensfunktion med *eksponent a*.

Tallet *b* kalder vi for *proportionalitetskonstanten*.

Funktionerne f_1, f_2 og f_3 er alle eksempler på potensfunktioner, og graferne for f_1, f_2 og f_3 er vist på figur 3411.

ISBN 9788761685704



Figur 3411

Graferne for $f_1(x) = x^2$,

$$f_2(x) = \sqrt{x}$$

og

$$f_3(x) = \frac{1}{x}$$

Grafen for en potensfunktion $f(x) = b \cdot x^a$ vil altid gå gennem punktet med koordinaterne (1,*b*), da

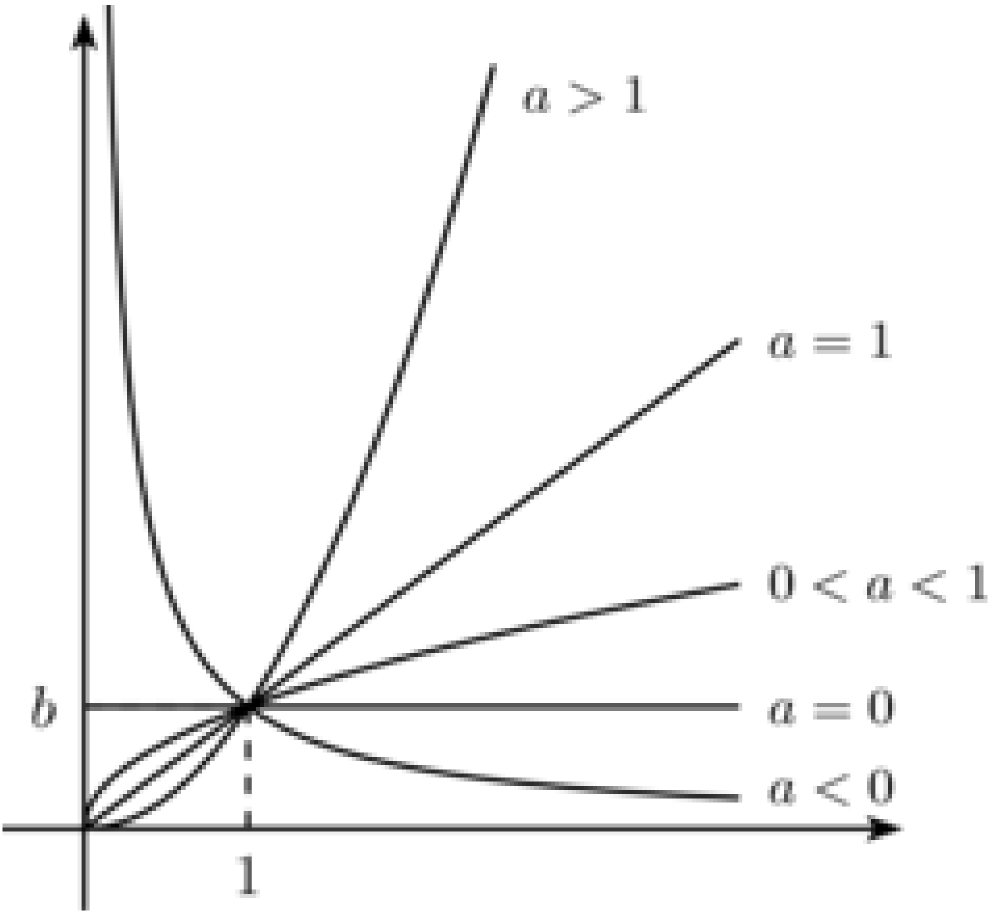
$$f(1) = b \cdot 1^a = b$$

og funktionen vil være

$$\begin{aligned} &\text{aftagende, når eksponenten er negativ, dvs. } a < 0 \\ &\text{konstant, når eksponenten er nul, dvs. } a = 0 \\ &\text{voksende, når eksponenten er positiv, dvs. } a > 0 \end{aligned}$$

Eksponentens betydning for grafen er illustreret på figur 3412.

ISBN 9788761685704



Figur 3412

Øvelse 3411

Angiv eksponenten *a* og proportionalitetskonstanten *b* for nedenstående funktioner.

$f(x) = 12 \cdot x^{1,6}$ $\quad g(x) = 16 \cdot x^{2}$ $\quad h(x) = 0{,}6 \cdot x^{0,75}$ $\quad k(x) = 0{,}6 \cdot x^{-1,5}$

Hvilke af funktionerne er aftagende, og hvilke er voksende?

Tegn graferne for *f*, *g*, *h* og *k*.

Ligefrem og omvendt proportionalitet

ISBN 9788761685704

To tilfælde af de potensielle udviklinger har traditionelt fået særlige navne.

For $a = 1$, er

$$f(x) = b \cdot x$$

og i dette tilfælde siger vi, at x og $f(x)$ er *ligefrem proportionale*. Når to størrelser er ligefrem proportionale, vokser de med den samme faktor. F.eks. vil $f(x)$ vokse med en faktor 2, når x vokser med en faktor 2, da

$$f(2x) = b \cdot (2x) = 2 \cdot b \cdot x = 2 \cdot f(x)$$

Ved ligefrem proportionalitet giver *en fordobling* af x *en fordobling* af $f(x)$.

For $a = -1$, er

$$f(x) = b \cdot x^{-1} = \frac{b}{x}$$

og i dette tilfælde siger vi, at x og $f(x)$ er *omvendt proportionale*. Når to størrelser er omvendt proportionale, vil den ene størrelse aftage med den samme faktor, som den anden vokser med. F.eks. vil $f(x)$ aftage med en faktor 2, når x vokser med en faktor 2, da

$$f(2x) = \frac{b}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{x} = \frac{1}{2} f(x)$$

Ved omvendt proportionalitet giver *en fordobling* af x *en halvering* af $f(x)$.

Øvelse 3412

Vis, at tabellen

x	1,5	6,0	12,0	13,5	18,0	21,0	27,0	33,0
$f(x)$	0,85	3,37	6,79	7,66	10,20	11,85	15,31	18,67

med god tilnærmelse svarer til proportionalitet mellem x og $f(x)$.

Angiv sammenhængen mellem x og $f(x)$.

ISBN 9788761685704

Øvelse 3413

Vis, at tabellen

x	73,2	41,2	30,7	21,3	18,4	16,0
$f(x)$	0,287	0,513	0,686	0,988	1,149	1,305

med god tilnærmelse svarer til en omvendt proportionalitet mellem x og $f(x)$.

Angiv sammenhængen mellem x og $f(x)$.

3.4.2 Forskrift ud fra to punkter

Ligesom vi har set det for de lineære funktioner og de eksponentielle funktioner, er forskriften for en potensfunktion fastlagt ved to punkter på grafen. Formlerne til beregning af a og b fremgår af følgende sætning

Sætning 3421 (Forskrift ud fra to punkter)

Lad

$$f(x) = b \cdot x^a$$

være en potensfunktion, hvis graf går gennem de to forskellige punkter med koordinater (x_1, y_1) og (x_2, y_2).

Så er

$$a = \frac{\ln(y_2) - \ln(y_1)}{\ln(x_2) - \ln(x_1)} \quad \textit{eller} \quad a = \frac{\log(y_2) - \log(y_1)}{\log(x_2) - \log(x_1)}$$

og

$$b = \frac{y_1}{x_1^a}$$

ISBN 9788761685704

Bevis (Forskrift ud fra to punkter)

Når punkterne ligger på grafen for f, må

$$y_1 = f(x_1) \qquad \text{og} \qquad y_2 = f(x_2)$$

dvs.

$$y_1 = b \cdot x_1^a \qquad \text{og} \qquad y_2 = b \cdot x_2^a$$

Så må

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{b \cdot x_2^a}{b \cdot x_1^a} = \frac{x_2^a}{x_1^a} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^a$$

For at finde a kan vi nu bruge ln.

$$\ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \ln\left(\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^a\right)$$

Så er

$$a = \frac{\ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}$$

som vi omskriver til

$$a = \frac{\ln(y_2) - \ln(y_1)}{\ln(x_2) - \ln(x_1)}$$

Herefter finder vi b

$$y_1 = b \cdot x_1^a \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{y_1}{x_1^a}$$

Erstatter vi ln med log i regningerne, får vi det tilsvarende udtryk med log.

ISBN 9788761685704

Eksempel 3421

Vi ser på en potensfunktion f, som opfylder

$$f(4) = 35 \quad \text{og} \quad f(8) = 100$$

Så går grafen gennem (4,35) og (8,100), og dermed bliver

$$a = \frac{\ln(y_2) - \ln(y_1)}{\ln(x_2) - \ln(x_1)} = \frac{\ln(100) - \ln(35)}{\ln(8) - \ln(4)} = 1{,}5146$$

og så bliver

$$b = \frac{y_1}{x_1^a} = \frac{35}{4^{1{,}5146}} = 4{,}287$$

Altså er forskriften

$$f(x) = 4{,}287 \cdot x^{1{,}5146}$$

Øvelse 3421

I hver af nedenstående opgaver er f en potensfunktion.

Bestem forskriften ud fra de givne oplysninger.

a. $f(8) = 6$ og $f(10) = 8$
b. $f(2) = 6$ og $f(4) = 3$
c. $f(1) = 14$ og $f(4) = 9$

Øvelse 3422

I hver af nedenstående opgaver er f en potensfunktion.

Bestem forskriften ud fra de givne oplysninger.

a. $b = 6$ og $f(3) = 12$
b. $f(2{,}4) = 1{,}7$ og $a = 1{,}5$

ISBN 9788761685704

Øvelse 3423

Grafen for en potensfunktion f går gennem punkterne $A(1{,}72)$ og $B(10{,}136)$.

Bestem $f(5)$.

Øvelse 3424

En potensfunktion f har proportionalitetskonstant 120 og $f(3) = 82$.

Bestem $f(4)$.

Øvelse 3425

Grafen for en potensfunktion f går gennem punkterne $A(2{,}60)$ og $B(8{,}90)$.

Løs ligningen $f(x) = 125$.

3.4.3 Vækstegenskaber

Nu vil vi se på vækstegenskaberne for potensfunktionen

$$f(x) = b \cdot x^a$$

Antag, at vi ganger x med en faktor k. Så bliver

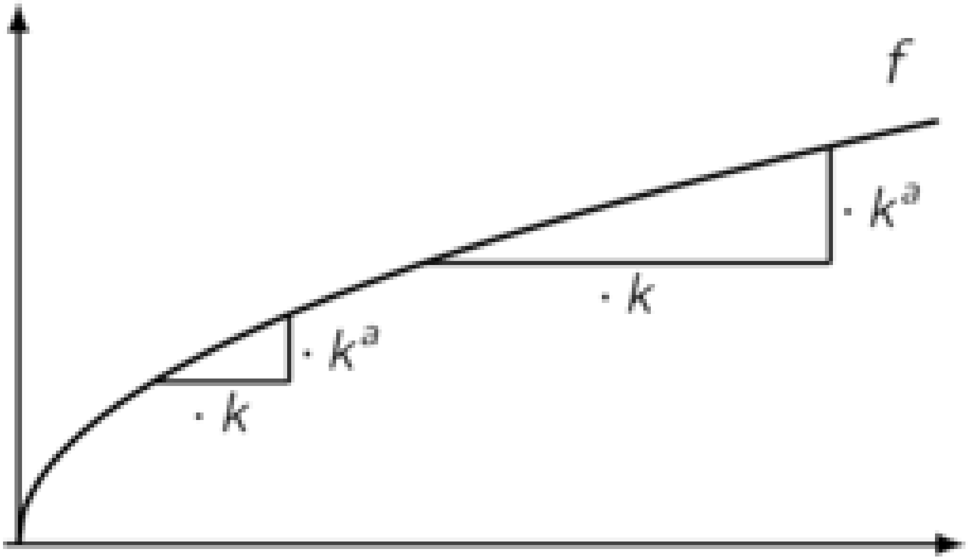
$$\begin{aligned} f(kx) &= b \cdot (kx)^a \\ &= b \cdot k^a \cdot x^a \\ &= k^a \cdot b \cdot x^a \\ &= k^a \cdot f(x) \end{aligned}$$

altså

$$f(kx) = k^a \cdot f(x) \tag{3431}$$

Regningen viser, at når x vokser med en faktor k, så vokser $f(x)$ med en faktor k^a. Dette er illustreret på figur 3431.

ISBN 9788761685704



Figur 3431

Eksempel 3431

Lad

$$f(x) = 5x^3$$

Når vi fordobler x, dvs. når vi ganger x med en faktor 2, bliver $f(x)$ ganget med 2^3 og dermed 8 gange så stor.

Hvis vi gør x halvt så stor, bliver funktionsværdien $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$ gange så stor.

Hvis vi nu ændrer x med en procent r_x ved at gange x med faktoren $1 + r_x$, bliver den nye funktionsværdi ifølge (3431)

$$f((1 + r_x) \cdot x) = (1 + r_x)^a \cdot f(x)$$

dvs. $f(x)$-værdierne bliver ganget med fremskrivningsfaktoren $(1 + r_x)^a$. Den tilhørende procentvise ændring r_y i $f(x)$-værdierne finder vi ved at trække 1 fra fremskrivningsfaktoren, så

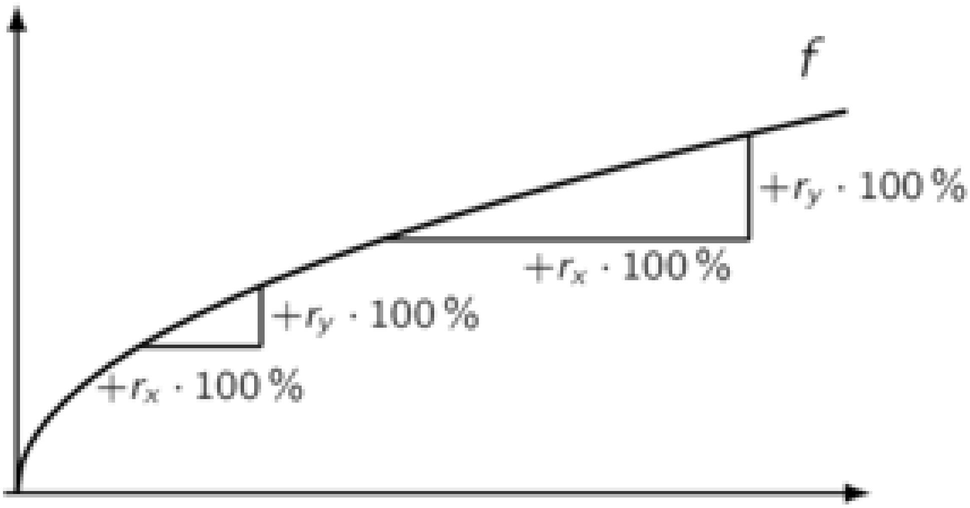
$$r_y = (1 + r_x)^a - 1 \tag{3432}$$

ISBN 9788761685704

Denne procentvise ændring r_y er uafhængig af vort valg af udgangspunkt x og afhænger kun af procenten r_x og potensfunktionens eksponent a.

Ligningerne (3431) og (3432) udtrykker den karakteristiske egenskab ved potensfunktioner, nemlig at der til *lige store procentvise tilvækster i x svarer lige store procentvise tilvækster i f(x)*.

Går vi det samme procentuelle stykke ud ad x-aksen, skal vi altså gå det samme procentuelle stykke op ad y-aksen, se figur 3432.



Figur 3432

Eksempel 3432

En potensfunktion er givet ved

$$f(x) = 12 \cdot x^{1,5}$$

Vi vil beregne den procentvise vækst i $f(x)$, når x vokser med 7 %.

Af formlen

$$r_y = (1 + r_x)^a - 1$$

finder vi

$$r_y = (1 + 0{,}07)^{1,5} - 1 = 1{,}07^{1,5} - 1 = 0{,}107$$

y-værdierne vokser altså med 10,7 %, når x-værdierne vokser med 7 %.

ISBN 9788761685704

Eksempel 3433

En potensfunktion er givet ved

$$f(x) = 0{,}32 \cdot x^{0{,}40}$$

Når x bliver 6 gange så stor, så vokser $f(x)$ med en faktor

$$k^a = 6^{0{,}40} = 2{,}0$$

Altså vokser $f(x)$ med 100 %, når x vokser med 500 %.

Eksempel 3434

En potensfunktion er givet ved

$$f(x) = 84 \cdot x^{-0{,}7}$$

Vi vil beregne den procentvise ændring i $f(x)$, når x vokser med 10 %.

Vi finder

$$r_y = (1 + 0{,}1)^{-0{,}7} - 1 = 1{,}1^{-0{,}7} - 1 = -0{,}065$$

Funktionsværdierne aftager altså med 6,5 %, når x-værdierne vokser med 10 %.

Øvelse 3431

En potensfunktion har forskriften

$$f(x) = 5 \cdot x^{1{,}4}$$

a. Hvor mange procent vokser $f(x)$ med, når x får en tilvækst på 30 %?
b. Hvor mange gange vokser $f(x)$, når x får en tilvækst på 500 %?

Øvelse 3432

En potensfunktion $f(x)$ vokser med 120 %, når x-værdierne vokser med 150 %.

Bestem eksponenten.

Øvelse 3433

En potensfunktion $f(x)$ aftager med 20 %, når x-værdierne vokser med 150 %.

Bestem eksponenten.

Øvelse 3434

Den potensielle udvikling f opfylder

$$f(1{,}6 \cdot x) = 1{,}2 \cdot f(x)$$

Bestem eksponenten for f.

Øvelse 3435

Grafen for en potensfunktion f går gennem punkterne (3,25) og (7,60).

a. Bestem forskriften for f.
b. Bestem $f(10)$.
c. Løs ligningen $f(x) = 120$.
d. Hvor mange procent vokser $f(x)$ med, når x vokser med 25 %?
e. Hvor mange procent skal x vokse med, for at $f(x)$ vokser med 15 %?

Øvelse 3436

Grafen for en potensiel udvikling g går gennem punkterne (5,100) og (10,18).

a. Bestem forskriften for g.
b. Bestem $g(20)$.
c. Løs ligningen $g(x) = 12$.
d. Hvor mange procent aftager $g(x)$ med, når x vokser med 10 %?
e. Hvor mange procent skal x vokse med, for at $g(x)$ aftager med 40 %?

3.5 xy-plot og regressionsanalyse

ISBN 9788761685704

Et *xy-plot*, også kaldet et *punktdiagram*, er den figur der fremkommer, når vi ud fra en tabel med sammenhørende værdier af to talstørrelser x og y afsætter punkterne (x,y) i et koordinatsystem.

Formålet med at tegne et xy-plot er at observere et evt. overordnet mønster mellem punkterne eller en tendens i tabellens tal.

Vi vil her anvende xy-plot i forbindelse med observerede data, som vi ønsker at beskrive med en teoretisk model, som vi finder ved *regression*.

3.5.1 Mindste kvadraters metode

Vi vil se på en generel metode til at fitte observerede data til en teoretisk model. De observerede data består af talpar $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)$, som vi typisk har givet i en tabel

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_N
y	y_1	y_2	$\ldots$	y_N

Lineær regression

Den helt grundlæggende model er den lineære model. I den lineære model søger vi en ret linje med ligning

$$y = ax + b \qquad (*)$$

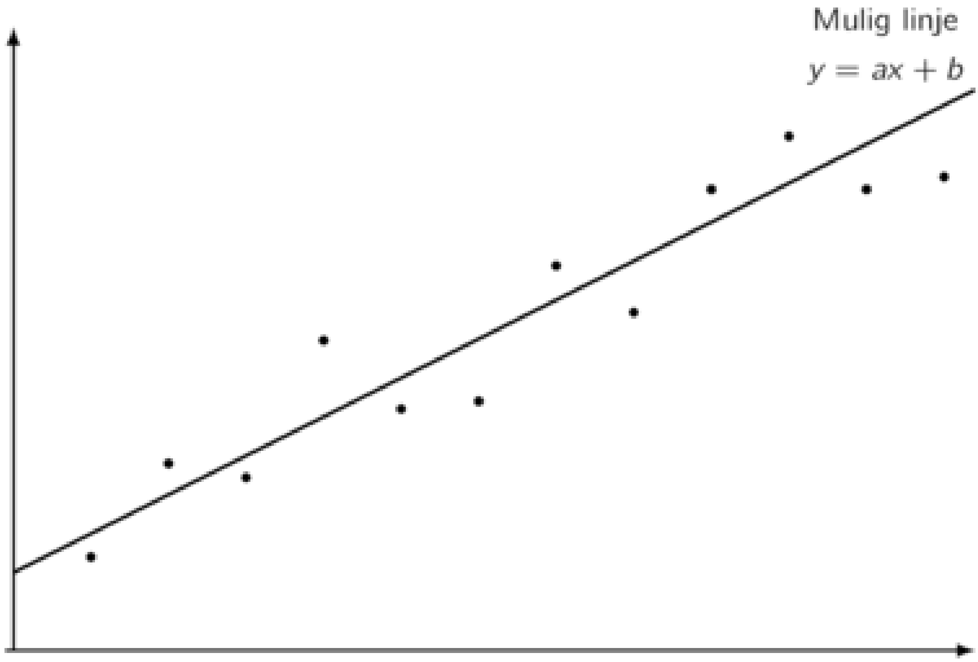
der bedst beskriver punkterne $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)$.

Det er ekstremt usandsynligt, at de givne data ligger på en ret linje, og vi kan derfor ikke beregne a og b i $(*)$, når vi skal tage hensyn til *alle data*.

I stedet beregner vi *det bedste valg af a* og *b* ved brug af den metode, som vi kalder *mindste kvadraters metode*. Vi siger, at vi benytter *regression*, og at vi bestemmer ligningen ved regression. Den tilhørende graf kalder vi *regressionslinjen* eller *den bedste rette linje* gennem punkterne.

Vi tager udgangspunkt i xy-plottet og den indtegnede linje i figur 3511.

ISBN 9788761685704



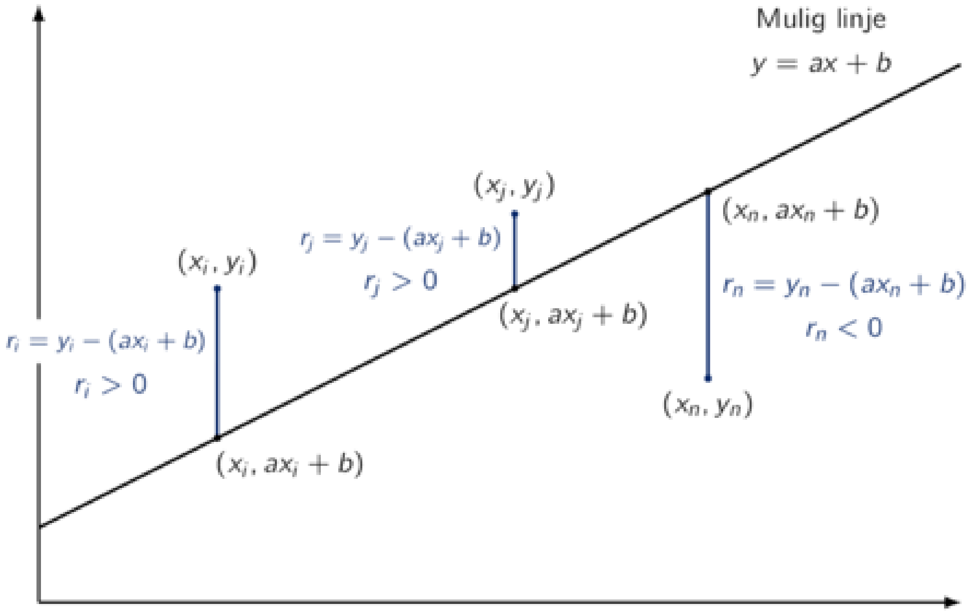
Figur 3511 *xy-plot af data og et muligt valg af linje til beskrivelse af disse*

Punkterne ligger spredt omkring linjen og som et mål for, hvor godt et punkt ligger i forhold til linjen, benytter vi punktets *residual* r_i

$$r_i = y_i - (ax_i + b)$$

Residualet er positivt, når punktet ligger over linjen, og negativt, når punktet ligger under linjen, som illustreret i figur 3512.

ISBN 9788761685704

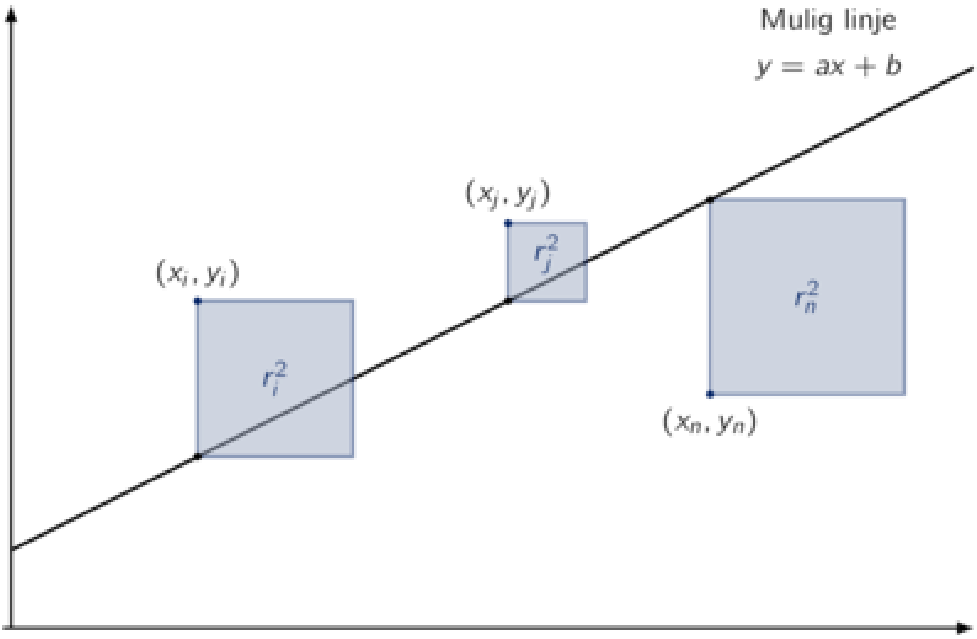


Figur 3512

Den numeriske værdi af residualet $|r_i| = |y_i - (ax_i + b)|$ er den lodrette afstand mellem punktet (x_i, y_i) og det tilsvarende punkt $(x_i, ax_i + b)$ på den valgte linje. Kvadratet på afstanden er

$$|y_i - (ax_i + b)|^2 = (y_i - (ax_i + b))^2 = r_i^2$$

ISBN 9788761685704



Figur 3513

Når vi bruger mindste kvadraters metode, benytter vi summen af kvadraterne på afstandene til at beskrive, hvor godt punkterne passer til den valgte linje. De værdier af *a* og *b*, der minimerer kvadratsummen

$$S(a, b) = (y_1 - (ax_1 + b))^2 + (y_2 - (ax_2 + b))^2 + \ldots + (y_N - (ax_N + b))^2$$

giver os den bedste rette linje $y = ax + b$, der beskriver alle punkterne.

Vi kan udlede formler til beregning af *a* og *b* ved at benytte differentialregning. Det vil vi dog ikke gøre her, og vi nøjes med at angive formlerne.

Sætning 3511 (Bedste rette linje)

Givet punkterne $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)$.

Den bedste rette linje, der beskriver punkterne, har ligningen

$$y = ax + b$$

hvor

$$a = \frac{N\sum xy - \left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{N\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} \quad \text{og} \quad b = \frac{\sum y - a\sum x}{N}$$

ISBN 9788761685704

Eksempel 3511

For overskuelighedens skyld angiver vi normalt (x,y)-data på tabelform.

Vi vil modellere data i den følgende tabel

x	$-1{,}1$	$1{,}0$	$1{,}5$	$3{,}5$	$4{,}2$	$6{,}1$
y	$1{,}9$	$1{,}5$	$2{,}8$	$3{,}3$	$4{,}8$	$6{,}4$

med en lineær model $y = ax + b$ ved brug af mindste kvadraters metode.

Vi har

$$\begin{aligned}
\sum x &= -1{,}1 + 1{,}0 + 1{,}5 + 3{,}5 + 4{,}2 + 6{,}1 = 15{,}2 \\
\sum y &= 1{,}9 + 1{,}5 + 2{,}8 + 3{,}3 + 4{,}8 + 6{,}4 = 20{,}7 \\
\sum xy &= -1{,}1 \cdot 1{,}9 + 1{,}0 \cdot 1{,}5 + 1{,}5 \cdot 2{,}8 + 3{,}5 \cdot 3{,}3 \\
&\quad + 4{,}2 \cdot 4{,}8 + 6{,}1 \cdot 6{,}4 = 74{,}36 \\
\sum x^2 &= (-1{,}1)^2 + 1{,}0^2 + 1{,}5^2 + 3{,}5^2 + 4{,}2^2 + 6{,}1^2 = 71{,}56
\end{aligned}$$

Ifølge sætning 3511 er

$$a = \frac{N\sum xy - \sum x \sum y}{N\sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{6 \cdot 74{,}36 - 15{,}2 \cdot 20{,}7}{6 \cdot 71{,}56 - 15{,}2^2} = 0{,}6631706$$

Herefter bliver b

$$b = \frac{\sum y - a\sum x}{N} = \frac{20{,}7 - 0{,}6631706 \cdot 15{,}2}{6} = 1{,}7699678$$

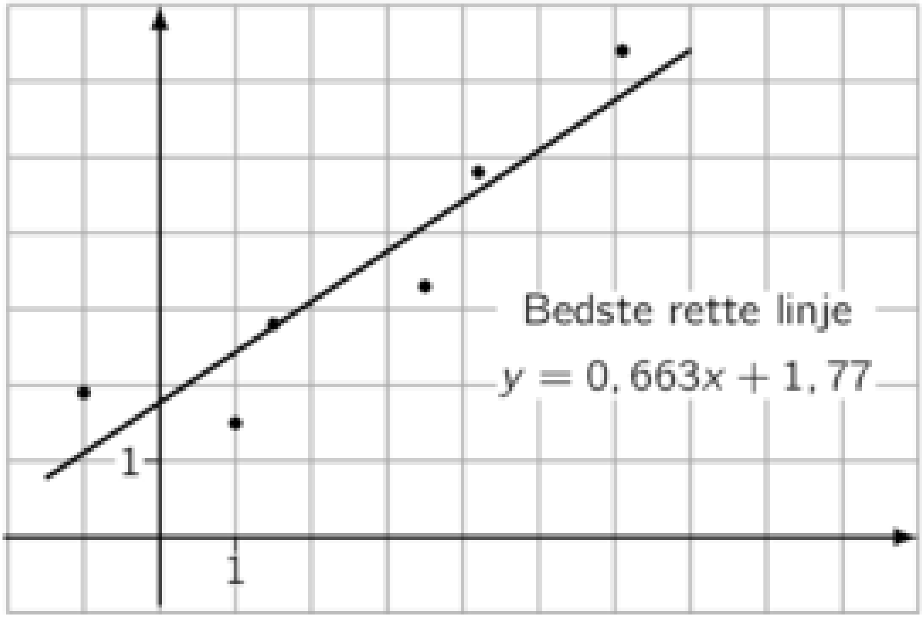
Med afrundinger på a og b bliver den bedste lineære model så

$$y = 0{,}663x + 1{,}77$$

Denne ligning finder vi også, hvis vi benytter CAS og lineær regression.

Et plot af datapunkterne og den bedste rette linje er vist i figur 3514.

ISBN 9788761685704



Figur 3514

Eksempel 3512

Vi vil lave lineær regression på nedenstående data

x	$-4{,}2$	$-0{,}6$	$0{,}2$	$2{,}3$	$5{,}9$	$9{,}7$
y	$6{,}0$	$4{,}8$	$4{,}1$	$2{,}5$	$1{,}0$	$-0{,}4$

Vi beregner først

$$\begin{aligned}\sum x &= -4{,}2 - 0{,}6 + 0{,}2 + 2{,}3 + 5{,}9 + 9{,}7 = 13{,}3 \\ \sum y &= 6{,}0 + 4{,}8 + 4{,}1 + 2{,}5 + 1{,}0 - 0{,}4 = 18{,}0 \\ \sum xy &= -4{,}2 \cdot 6{,}0 - 0{,}6 \cdot 4{,}8 + 0{,}2 \cdot 4{,}1 + 2{,}3 \cdot 2{,}5 \\ &\quad + 5{,}9 \cdot 1{,}0 + 9{,}7 \cdot (-0{,}4) = -19{,}49 \\ \sum x^2 &= (-4{,}2)^2 + (-0{,}6)^2 + 0{,}2^2 + 2{,}3^2 + 5{,}9^2 + 9{,}7^2 = 152{,}23\end{aligned}$$

Dernæst beregner vi

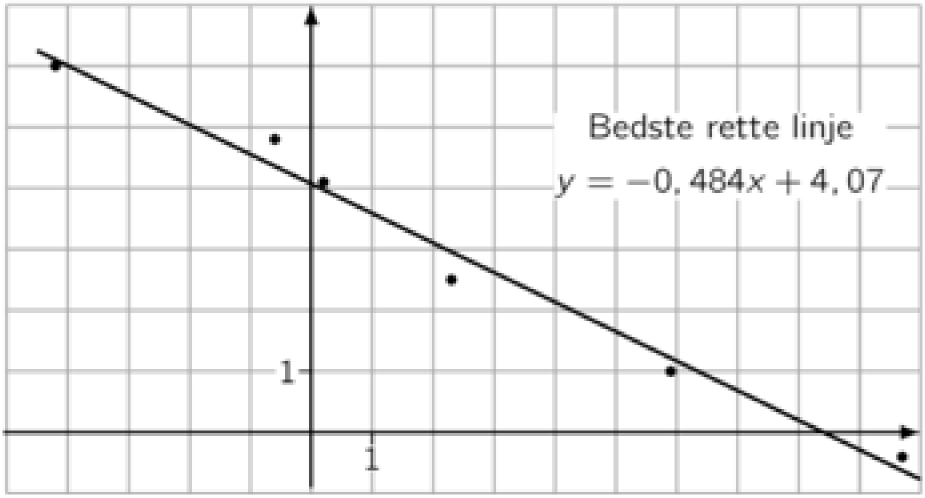
$$a = \frac{N\sum xy - \sum x \sum y}{N\sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{6 \cdot (-19{,}49) - 13{,}3 \cdot 18{,}0,7}{6 \cdot 152{,}23 - 13{,}3^2} = -0{,}484$$

og endelig

$$b = \frac{\sum y - a\sum x}{N} = \frac{18{,}0 - (-0{,}484) \cdot 13{,}3}{6} = 4{,}07$$

Den bedste rette linje gennem alle datapunkter er således

$$y = -0{,}484x + 4{,}07$$



Figur 3514

Øvelse 3511

Bestem den bedste rette linje, der beskriver nedenstående data

x	10	20	30	40	50	60
y	110	208	298	397	507	608

Andre regressionmodeller

Vi kan også benytte regression og mindste kvadraters metode på andre modeller end den lineære.

I de simpleste modeller f.eks. i form af en eksponentiel funktion eller en potensfunktion vil CAS oftest udføre lineær regression på transformerede data og variable.

Eksempler på tranformationer fremgår af figur 3515.

ISBN 9788761685704

Model	Ligning	Variable	Regressionsligning
Eksponentiel	$y = b \cdot a^x$	x, $\log(y)$	$\log(y) = \log(a)x + \log(b)$
Potensiel	$y = b \cdot x^a$	$\log(x)$, $\log(y)$	$\log(y) = a\log(x) + \log(b)$
Logaritmisk	$y = a\log(x) + b$	$\log(x)$, y	$y = a\log(x) + b$
Reciprok	$y = \frac{1}{ax+b}$	x, $\frac{1}{y}$	$\frac{1}{y} = ax + b$
Kvadratisk	$y = (ax+b)^2$	x, $\sqrt{y}$	$\sqrt{y} = ax + b$

Figur 3515

3.5.2 Korrelationskoefficienten

Når vi har anvendt mindste kvadraters metode, er det naturligt at undersøge, hvor godt regressionlinjen beskriver data.

Hvis ikke alle data har samme *x*-koordinat, kan vi altid bestemme en bedste rette linje, der fitter data, selvom der reelt set ikke er tale om en lineær sammenhæng.

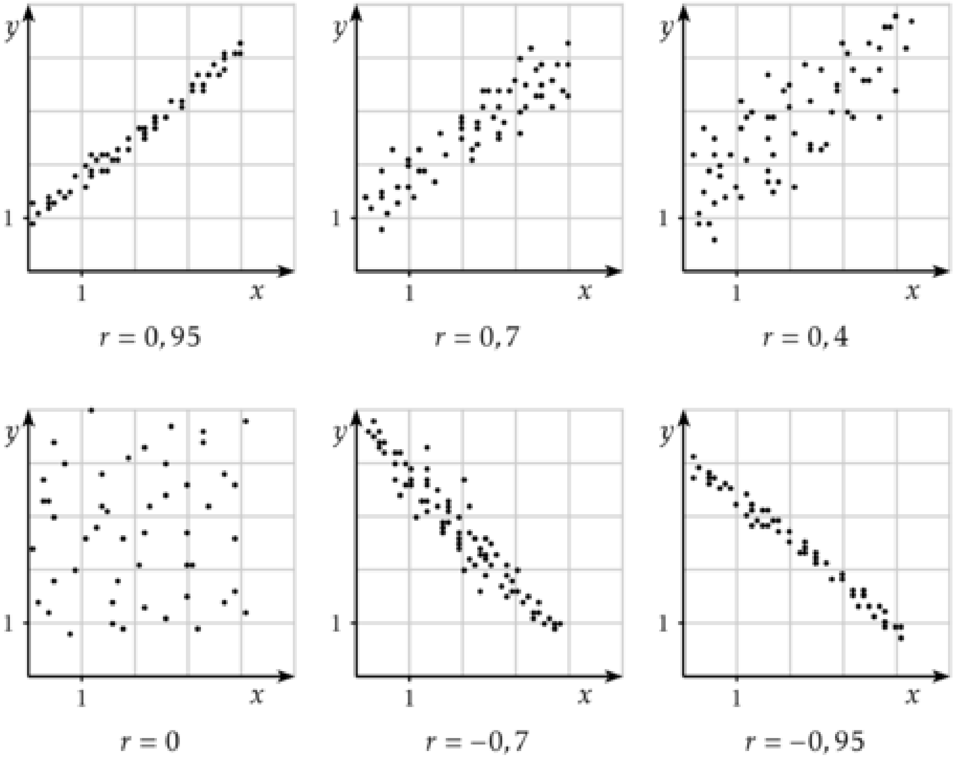
Til at beskrive hvor godt data er beskrevet ved regressionslinjen, benytter vi *korrelationskoefficienten r*

$$r = \frac{N\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{N\sum x^2 - (\sum x)^2} \cdot \sqrt{N\sum y^2 - (\sum y)^2}}$$

Korrelationskoefficienten r vil altid være et tal mellem −1 og 1. Når $r = -1$ og $r = 1$, passer data perfekt til en lineær model, og hvis $r = 0$ vil valg af den lineære model være helt urimelig.

Et *xy*-plot af datapunkterne giver et godt indtryk af, hvor meget data afviger fra en lineær model. Herunder er vist eksempler på *xy*-plots og korrelationskoefficientens størrelse.

ISBN 9788761685704



Figur 3521

ISBN 9788761685704

Eksempel 3521

Med data fra Eksempel 3511 er

$$\sum y^2 = 1{,}9^2 + 1{,}5^2 + 2{,}8^2 + 3{,}3^2 + 4{,}8^2 + 6{,}4^2 = 88{,}59$$

Dermed bliver korrelationskoefficienten

$$\begin{aligned} r &= \frac{N\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{N\sum x^2 - (\sum x)^2} \cdot \sqrt{N\sum y^2 - (\sum y)^2}} \\ &= \frac{6 \cdot 74{,}36 - 15{,}2 \cdot 20{,}7}{\sqrt{6 \cdot 71{,}56 - 15{,}2^2} \cdot \sqrt{6 \cdot 88{,}59 - 20{,}7^2}} \\ &= 0{,}9200 \end{aligned}$$

og

$$r^2 = 0{,}8464$$

Med data fra Eksempel 3512 finder vi

$$\sum y^2 = 6{,}0^2 + 4{,}8^2 + 4{,}1^2 + 2{,}5^2 + 1{,}0^2 + (-0{,}4)^2 = 83{,}26$$

og

$$\begin{aligned} r &= \frac{N\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{N\sum x^2 - (\sum x)^2} \cdot \sqrt{N\sum y^2 - (\sum y)^2}} \\ &= \frac{6 \cdot (-19{,}49) - 13{,}3 \cdot 18{,}0}{\sqrt{6 \cdot 152{,}23 - 13{,}3^2} \cdot \sqrt{6 \cdot 83{,}26 - 18{,}0^2}} \\ &= -0{,}9910 \end{aligned}$$

og

$$r^2 = 0{,}9821$$

Tallet r^2, som er et tal mellem 0 og 1, kalder vi *determinationskoefficienten*, og jo tættere r^2 er på 1, jo bedre er den lineære regressionsmodel til at beskrive data.

Den lineære regressionsmodel i Eksempel 3512 (se side 274) med $r^2 = 0{,}9821$, opfatter vi således som en god beskrivelse af de 6 datapunkter.

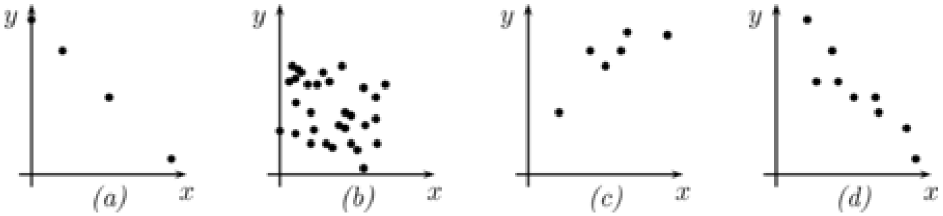
Hvor stor r^2 skal være, før vi anvender den linære regressionsmodel til beskrivelse af et datasæt, afhænger af, hvad vi undersøger, typen af data og inden for hvilket fagområde, vi arbejder.

ISBN 9788761685704

For den lineære regressionmodel i Eksempel 3511 (se side 272) med $r^2 = 0{,}8464$ kan vi således ikke umiddelbart afgøre, om den lineær model er en god eller dårlig beskrivelse af data, medmindre vi har givet et kriterium for, hvornår r^2 er "god" nok.

Øvelse 3521

Betragt nedenstående *xy*-plots

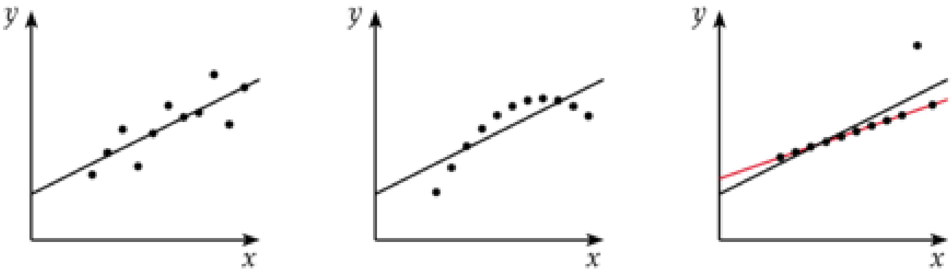


Hvilket *xy*-plot svarer til

a. $-1 < r < 0$
b. $r = 0$
c. $r = -1$
d. $0 < r < 1$

Vi kan ikke benytte korrelationskoefficienten r eller determinationskoefficienten r^2 ukritisk som argument for valg af den lineære regressionsmodel. Vi skal tage hensyn til tendenser i data, og tendenser afslører sig, når vi plotter data sammen med den bedste rette linje.

Til at illustrere dette betragter vi figur 3522.



Figur 3522

For alle tre datasæt giver lineær regression samme regressionlinje og korrelationskoefficient

$$y = 0{,}5x + 3 \quad \text{med} \quad r = 0{,}82$$

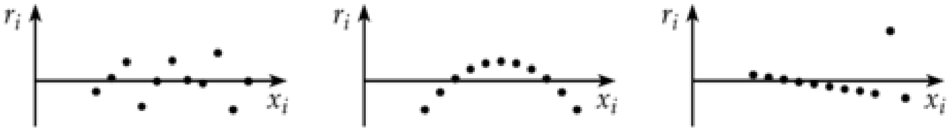
I det midterste tilfælde ligger observationer under linjen til at begynde med, derefter over linjen for til sidst at ligge under linjen igen, så modellen er ikke god.

I det tredje tilfælde svare den røde linje til en lineær model $y = 0{,}35x + 4{,}01$ med $r^2 = 1{,}00$, hvis vi ser bort fra et enkelt datapunkt.

Afvigelser fra en regressionsmodel kan vi også anskueliggøre ved et *residualplot*. I dette plotter vi punkterne

$$(x_i, r_i) = (x_i, y_i - (ax_i + b))$$

og punkterne vil fordele sig over og under en vandret linje, som svarer til regressionsmodellen. De tre datasæt og regressionsmodellen i figur 3522 giver residualplottene



Figur 3523

Residualplottene tydeliggør også de systematiske afvigelser fra den lineære model i de sidste to tilfælde.

3.5.3 Lineære udviklinger

Den lineære funktion

$$f(x) = ax + b$$

kalder vi også en *lineær udvikling*.

Vi taler om en lineær udvikling, når vi benytter den lineære funktion til at beskrive måledata, der tilsyneladende ligger på en ret linje.

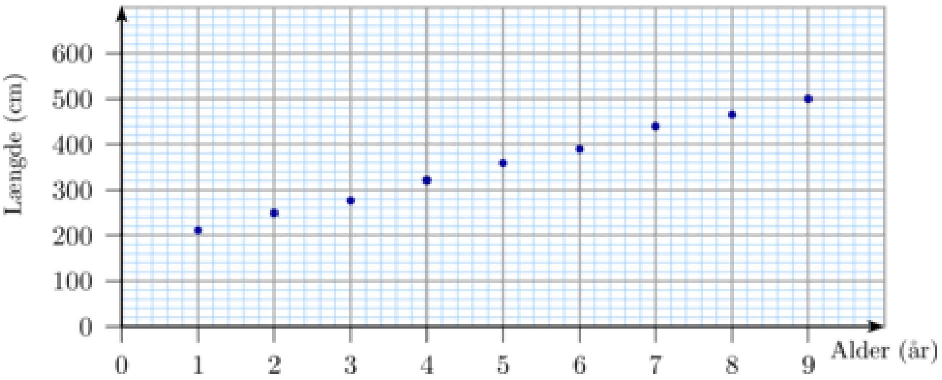
ISBN 9788761685704

Eksempel 3531

Tabellen nedenfor viser sammenhørende værdier af alder og længde for en population af delfiner.

Alder (år)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Længde (cm)	211	249	276	321	359	390	440	465	500

Hvis vi i et koordinatsystem afsætter delfinernes alder (målt i år) ud ad 1. aksen og deres længde (målt i cm) op ad 2. aksen, får vi punkterne i figur 3521.



Figur 3531
Vi vil gå ud fra, at længden L (målt i cm) kan beskrives som en lineær funktion af alderen t (målt i år), altså at

$$L(t) = at + b$$

Vi kan nu finde konstanterne a og b ved *lineær regression*. Metoden, der er indbygget i mange lommeregnere (eller matematikprogrammer), finder den bedste rette linje i forhold til *alle* punkterne.

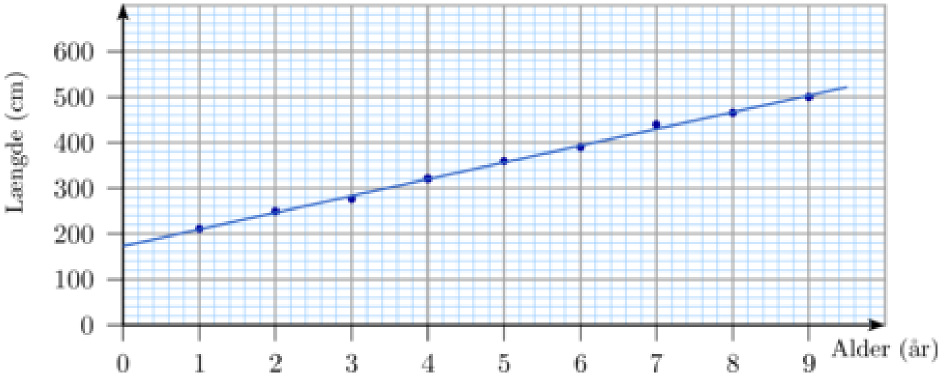
Ved lineær regression finder vi

$$L(t) = 36{,}7t + 173$$

hvor konstanterne a og b er rundet af til tre betydende cifre.

Grafen for denne udvikling er vist i figur 3522.

ISBN 9788761685704



Figur 3532
Tallet 173 i modellen svarer til, at længden på en nyfødt delfin er 173 cm.

Tallet 36,7 svarer til, at længden af en delfin vokser med 36,7 cm om året.

Øvelse 3531

Nedenfor er vist en tabel, som angiver sammenhængen mellem trykket *T* i forskellige dybder *x* under havoverfladen.

x (m)	10	13	35	40	100
T (atm)	$1,96$	$2,25$	$4,36$	$4,84$	$10,60$

Bestem forskriften for den lineære funktion $T(x)$, der bedst beskriver disse data, ved at benytte lineær regression.

ISBN 9788761685704

Øvelse 3532

Et trykkeri har beregnet de samlede omkostninger ved produktion af forskellige oplagsstørrelser.

Oplagsstørrelse (stk.)	1 000	2 000	2 500	3 000	4 000
Omkostninger (kr.)	29 600	33 550	35 900	37 900	42 200

Vi antager, at de samlede omkostninger $C(x)$ i kr. ved produktion af x stk. kan modelleres ved en funktion på formen

$$C(x) = ax + b$$

a. Bestem forskriften for $C(x)$
b. Giv en fortolkning af tallene a og b
c. Angiv korrelationskoefficenten, og kommenter denne.

Øvelse 3533

En bil kører med konstant fart. Sammenhængen mellem den tilbagelagte vejstrækning s (målt i meter) og tiden t (målt i sekunder) er vist i tabellen herunder.

t /s	$5,5$	$6,7$	$9,2$	$12,0$	$14,1$
s /m	$24,0$	$28,5$	$39,1$	$49,0$	$58,7$

Vi antager, at vejstrækningen kan skrives som en funktion af tiden på formen

$$s(t) = at + b$$

a. Bestem forskriften for $s(t)$
b. Giv en fortolkning af tallene a og b
c. Til hvilket tidspunkt har bilen kørt 50 m?

ISBN 9788761685704

Øvelse 3534

I det vedhæftede datasæt (Boligpris (Filen kan downloades fra ibogen se https://laerebogimatematikhhx1.systime.dk/index.php?id=237&L=0)) ses udviklingen for kvadratmeterprisen i kroner på en bestemt type bolig i tidsperioden fra 1960 til 2015.

a. Opstil en forskrift på formen $f(x) = ax + b$, der beskriver prisudviklingen på boligerne over tid.
b. Giv en fortolkning af tallene a og b.
c. Angiv determinationskoefficienten r^2.

øvelse 3535

I det vedhæftede datasæt (Landbrugsjord (Filen kan downloades fra ibogen se https://laerebogimatematikhhx1.systime.dk/index.php?id=237&L=0)) ses udviklingen for det samlede areal landbrugsjord i Danmark (i 1.000 hektar) i tidsperioden fra 1960 til 2015.

a. Opstil en forskrift på formen $f(x) = ax + b$, der beskriver udviklingen i arealet over tid.
b. Giv en fortolkning af tallene a og b.
c. Angiv determinationskoefficienten r^2.

Øvelse 3536

I det vedhæftede datasæt (Omsætning (Filen kan downloades fra ibogen se https://laerebogimatematikhhx1.systime.dk/index.php?id=237&L=0)) ses udviklingen for den samlede omsætning hos spiludbydere i Danmark (i mio. kroner) i tidsperioden fra 1960 til 2015.

a. Opstil en forskrift på formen $f(x) = ax + b$, der beskriver udviklingen i omsætningen over tid.
b. Giv en fortolkning af tallene a og b.
c. Angiv determinationskoefficienten r^2.

3.5.4 Eksponentielle udviklinger

En eksponentiel funktion

$$f(x) = b \cdot a^x$$

kalder vi også en *eksponentiel udvikling*.

Vi taler specielt om en eksponentiel udvikling, når vi benytter regressionen til at bestemme den eksponentielle funktion, der bedst beskriver et forelagt datasæt.

ISBN 9788761685704

Eksempel 3541

Antallet af diabetikere i Danmark er stigende. Tabel 3541 nedenfor viser antallet af diabetikere (i tusinde) i Danmark i perioden 1999-2008.

År	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
(tusinde)	140	150	161	174	188	203	215	227	240	256

Tabel 3541
Ud fra tabellens data bestemmer vi den eksponentielle udvikling, som angiver antallet af diabetikere $D(t)$ (i tusinde), hvor t er tiden i år efter 1999.

Vi skal således bestemme en forskrift på formen

$$D(t) = b \cdot a^t$$

som skal beskrive tallene i nedenstående tabel 3542, hvor vi har lavet en nulpunktsforskydning af årstallet frem til år 1999.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$D(t)$ (tusinde)	140	150	161	174	188	203	215	227	240	256

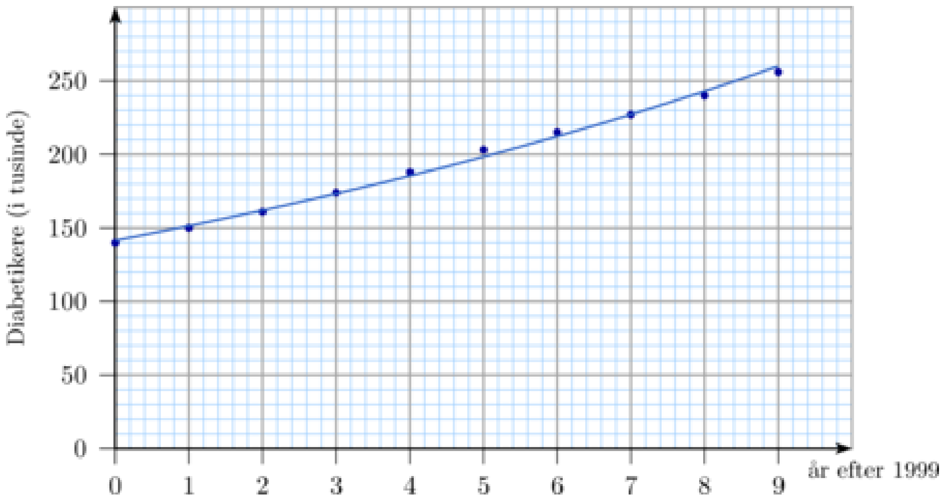
Tabel 3542
Vi skal benytte *alle* tallene i tabel 3542, og vi bestemmer derfor konstanterne a og b ved *eksponentiel regression*.

Ved regressionen finder vi b = 141,5 og a = 1,0699, så

$$D(t) = 141{,}5 \cdot 1{,}0699^t$$

Grafen for $D(t)$ og tabellens data er vist i figur 3541.

ISBN 9788761685704



Figur 3541

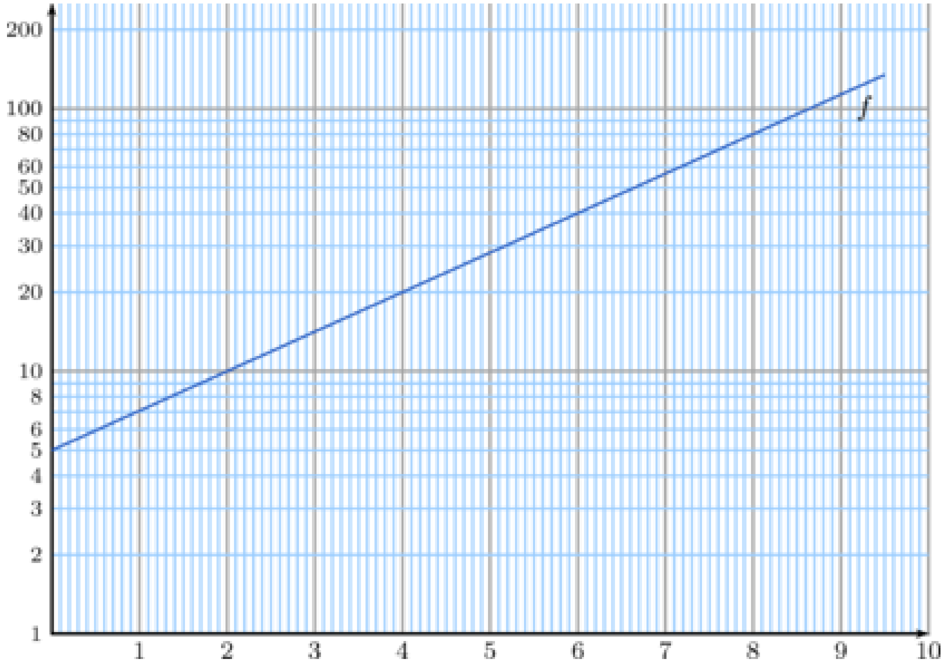
ISBN 9788761685704

Eksempel 3542

Grafer for eksponentielle udviklinger er tit tegnet i et koordinatsystem, hvor den almindelige inddeling på y-aksen er erstattet med en *logaritmisk skala*. I denne type koordinatsystemer bliver grafer for eksponentielle udviklinger rette linjer.

Vi anvender koordinatsystemer med logaritmisk skala på y-aksen, når vi gerne vil vise såvel små som store funktionsværdier i samme graf.

Den rette linje i figur 3542 svarer til en eksponentiel udvikling f.



Figur 3542

Ved aflæsning får vi

$$f(0) = 5 \quad , \quad f(2) = 10 \quad , \quad f(4) = 20 \quad , \quad f(8) = 80 \quad , \quad f(9) = 120$$

Som det fremgår af grafen i figur 3542, så vil voksende eksponentielle funktioner danne voksende rette linjer i koordinatsystemer med logaritmisk skala på y-aksen.

Omvendt vil aftagende eksponentielle funktioner danne aftagende rette linjer i koordinatsystemer med logaritmisk skala på y-aksen.

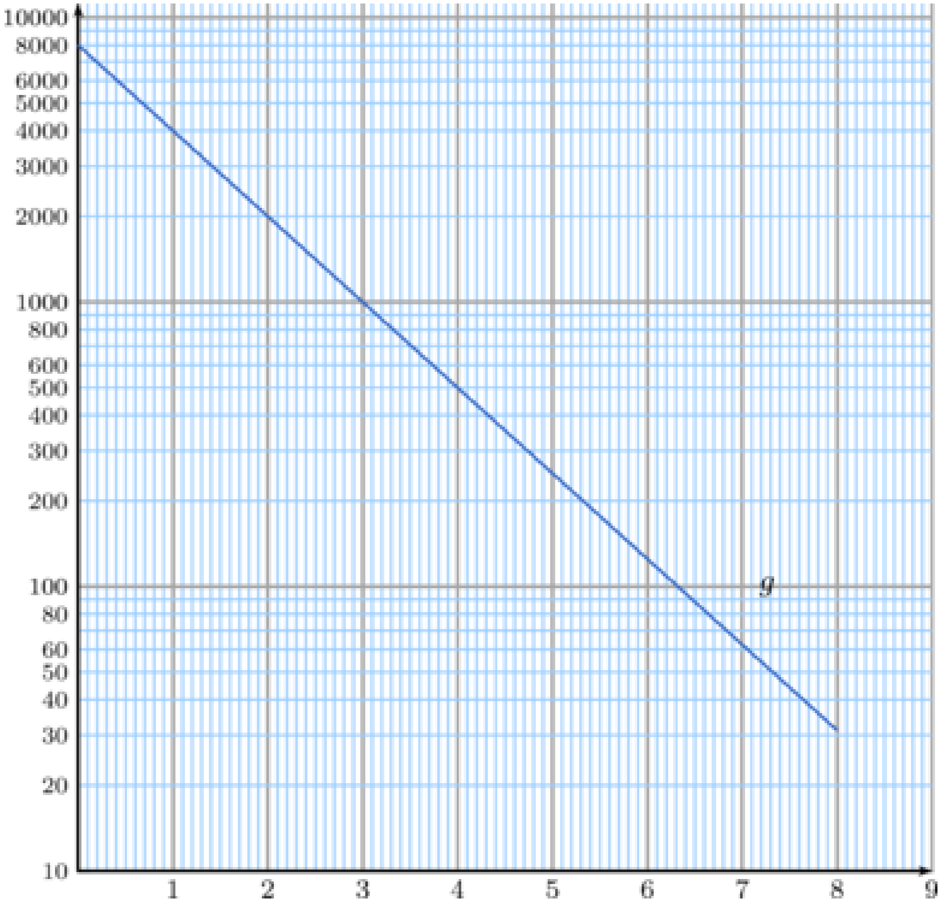
ISBN 9788761685704

Eksempel 3543

Grafen for

$$g(x) = 8000 \cdot 0{,}5^x \ \ , \ 0 \leq x \leq 8$$

er vist i figur 3543.



Figur 3543

Øvelse 3541

Verdensbefolkningen voksede voldsomt i løbet af det 20. århunderede. Udviklingen i befolkningstallet fremgår af tabellen nedenfor

År	1900	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2005
Antal (mia.)	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,9	3,7	4,4	5,1	6,5

Antag, at befolkningstallet $B(t)$ (målt i mia.) t år efter 1900 kan modelleres ved en funktion på formen

$$B(t) = b \cdot a^t \quad , \quad t \geq 0$$

a. Bestem tallene a og b.
b. Forklar betydningen af a.
c. I hvilket år vil verdensbefolkningen nå op på 10 mia. ifølge modellen?

Øvelse 3542

Et internetfirma har fulgt deres omsætning efter en omstrukturering. Resultaterne fremgår af nedenstående tabel.

År efter omstrukturering	0	1	2	3	4
Omsætning i tusind kr.	14 300	12 500	11 000	9 700	8 600

Vi antager, at omsætningen $O(t)$ (målt i tusind kr.) som funktion af tiden t (målt i år efter omstruktureringen) kan modelleres ved en model på formen

$$O(t) = b \cdot a^t \quad , \quad t \geq 0$$

a. Bestem tallene a og b og opskriv forskriften for modellen.
b. Bestem omsætningen efter 10 år ifølge modellen.
c. Hvor mange procent falder omsætningen med pr. år ifølge modellen?

Øvelse 3543

Bestem ved aflæsning på figur 3543

a. $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$ og $g(6{,}3)$.
b. løsningen til ligningen $g(x) = 70$.

ISBN 9788761685704

Øvelse 3544

I det vedhæftede datasæt (BNP (Filen kan downloades fra ibogen se https://laerebogimatematikhhx1.systime.dk/index.php?id=238&L=0)) ses udviklingen i BNP pr. indbygger i Kina (i US $) i tidsperioden fra 1990 til 2014

a. Opstil en forskrift på formen $f(x) = b \cdot a^x$, der beskriver i BNP over tid.
b. Giv en fortolkning af tallene a og b.
c. Angiv determinationskoefficienten r^2.

Øvelse 3545

I det vedhæftede datasæt (Befolkning (Filen kan downloades fra ibogen se https://laerebogimatematikhhx1.systime.dk/index.php?id=238&L=0)) ses udviklingen i befolkningen i en storby (i 1 000 personer) i tidsperioden fra 1960 til 2015.

a. Opstil en forskrift på formen $f(x) = b \cdot a^x$, der beskriver udviklingen i befolkningen over tid.
b. Giv en fortolkning af tallene a og b.
c. Angiv determinationskoefficienten r^2.

3.5.5 Potensudviklinger

En potensfunktion

$$f(x) = b \cdot x^a \, , \ x > 0$$

kalder vi også en *potensiel udvikling*.

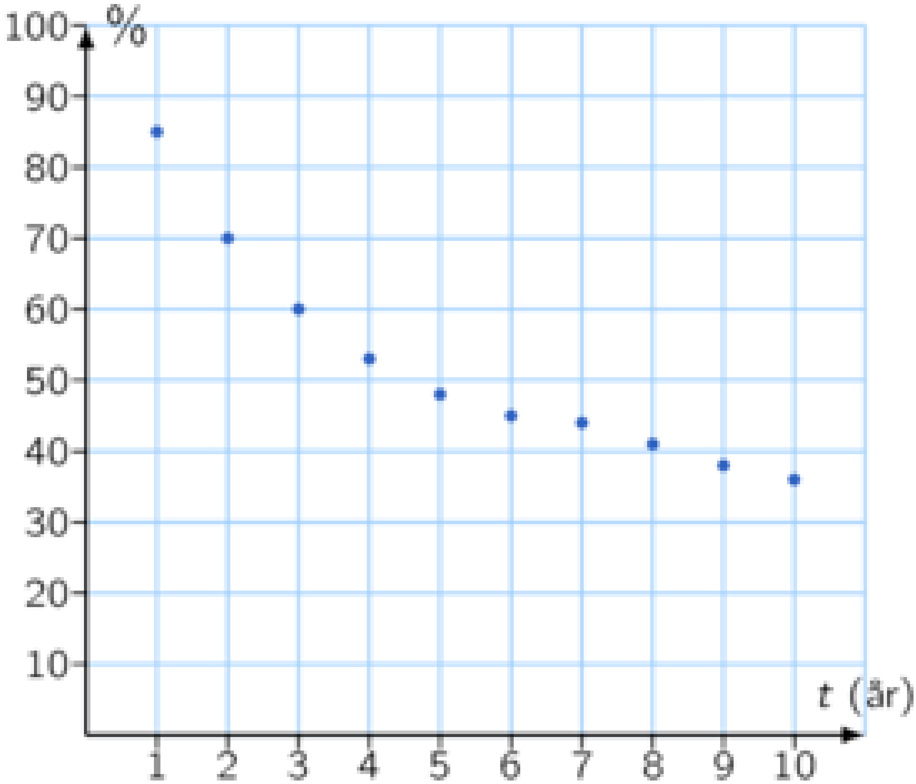
Vi taler specielt om en potensiel udvikling, når vi benytter regression til at bestemme den potensfunktion, der bedst beskriver et forelagt datasæt.

Eksempel 3551

En undersøgelse af nystartede virksomheder i slutningen 1990'erne gav følgende data

År efter start	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
% - del stadig eksisterende	85	70	60	53	48	45	44	41	38	36

Vi tegner et *xy*-plot af data.



Figur 3551

Vi antager, at andelen $f(t)$ (angivet i %) som funktion af tiden t (målt i år) er en potensiel udvikling på formen

$$f(t) = b \cdot t^a \quad , \quad t > 0$$

Ved at lave potensiel regression finder vi tallene a og b

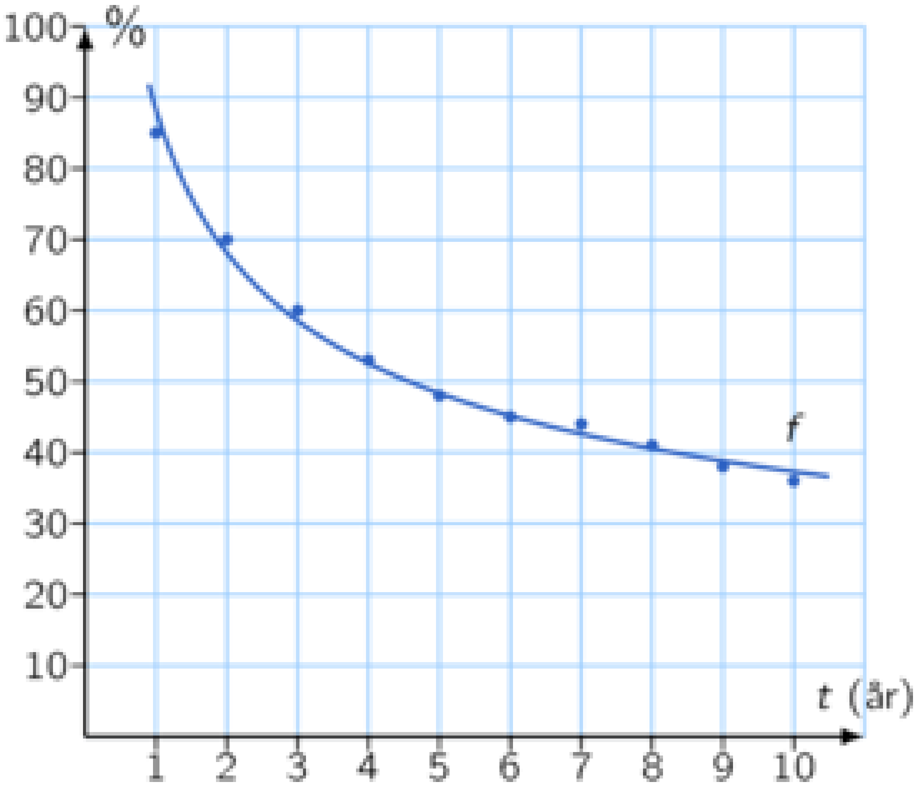
ISBN 9788761685704

$$b = 88{,}28$$
$$a = -0{,}3742$$

Altså er forskriften

$$f(t) = 88{,}28 \cdot t^{-0{,}3742} \quad , \quad t > 0$$

I figur 3552 er grafen indtegnet sammen med *xy*-plottet.

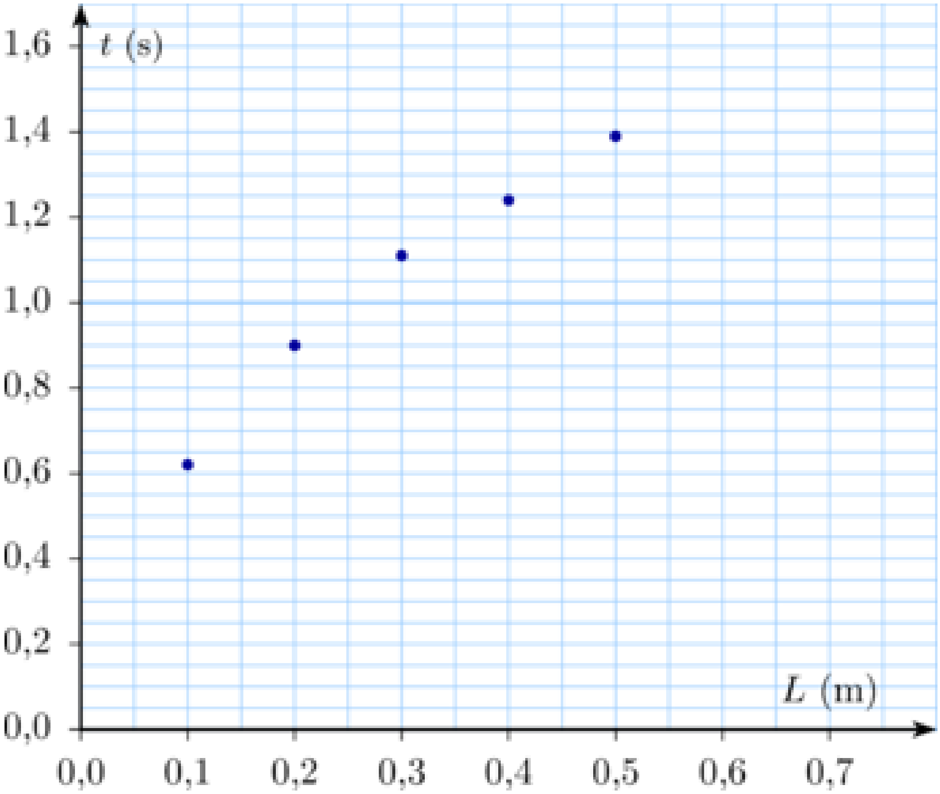


Figur 3552

Eksempel 3552

I et forsøg med et pendul måler vi svingningstidens afhængighed af pendullængden. Måleresultaterne fremgår af nedenstående tabel og af figur 3553.

L / m	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
t / s	0,62	0,90	1,11	1,24	1,39



Figur 3553
Vi antager, at svingningstiden t (målt i s) som funktion af pendullængden L (målt i m) er en potensiel udvikling på formen

$$t = b \cdot L^a \quad , \quad L > 0$$

Ved at lave potensiel regression finder vi tallene a og b

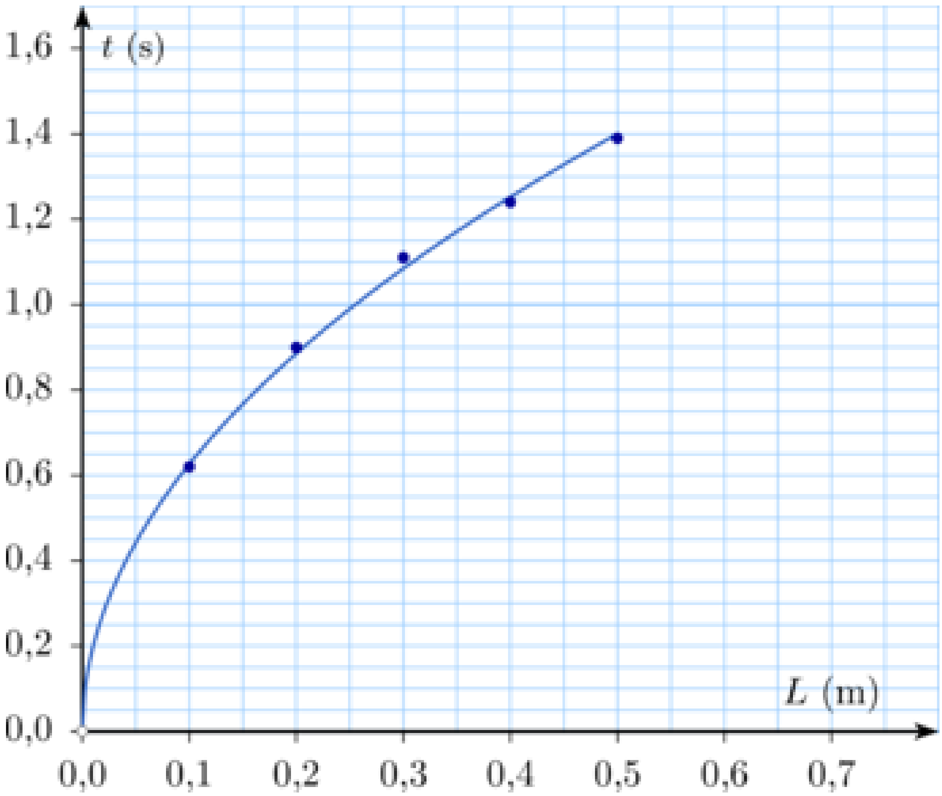
ISBN 9788761685704

$$b = 1{,}9841 \approx 1{,}98$$
$$a = 0{,}4997 \approx 0{,}50$$

Altså er forskriften for svingningstiden som funktion af pendullængden

$$t = 1{,}98 \cdot L^{0{,}50} \quad , \quad L > 0$$

I figur 3554 er grafen indtegnet sammen med vore måledata.



Figur 3554

Øvelse 3551

Givet følgende data

x	0,2	0,5	3	7	8
y	2,7	4	7,9	11	12

Find forskriften for den potensfunktion f, der bedst beskriver data ved regression.

Øvelse 3552

Ved undersøgelser af en bils bremselængder på en lige, tør vej fandt man følgende sammenhørende værdier mellem bilens hastighed i km/t og bremselængde i m

Hastighed (km/t)	50	80	110	130
Bremselængde (m)	27	76	162	234

Bremselængden $B(v)$ (i m) kan ud fra disse data beskrives ved en funktion

$$B(v) = b \cdot v^a$$

hvor v er bilens hastighed (i km/t)

a. Bestem forskriften for $B(v)$.
b. Løs ligningen $B(v) = 100$, og forklar betydningen af løsningen.
c. Hvor mange procent vokser bremselængden med, hvis hastigheden øges med 10 %?

ISBN 9788761685704

Øvelse 3553

Sammenhængen mellem en vindmølles effekt P (målt i kW) og vindhastigheden v (målt i m/s) er vist i tabellen herunder.

v / m/s	1,9	4,9	7,6	10,4	13,0
P/ kW	3,07	52,6	195	507	990

Antag, at effekten kan udtrykkes som en funktion af vindhastigheden på formen

$$P(v) = b \cdot v^a$$

a. Bestem en forskrift for $P(v)$.
b. Hvis vindhastigheden bliver fordoblet, hvor mange gange stiger effekten så?
c. Hvor mange procent vokser effekten med, hvis vindhastigheden vokser med 30 %?
d. Beregn vindhastigheden, når vindmøllen producerer el med en effekt på 100 kW.

Øvelse 3554

I det vedhæftede datasæt (Æbletræer _(Filen kan downloades fra ibogen se https://laerebogimatematikhhx1.systime.dk/index.php?id=239&L=0)_) ses sammenhængen mellem diameteren på stammen (i mm) og højden på træet (i cm), for en række æbletræer. Lad x beskrive diameteren på stammen og $f(x)$ træets højde.

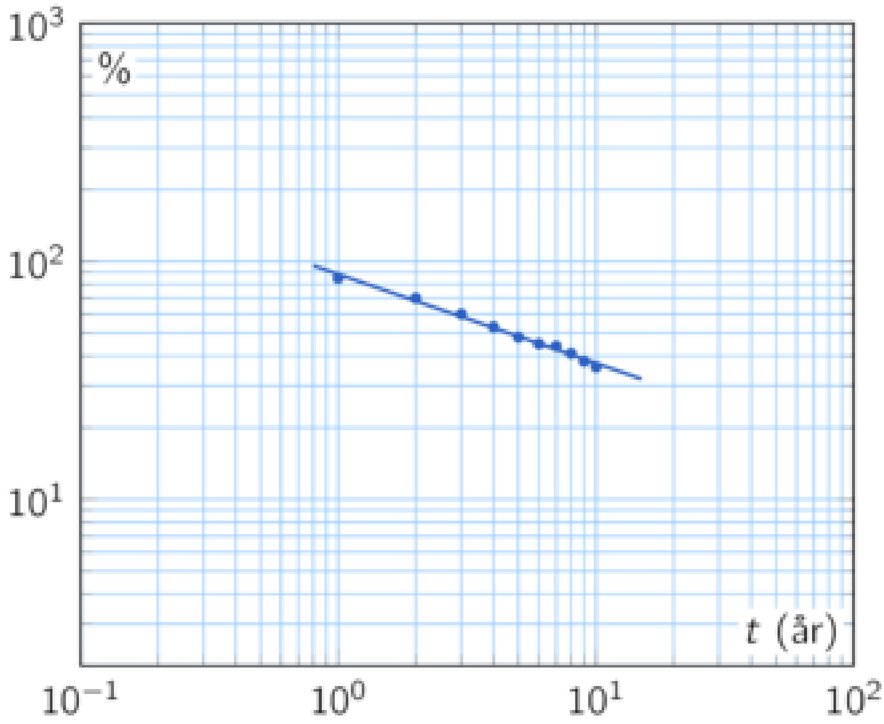
a. Opstil en model på formen $f(x) = b \cdot x^a$, der beskriver sammenhængen mellem diameteren på stammen og træets højde.
b. Angiv determinationskoefficienten r^2.
c. Bestem den forventelige højde på et træ, hvis stamme har en diameter på 80 mm.
d. Bestem den diameter et træ med højden på 250 cm har ifølge modellen.

Det gælder generelt, at potensielle udviklinger danner rette linjer i koordinatsystemer, hvor der er en logaritmisk skala på både x-aksen og y-aksen.

ISBN 9788761685704

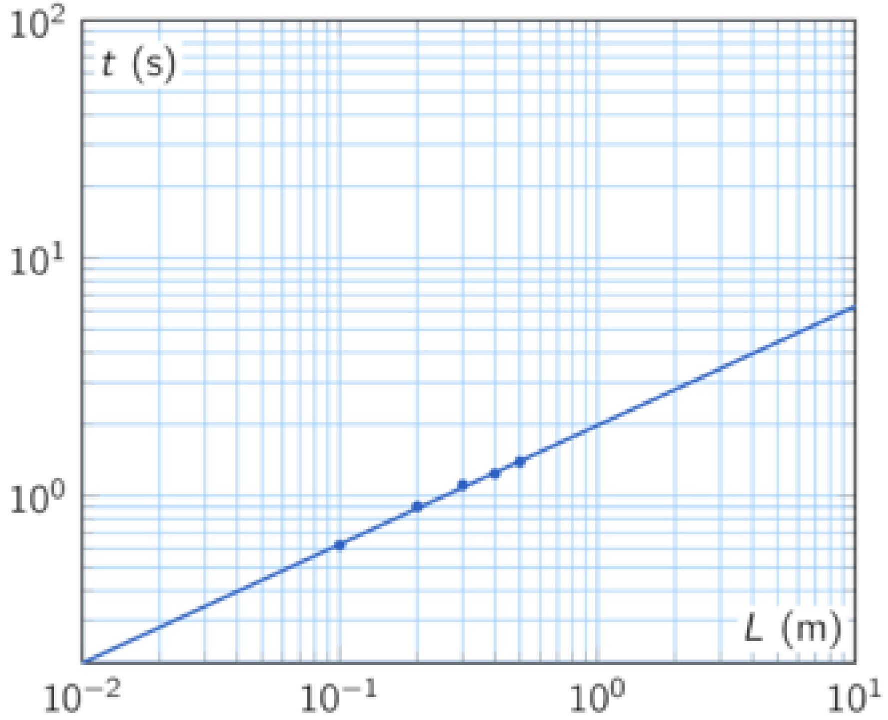
Eksempel 3553

Figurerne nedenfor viser data sammen med graferne for funktionerne fundet ved potensregression fra Eksempel 3551 og Eksempel 3552.



Figur 3555 *Punkter og graf fra Eksempel 3551.*

ISBN 9788761685704



Figur 3556 *Punkter og graf fra Eksempel 3552.*

ISBN 9788761685704

Kapitel 4. Finansiel regning

4.1 Sammensat rentesregning

I dette afsnit ser vi på finansiel regning med ét beløb.

Vi betragter et fast pengebeløb, der indsættes i banken, og så vokser beløbet over tid ud fra den rentesats, som banken tilbyder. De pengebeløb, vi arbejder med, kalder vi inden for finansiel regning for *kapital*.

Vi skal i vore beregninger tage hensyn til renters rente, fordi renterne løbende tilskrives vor kapital. Matematisk er denne form for finansiel regning blot et specialtilfælde af den eksponentielle funktion, som blev gennemgået i afsnit 3.3.

Det kan også være interessant at se, hvor længe en kapital skal stå i banken for at vokse til et ønsket beløb, eller hvor høj en rente, vi skal fordre, for at vor kapital vokser til en bestemt størrelse til et givent tidspunkt i fremtiden.

Desuden gennemgår vi forskellige rentebegreber i dette afsnit.

4.1.1 Frem- og tilbageskrivningsformler

Kapitalfremskrivning

Vi vil nu se på *kapitalfremskrivningsformlen*, som vi benytter, når vi indsætter et beløb på en konto i banken og lader beløbet stå og trække renter.

Til hverdag bruger vi ordet rente til både at beskrive selve rentebeløbet (det antal kroner vi får) og den procentsats, der bliver anvendt ved rentetilskrivningen. Den korrekte betegnelse for denne procentsats er egentlig *rentefod*, men vi vil benytte den almindelige betegnelse "rente".

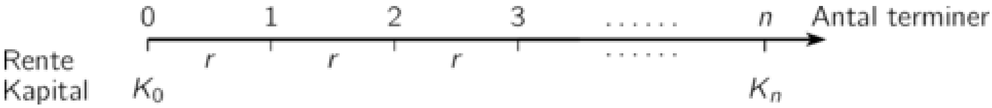
Den tid, der går mellem to rentetilskrivninger, kalder vi en *termin*.

Sætter vi

$$
\begin{aligned}
K_n &: \quad \text{slutværdien (slutkapitalen)} \\
K_0 &: \quad \text{startværdien (startkapitalen)} \\
r &: \quad \text{procentændringen (renten)} \\
1+r &: \quad \text{fremskrivningsfaktoren} \\
n &: \quad \text{antal terminer}
\end{aligned}
$$

ISBN 9788761685704

og tegner vi en tidslinje, der viser, hvordan startkapitalen K_0 trækker renten r i hver af de n terminer



Figur 4111

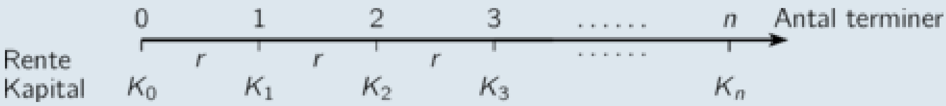
så kan vi beregne slutkapitalen K_n ved hjælp af formlen i nedenstående sætning

Sætning 4111 (Kapitalfremskrivningsformlen)

En startkapital K_0 bliver forrentet med renten r. Så vil kapitalen efter n terminer være vokset til

$$K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n$$

Bevis (Kapitalfremskrivningsformlen)



Figur 4112

Når vi indsætter en startkapital K_0, og renten er r, vil kapitalen efter den første rentetilskrivning være vokset til K_1

$$K_1 = K_0 \cdot (1 + r)$$

Nu er det K_1, der trækker renter, så efter den anden rentetilskrivning er kapitalen K_1 vokset til K_2

$$K_2 = K_1 \cdot (1 + r) = K_0 \cdot (1 + r) \cdot (1 + r) = K_0(1 + r)^2$$

Nu trækker K_2 renter, og efter den tredje rentetilskrivning er kapitalen vokset til K_3

$$K_3 = K_2 \cdot (1 + r) = K_0(1 + r)^2 \cdot (1 + r) = K_0 \cdot (1 + r)^3$$

Gentager vi denne regning, kan vi se, at kapitalen efter n rentetilskrivninger er vokset til

$$K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n$$

At beregne K_n kalder vi at *fremskrive* kapitalen n terminer.

ISBN 9788761685704

Eksempel 4111

Et beløb på 70 000 kr. bliver forrentet med 2 % pr. år. Efter 5 år er beløbet vokset til

$$K_5 = 70\,000 \cdot (1+0{,}02)^5 = 70\,000 \cdot 1{,}02^5 = 77\,286$$

altså en slutkapital på 77 286 kr.

Isolerer vi K_0 i kapitalfremskrivningsformlen, får vi formlen for *tilbageskrivning* af kapital

Sætning 4112 (Ukendt startkapital)

Hvis renten er r, og slutkapitalen efter n terminer er K_n, var den oprindelige startkapital

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n}$$

Eksempel 4112

Efter 5 år med en forrentning på 4 % p.a. er en kapital vokset til 7 299,92 kr.

Vi beregner startkapitalen

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n} = \frac{7\,299{,}92}{1{,}04^5} = 6\,000{,}00$$

Altså blev der oprindeligt indsat et beløb på 6 000,00 kr.

Når

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$

vil

$$(1+r)^n = \frac{K_n}{K_0}$$

hvoraf vi slutter, at

$$1 + r = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}$$

ISBN 9788761685704

og dermed har vi bevist

Sætning 4113 (Ukendt rente)

Når startkapitalen er K_0, og slutkapitalen efter n terminer er K_n, kan vi beregne renten r som

$$r = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

Eksempel 4113

En startkapital på 14 000 kr. er på 8 år vokset til 21 485,61 kr.

Vi beregner den helårlige rente

$$r = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 = \sqrt[8]{\frac{21\,485{,}61}{14\,000}} - 1 = 0{,}055 = 5{,}5\ \%$$

Vi ønsker nu at isolere n i kapitalfremskrivningsformlen

$$K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n$$

Først får vi

$$\frac{K_n}{K_0} = (1 + r)^n$$

og ved at anvende logaritmen på begge sider af lighedstegnet

$$\log\left(\frac{K_n}{K_0}\right) = \log\left((1 + r)^n\right)$$

får vi ved brug af iii. i sætning 3341 (se side 236) ,at

$$\log\left(\frac{K_n}{K_0}\right) = n \cdot \log(1 + r)$$

hvilket giver os

$$n = \frac{\log\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\log(1 + r)}$$

ISBN 9788761685704

Vi formulerer det i en sætning

Sætning 4114 (Ukendt antal terminer)

Når renten er r, startkapitalen er K_0, og slutkapitalen er K_n, kan vi beregne antallet af terminer n som

$$n = \frac{\log\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\log(1+r)}$$

Eksempel 4114

En kapital på 1 200 kr. er med en rente på 3,5 % p.a. vokset til 1 310 kr.

Vi beregner antallet af terminer

$$n = \frac{\log\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\log(1+r)} = \frac{\log\left(\frac{1\,310}{1\,200}\right)}{\log(1{,}035)} = 2{,}55$$

Altså har pengene trukket renter i 2,55 år.

Øvelse 4111

Beregn

a. kapitalen efter 7 terminer, når renten er 2 % og startkapitalen er 4 500 kr.
b. startkapitalen, når renten er 1,5 % og kapitalen efter 5 terminer er 1 150 kr.
c. renten, når startkapitalen er 245 kr. og kapitalen efter 7 terminer er 433 kr.
d. antal terminer, når startkapitalen er 3 000 kr. og kapitalen med en rente på 2,5 % er vokset til 3 700 kr.

ISBN 9788761685704

Øvelse 4112

Udfyld tabellen

K_0	K_n	r	n
9 400 kr.		6 %	12
	880 kr.	2,5 %	9
300 kr.	400 kr.		10
120 000 kr.	150 000 kr.	4,9 %	

Sammenhæng mellem kapitalfremskrivning og eksponentiel funktion

Sammenligner vi forskriften for en eksponentiel funktion

$$f(x) = b \cdot a^x$$

med udtrykket for kapitalfremskrivning

$$K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n$$

kan vi se, at de er på samme form. Vi kan altså lade begyndelsesværdien b svare til startkapitalen K_0 og grundtallet a svare til fremskrivningsfaktoren $1 + r$

$$a = 1 + r$$

Vi ser med andre ord, at *eksponentiel vækst* er det samme som *procent-vækst*

$$f(x) = b \cdot (1 + r)^x$$

Eksempel 4115

Therese indsætter 100 kr. i banken til en rente på $r = 3$ % pr. år. Hver gang Therese får renter, bliver beløbet på kontoen ganget med 1,03. Hvis vi sætter $f(x)$ til Thereses beholdning i banken efter x år, vil

$$f(x) = 100 \cdot 1{,}03^x$$

ISBN 9788761685704

4.1.2 Rentebegreber

Inden for finansiel regning anvender vi nogle forskellige rentebegreber. Ved nogle af begreberne møder vi i litteraturen forskellige udtryk for den samme rente, mens vi ved andre møder en anden betydning.

Vi vil i nedenstående definere rentebegreberne

- pålydende rente
- årlig effektiv rente
- gennemsnitlig rente

Den pålydende rente

Den pålydende rente er den rentesats, vi får oplyst som den gældende rentesats. Dette vil typisk være en månedlig, en kvartalsvis eller en årlig rente, afhængig af hvor lange terminer vi arbejder med.

Den pålydende rente kalder vi ofte også for *terminsrenten*.

Eksempel 4121

Hvis renten oplyses til at være 2 % pr. måned, vil den pålydende rente være 2 %. Den pålydende rente kan i andre tilfælde også være oplyst som 10 % årligt med månedlig rentetilskrivning.

Den årlige effektive rente

Den årlige effektive rente er renten pr. år inklusiv eventuelle renters rente. Vi ser ved denne rentesats bort fra eventuelle administrationsomkostninger, stiftelsesomkostninger og gebyrer.

Den årlige effektive rente kalder vi også for *debitorrenten*.

Sætning 4121 (Årlig effektiv rente)

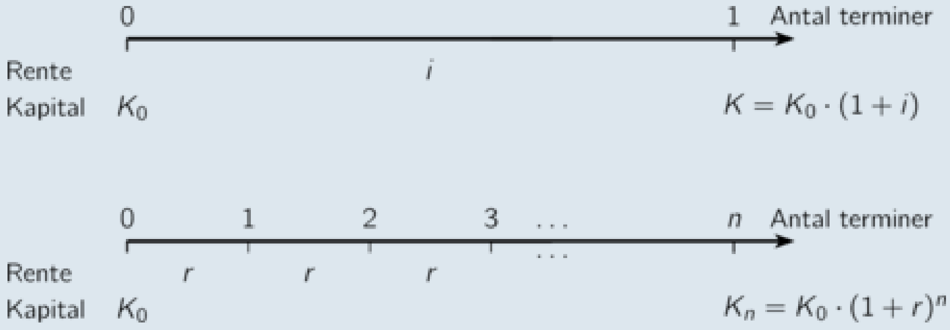
Hvis r er terminsrenten, og der er n terminer på et år, så er den årlige effektive rente givet ved

$$i = (1+r)^n - 1$$

ISBN 9788761685704

Bevis (Årlig effektiv rente)

Vi tegner to tidslinjer, hvor den første viser, hvordan en startkapital K_0 trækker renten i i én lang termin. Den anden tidslinje viser, hvordan startkapitalen vil trække renten r i n korte terminer.



Figur 4121
Da slutkapitalen skal være den samme, har vi

$$K_0 \cdot (1 + i) = K_0 \cdot (1 + r)^n$$

eller

$$1 + i = (1 + r)^n$$

og dermed

$$i = (1 + r)^n - 1$$

Ønsker vi at bestemme terminsrenten ud fra den årlige effektive rente, kan vi foretage følgende omskrivninger

$$\begin{aligned} & i = (1 + r)^n - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & (1 + r)^n = i + 1 \\ \Leftrightarrow \quad & 1 + r = \sqrt[n]{i + 1} \\ \Leftrightarrow \quad & r = \sqrt[n]{i + 1} - 1 \end{aligned}$$

ISBN 9788761685704

Eksempel 4122

En månedlig terminsrente på 2 % svarer til en årlig effektiv rente på

$$i = (1+r)^n - 1 = 1{,}02^{12} - 1 = 0{,}268 = 26{,}8\ \%$$

En årlig effektiv rente på 8 %, svarer til en halvårlig terminsrente på

$$r = \sqrt[n]{1+i} - 1 = \sqrt[2]{1{,}08} - 1 = 0{,}039\,2 = 3{,}92\ \%$$

Eksempel 4123

Når en bank opgiver den pålydende rente til 8 % p.a. med kvartalsvis rentetilskrivning, så betyder det, at banken tilskriver $\frac{8\ \%}{4} = 2\ \%$ i rente fire gange årligt.

Den årlige effektive rente vil i dette tilfælde være

$$i = (1+r)^n - 1 = 1{,}02^4 - 1 = 0{,}0824 = 8{,}24\ \%$$

Eksempel 4124

I løbet af et år er et beløb på 11 000 kr. vokset til 12 103,73 kr. gennem 12 månedlige rentetilskrivninger.

Den månedlige terminsrente er

$$r = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 = \sqrt[12]{\frac{12\,103{,}73}{11\,000}} - 1 = 0{,}008 = 0{,}8\ \%$$

Den årlige effektive rente er

$$i = (1+r)^n - 1 = 1{,}008^{12} - 1 = 0{,}100 = 10{,}3\ \%$$

ISBN 9788761685704

Øvelse 4121

Bestem den årlige rente, når

a. renten er 6 % pr. halvår
b. renten er 3 % pr. kvartal
c. renten er 1 % pr. måned

Øvelse 4122

Bestem den månedlige rente, når

a. den årlige rente er 12 %
b. den halvårlige rente er 6 %
c. den kvartalsvise rente er 3 %

Øvelse 4123

I 1960 var verdens samlede befolkning 3,0 mia. I 1987 var den 5,1 mia.

a. Beregn den gennemsnitlige procentvise stigning pr. år i perioden 1960-1987.
b. Hvis denne vækst fortsætter uændret, hvor stor vil verdens samlede befolkning så være i år 2025?

Øvelse 4124

Bestem den årlige effektive rente, når

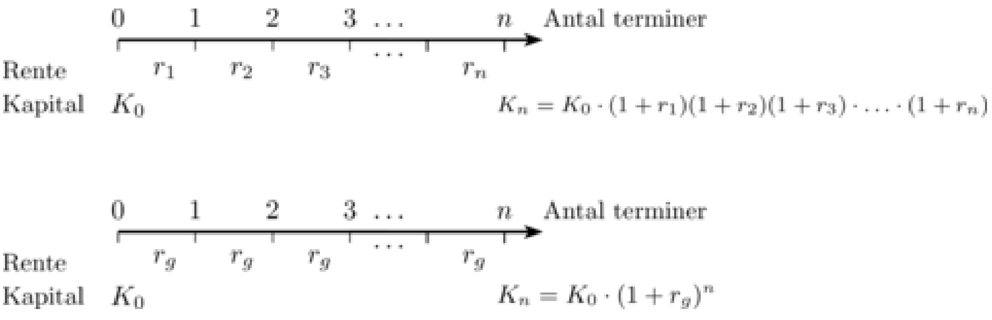
a. den halvårlige terminsrente er 5 %
b. den kvartalsvise terminsrente er 3,5 %
c. den månedlige terminsrente er 0,75 %

Gennemsnitlig rente

Ofte vil renten variere fra termin til termin. Det kan derfor være bekvemt at udregne den gennemsnitlige rente, som er den konstante rente r_g, der vil give samme slutkapital som de varierende renter.

ISBN 9788761685704

Vi tegner nu to tidslinjer. Den første viser, hvordan startkapitalen K_0 trækker de varierende renter r_1, r_2, r_3, ..., r_n i n terminer. Den anden tidslinje viser, hvordan startkapitalen vil trække renten r_g i n terminer, hvis renten er konstant.



Figur 4122

Da slutkapitalen skal være den samme, har vi

$$K_0 \cdot (1+r_g)^n = K_0 \cdot (1+r_1)(1+r_2)(1+r_3) \cdot \ldots \cdot (1+r_n)$$

og dermed

$$r_g = \sqrt[n]{(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3) \cdot \ldots \cdot (1+r_n)} - 1$$

Vi har hermed udledt

Sætning 4122 (Gennemsnitlig rente)

Den konstante, gennemsnitlige rente r_g, der svarer til forrentning af en kapital med de varierende renter r_1, r_2, r_3, ..., r_n i n terminer, er

$$r_g = \sqrt[n]{(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3) \cdot \ldots \cdot (1+r_n)} - 1$$

Eksempel 4125

Et beløb bliver forrentet i 3 terminer med de varierende renter 3 %, 2 % og 1,5 %. Hertil svarer den gennemsnitlige rente

$$\begin{aligned} r_g &= \sqrt[3]{(1+0{,}03)(1+0{,}02)(1+0{,}015)} - 1 \\ &= \sqrt[3]{1{,}03 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}015} - 1 \\ &= 0{,}0216 \end{aligned}$$

Altså en gennemsnitlig rente på 2,16 %.

ISBN 9788761685704

Øvelse 4125

En kapital er over en 4-års periode blevet forrentet med fire forskellige årlige rentesat-ser.

1. år: 2 % p.a.
2. år: 14 % p.a.
3. år: 12 % p.a.
4. år: 4 % p.a.

Beregn den gennemsnitlige årlige rente over denne 4-års-periode.

Øvelse 4126

Om benzin oplyses, at prisen i fire på hinanden følgende måneder ændredes med hen-holdsvis 12 %, 5 %, –10 % og 3 %.

a. Beregn den gennemsnitlige procentændring i firemåneders perioden.
b. Hvor stor er den samlede procentvise ændring?

ÅOP (Årlige omkostninger i procent)

Når vi optager et lån, vil der foruden renterne også blive pålagt gebyrer, stiftelsesomkost-ninger, administrationsomkostninger og afgifter til staten. Lægger vi alle omkostninger ved lånet sammen over hele lånets løbetid og omregner til en gennemsnitlig årlig procent, så har vi *ÅOP* eller *årlige omkostninger i procent*.

Bemærk, at f.eks. tinglysningsafgift og andre låneomkostninger ikke afhænger af lånets løbetid, og derfor vil ÅOP generelt være højere, når vi vælger lån med kortere løbetid, da disse udgifter bliver fordelt på færre år.

Vi benytter ÅOP, når vi skal sammenligne lån med hinanden, men sammenligningen forud-sætter, at lånene har samme størrelse og samme løbetid.

4.2 Annuitetsregning

I dette afsnit ser vi på finansiel regning med flere ens beløb.

En *annuitet* er netop en fast ydelse, som vi indbetaler hver termin til en fast rente. Ordet kommer af det latinske anno, der betyder år. Det er lidt misvisende, da de fleste annuiteter har månedlige eller kvartalsvise indbetalinger.

ISBN 9788761685704

Når vi laver en opsparing ved at indbetale et fast beløb hver termin, så kalder vi det en *opsparingsannuitet*, og saldoen på vor konto kalder vi annuitetens *fremtidsværdi*.

Når vi optager et lån og afdrager lånet ved at indbetale et fast beløb hver termin, så kalder vi det en *gældsannuitet*, og lånebeløbets oprindelige størrelse kalder vi annuitetens *nutidsværdi*.

4.2.1 Fremtidsværdi

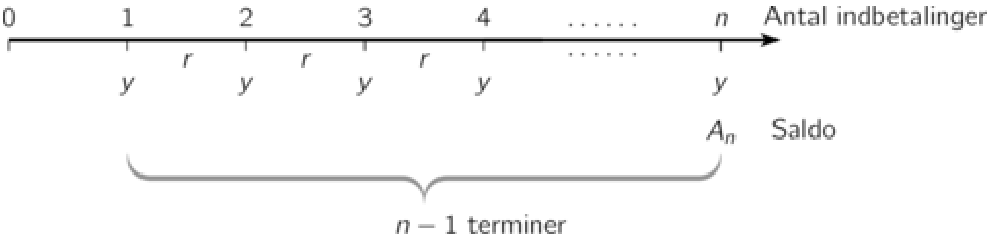
Opsparingsannuitet

Vi ser på en opsparing, hvor vi n gange med den faste rente r pr. termin indbetaler et beløb y.

Sætter vi

$$\begin{aligned} A_n &: \text{ saldoen efter sidste indbetaling (fremtidsværdien)} \\ y &: \text{ ydelsen (den faste indbetaling hver termin)} \\ r &: \text{ renten (den faste rentefod pr. termin)} \\ n &: \text{ antal indbetalinger} \end{aligned}$$

og tegner vi en tidslinje, der viser, hvordan de faste indbetalinger y trækker renten r i hver af de $n - 1$ terminer



Figur 4211

så kan vi beregne saldoen A_n efter sidste indbetaling ved hjælp af formlen i nedenstående sætning.

Bemærk, at den første ydelse falder til termin 1.

ISBN 9788761685704

Sætning 4211 (Annuitetsopsparing)

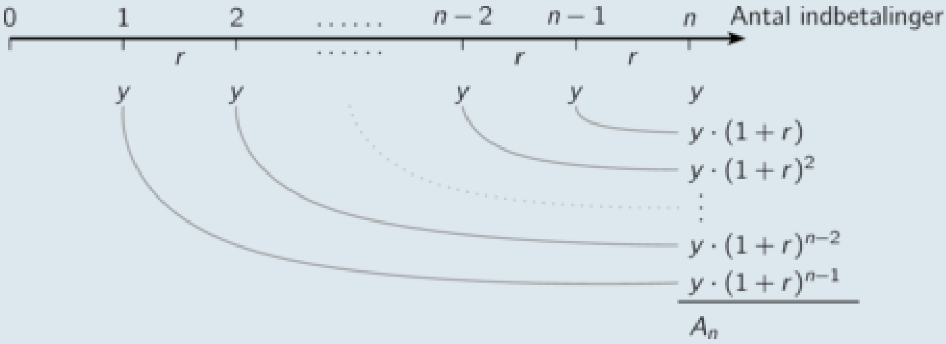
Fremtidsværdien af en opsparingsannuitet af n lige store indbetalinger y med terminsrenten r er

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

ISBN 9788761685704

Bevis (Annuitetsopsparing)

I figuren herunder er værdien af hver ydelse *y* fremskrevet til tidspunktet for den *n*'te indbetaling, hvor saldoen bliver opgjort.



Figur 4212

Lægger vi alle beløbene sammen, får vi opsparingens værdi efter den *n*'te indbetaling

$$A_n = y + y \cdot (1+r) + y \cdot (1+r)^2 + ... + y \cdot (1+r)^{n-2} + y \cdot (1+r)^{n-1}$$

Af bekvemmelighedsgrunde sætter vi

$$a = 1 + r$$

Så er

$$A_n = y + y \cdot a + y \cdot a^2 + ... + y \cdot a^{n-2} + y \cdot a^{n-1}$$

Vi ganger A_n med a

$$A_n \cdot a = y \cdot a + y \cdot a^2 + y \cdot a^3 + ... + y \cdot a^{n-1} + y \cdot a^n$$

og trækker de to udtryk fra hinanden

$$\begin{aligned} & A_n \cdot a - A_n = y \cdot a + y \cdot a^2 + y \cdot a^3 + ... + y \cdot a^{n-1} + y \cdot a^n \\ & \qquad - (y + y \cdot a + y \cdot a^2 + ... + y \cdot a^{n-2} + y \cdot a^{n-1}) \\ \Leftrightarrow \quad & A_n \cdot a - A_n = y \cdot a^n - y \\ \Leftrightarrow \quad & A_n \cdot (a-1) = y \cdot (a^n - 1) \\ \Leftrightarrow \quad & A_n = y \cdot \frac{a^n - 1}{a - 1} \end{aligned}$$

Tilbagesubstituerer vi $r = a - 1$ i det sidste udtryk, får vi

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{1 + r - 1} = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

ISBN 9788761685704

Eksempel 4211

I 6 år indsætter vi hver måned 1 000 kr. på en konto med en månedlig terminsrente på 0,15 %.

Umiddelbart efter den sidste og 72. indbetaling er saldoen

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 1\,000 \cdot \frac{1{,}0015^{72} - 1}{0{,}0015} = 75\,971{,}73$$

Altså er fremtidsværdien 75 971,73 kr.

I opsparingsperioden har vi selv indbetalt 72 000 kr., mens de 3 971,73 kr. er påløbne renter.

Øvelse 4211

I 10 år bliver der hvert år indsat 10 000 kr. til en årlig rente på 4 %.

Bestem saldoen efter den sidste indbetaling.

Øvelse 4212

I 10 år bliver der hvert kvartal indsat 2 500 kr. til en kvartalsvis rente på 1 %.

Bestem saldoen efter den sidste indbetaling.

Øvelse 4213

På en opsparingskonto i banken bliver der hver måned indsat 500 kr.

Hvor meget står der på kontoen efter 2 år (24 indbetalinger), når den månedlige terminsrente er 0,23 %?

Isolerer vi y i annuitetsopsparingsformlen, får vi

ISBN 9788761685704

Sætning 4212 (Ukendt indbetaling)

Hvis fremtidsværdien af en opsparingsannuitet er A_n efter n indbetalinger med terminsrenten r, skal hver indbetaling være af størrelsen

$$y = A_n \cdot \frac{r}{(1+r)^n - 1}$$

Eksempel 4212

Vi ønsker efter 36 månedlige indbetalinger at have 50 000 kr. stående på vor konto. Renten er i hele perioden 0,3 % pr. måned.

Af beregningen

$$y = A_n \cdot \frac{r}{(1+r)^n - 1} = 50\,000 \cdot \frac{0{,}003}{1{,}003^{36} - 1} = 1\,317{,}32$$

får vi, at den faste månedlige indbetaling skal være 1 317,32 kr.

Øvelse 4214

Udbetalingen på en bil er 25 000 kr.

Hvor meget skal vi indbetale 48 måneder i træk for at have nok til udbetalingen, når vi kan få en rente på 0,26 % pr. måned?

Øvelse 4215

En familie ønsker at spare op til udbetalingen på et hus.

Familien ønsker at have 150 000 kr. til rådighed om 5 år.

Hvor meget skal de spare op hver måned, når den månedlige rente er 0,25 %?

Når

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

ISBN 9788761685704

er

$$\frac{A_n \cdot r}{y} = (1+r)^n - 1$$

og så må

$$\frac{A_n \cdot r}{y} + 1 = (1+r)^n$$

Tager vi nu logaritmen på begge sider af lighedstegnet, får vi

$$\log\left(\frac{A_n \cdot r}{y} + 1\right) = n \cdot \log(1+r)$$

og dermed

$$n = \frac{\log\left(\frac{A_n \cdot r}{y} + 1\right)}{\log(1+r)}$$

Vi har således bevist

Sætning 4213 (Ukendt antal indbetalinger)

Når fremtidsværdien af en annuitetsopsparing er A_n med fast terminsindbetaling y og rente r, skal antallet af indbetalinger være

$$n = \frac{\log\left(\frac{A_n \cdot r}{y} + 1\right)}{\log(1+r)}$$

Eksempel 4213

Ønsker vi at opspare 40 000 kr. ved hver måned at indsætte 1 500 kr. på en konto til 0,45 % pr. måned, kan vi beregne, hvor mange indbetalinger vi skal foretage af formlen

$$n = \frac{\log\left(\frac{A_n \cdot r}{y} + 1\right)}{\log(1+r)} = \frac{\log\left(\frac{40\,000 \cdot 0{,}0045}{1\,500} + 1\right)}{\log(1{,}0045)} = 25{,}2$$

I praksis skal vi altså indbetale 26 gange, hvor den sidste indbetaling er mindre end de 25 foregående.

ISBN 9788761685704

Øvelse 4216

I hvor lang tid skal vi indbetale 400 kr. til en månedlig rente på 0,7 % for at have råd til en studietur, der koster 6 000 kr.?

Øvelse 4217

En person indsætter hver måned 1 000 kr. i banken.

Efter hvor mange måneder har personen opsparet 100 000 kr., hvis den månedlige rente igennem hele perioden er 0,4 %?

Vi har herover vist, hvordan vi kan bestemme A_n, y og n ud fra kendskab til de andre og terminsrenten r.

Vi kan dog ikke angive et udtryk for terminsrenten r, men må bestemme denne ved at anvende et CAS-værktøj.

Øvelse 4218

En person indsætter hvert halve år 8 000 kr. på en bankkonto.

a. Hvor meget har personen sparet op på 6 år, hvis den halvårlige rente er 3,0 %?
b. Hvor stor skal den halvårlige rente være, for at personen får opsparet 120 000 kr. i løbet af 6 år?

Øvelse 4219

En person indsætter hvert år 3 450 kr. i banken.

Efter 12 år har han 57 000 kr. stående i banken.

Udregn hvor stor den årlige rente har været, hvis vi antager, at renten har været konstant i hele opsparingsperioden.

ISBN 9788761685704

4.2.2 Nutidsværdi

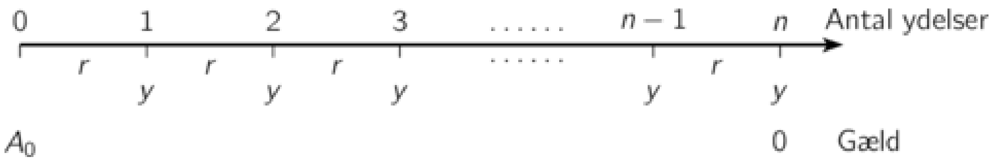
Gældsannuitet

Vi ser på et lån med terminsrente r, som vi afdrager n gange med en fast ydelse y hver termin.

Sætter vi

$$\begin{aligned} A_0 &: \quad \text{hovedstolen (lånebeløbet eller nutidsværdien)} \\ y &: \quad \text{ydelsen (det beløb, der betales hver termin)} \\ r &: \quad \text{renten (den faste rentefod pr. termin)} \\ n &: \quad \text{antal ydelser} \end{aligned}$$

kan vi tegne en tidslinje, der viser, hvordan de faste ydelser y efterhånden afdrager gælden A_0, der trækker renten r i hver af de n terminer.



Figur 4221

Vi beregner hovedstolen A_0 ved hjælp af formlen i nedenstående sætning

Sætning 4221 (Gældsannuitet)

Nutidsværdien af en gældsannuitet, der forrentes med terminsrenten r og afdrages med n lige store ydelser y, er

$$A_0 = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

Bevis (Gældsannuitet)

På lånetidspunktet stifter vi gælden A_0, som vi skal have tilbagebetalt i løbet af n terminer med terminsrenten r.

I stedet for løbende at afdrage på gælden kan vi vælge at betale hele gælden med påløbne renter kontant på forfaldsdagen, se figur 4222 herunder.

Figur 4222

Benytter vi formlen for kapitalfremskrivning, kan vi se, at gælden vil være vokset til

$$A_n = A_0 \cdot (1+r)^n$$

som så er det beløb, vi skal betale kontant på forfaldsdagen.

For at kunne betale dette beløb forestiller vi os, at vi laver en opsparing med samme terminsrente r, og hvor vi n gange laver indbetalingen y, se figur 4223 herunder.

Figur 4223

Benytter vi formlen for opsparingsannuitet, kan vi se, at fremtidsværdien af vor opsparing vil være

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

som så er det beløb, vi skal bruge til at indfri gælden med.

Da den opsparede kapital skal svare til gælden på forfaldsdagen, har vi

$$A_0 \cdot (1+r)^n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Vi isolerer A_0

ISBN 9788761685704

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \frac{y}{r} \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n} \\
&= \frac{y}{r} \cdot \left(\frac{(1+r)^n}{(1+r)^n} - \frac{1}{(1+r)^n} \right) \\
&= \frac{y}{r} \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right) \\
&= \frac{y}{r} \cdot \left(1 - (1+r)^{-n}\right) \\
&= y \cdot \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}
\end{aligned}
$$

som beviser sætningen.

Eksempel 4221

Med en ydelse på 300 kr. i 24 måneder til en månedlig rente på 0,8 % kan vi låne

$$A_0 = y \cdot \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r} = 300 \cdot \frac{1 - 1{,}008^{-24}}{0{,}008} = 6\,527$$

Annuitetens nutidsværdi (hovedstolen) er således 6 527 kr.

Det samlede beløb vi kommer til at tilbagebetale er $24 \cdot 300 \text{ kr.} = 7\,200 \text{ kr.}$.

Øvelse 4221

Hvor meget kan vi låne, når vi kan afse $1\,200$ kr. hver måned i 2 år (24 ydelser), og når renten er $0{,}9\ \%$ pr. måned?

Øvelse 4222

En person har gennem 7 år hvert kvartal betalt 6 666 kr. af på et billån og er nu endelig blevet gældfri.

Renten på billånet har konstant været 2,2 % pr. kvartal.

Hvor meget lånte han for 7 år siden til sin bil?

ISBN 9788761685704

Isolerer vi y i formlen for gældsannuitet, får vi

Sætning 4222 (Ukendt ydelse)

En gældsannuitet med hovedstol A_0 og terminsrenten r skal afdrages n gange med ydelsen

$$y = A_0 \cdot \frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$$

Eksempel 4222

Ønsker vi at låne 30 000 kr. med halvårlig rentetilskrivning, en rente på 5 % og en afdragsperiode på 6 år, skal den halvårlige ydelse være

$$y = A_0 \cdot \frac{r}{1-(1+r)^{-n}} = 30\,000 \cdot \frac{0{,}05}{1-1{,}05^{-12}} = 3\,384{,}76$$

Altså skal ydelsen være 3 384,76 kr.

Eksempel 4223

En butik sælger en smartphone for en kontantpris på 5 995 kr.

De tilbyder også en afdragsordning med en udbetaling på 600 kr. og en løbetid på 2 år med 24 månedlige ydelser. Terminsrenten er 1,25 %.

Gældens størrelse er således 5 995 kr. − 600 kr. = 5 395 kr., og den månedlige ydelse

$$y = A_0 \cdot \frac{r}{1-(1+r)^{-n}} = 5\,395 \cdot \frac{0{,}0125}{1-1{,}0125^{-24}} = 261{,}59$$

Med en ydelse på 261,59 kr. kommer smartphonen alt i alt til at koste
600 kr. + 24 · 261,59 kr. = 6 878,16 kr.

Øvelse 4223

Beregn den månedlige ydelse på et lån på 50 000 kr., når månedsrenten er 0,45 % og tilbagebetalingstiden er 3 år.

ISBN 9788761685704

Øvelse 4224

En person låner 1 000 000 kr. til køb af sit drømmehus. Renten er på 1,5 % pr. kvartal.

a. Beregn den årlige effektive rente.
b. Hvor stor bliver ydelsen pr. kvartal, hvis lånet tilbagebetales over 20 år?
c. Hvor meget kommer personen i alt til at betale for huset?

Idet

$$A_0 = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

er

$$\frac{A_0 \cdot r}{y} = 1-(1+r)^{-n}$$

og så er

$$(1+r)^{-n} = 1 - \frac{A_0 \cdot r}{y}$$

Tager vi nu logaritmen på begge sider af lighedstegnet, får vi

$$-n \cdot \log(1+r) = \log\left(1 - \frac{A_0 \cdot r}{y}\right)$$

og dermed

$$n = -\frac{\log\left(1-\frac{A_0 \cdot r}{y}\right)}{\log(1+r)}$$

Vi har således bevist

Sætning 4223 (Ukendt antal ydelser)

Når nutidsværdien af en gældsannuitet er A_0 med fast terminsindbetaling y og rente r, skal antallet af ydelser være

$$n = -\frac{\log\left(1-\frac{A_0 \cdot r}{y}\right)}{\log(1+r)}$$

ISBN 9788761685704

Eksempel 4224

Et lån med en hovedstol på 200 000 kr. og en rente på 0,65 % pr. måned skal betales tilbage med et månedlig ydelse på 3 400 kr.

Antallet af ydelser beregner vi først af

$$n = -\frac{\log\left(1 - \frac{A_0 \cdot r}{y}\right)}{\log(1+r)} = -\frac{\log\left(1 - \frac{200\,000 \cdot 0{,}0065}{3\,400}\right)}{\log(1{,}0065)} = 74{,}4$$

Altså vil der være 75 ydelser, hvoraf den sidste er mindre end de 74 foregående.

Øvelse 4225

Over hvor mange terminer skal vi betale en månedlig ydelse på 400 kr. til en månedlig rente på 1,5 % for at afvikle en gæld på 6 000 kr.?

Øvelse 4226

En person køber en computer på afbetaling.

Computeren koster 12 995 kr., og den månedlige rente er 1,25 %.

a. I hvor mange måneder skal personen betale af på computeren, hvis vedkommende gennem hele låneperioden har råd til at betale 250 kr. pr. måned?
b. I hvor mange måneder skal personen betale af på computeren, hvis vedkommende gennem hele låneperioden har råd til at betale 500 kr. pr. måned?

Øvelse 4227

Et annuitetslån med en hovedstol på 100 000 kr. forrentes og afdrages med 10 000 kr. pr. år.

Er lånet tilbagebetalt efter 20 år, når renten er 8 % p.a.?

ISBN 9788761685704

Vi har herover vist, hvordan vi kan bestemme A_0, y og n ud fra kendskab til de andre og terminsrenten r.

Vi kan dog ikke angive et udtryk for terminsrenten r, men må bestemme denne ved at anvende et CAS-værktøj.

Øvelse 4228

En person optager et lån på 50 000 kr., der tilbagebetales over 60 terminer. Terminsydelsen er på 1 250 kr.

Bestem terminsrenten.

Øvelse 4229

En person har optaget et billån på 87 000 kr., der afvikles over 48 måneder med en månedlig ydelse på 1 999 kr.

a. Bestem terminsrenten.
b. Beregn den årlige effektive rente.

Øvelse 42210

En studerende har optaget et kviklån på nettet.

Lånets hovedstol er på 15 000 kr. Lånet afvikles over 36 måneder med en månedlig ydelse på 499 kr. Der er til lånet tilknyttet stiftelsesomkostninger på 800 kr., og de administrative omkostninger er på 30 kr. hver termin.

Beregn de årlige omkostninger i procent (ÅOP).

ISBN 9788761685704

Øvelse 42211

Du har lånt nogle penge og får tilbudt at vælge mellem følgende 3 tilbagebetalingsformer af lånet:

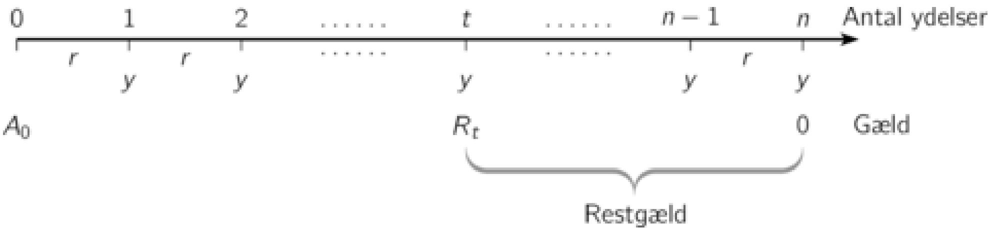
1. 24 månedlige rater á 200 kr. pr. måned startende fra næste måned.
2. 6 000 kr. betales ad én gang om præcis 2 år.
3. 5 rater, hvor:
    - 750,- kr. betales tilbage om 3 måneder
    - 750,- kr. betales tilbage om 6 måneder
    - 1000,- kr. betales tilbage om 12 måneder
    - 1000,- kr. betales tilbage om 18 måneder
    - 1500,- kr. betales tilbage om 24 måneder

Renten antages at være 2,0 % pr. måned.

a. Beregn nutidsværdien for hver af de 3 tilbagebetalingsformer.
b. Hvilken af de 3 tilbagebetalingsformer vil du vælge? (Begrund svaret).

4.2.3 Restgæld

Restgælden til et bestemt tidspunkt er det skyldige beløb umiddelbart efter, at ydelsen er betalt.



Figur 4231

Sætning 4231 (Restgæld)

I et annuitetslån med hovedstol A_0, terminsrente r og ydelse y er restgælden efter t terminer

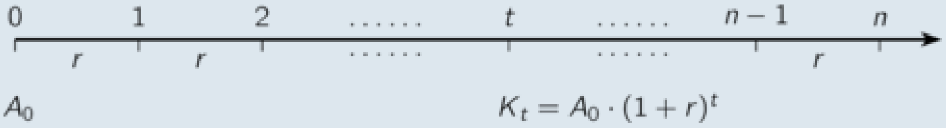
$$R_t = A_0 \cdot (1+r)^t - y \cdot \frac{(1+r)^t - 1}{r}$$

ISBN 9788761685704

Bevis (Restgæld)

På lånetidspunktet stifter vi gælden A_0.

Undlader vi at afdrage på gælden i en periode frem til den t. termin, er gælden med påløbne renter vokset til K_t.

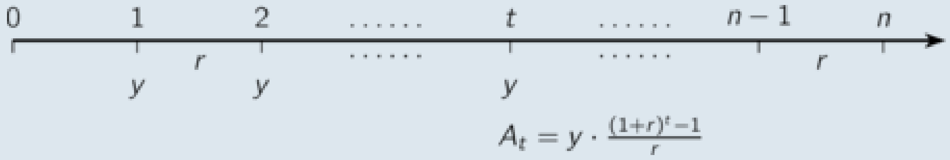


Figur 4232

Efter t terminer uden afdrag skylder vi altså nu

$$K_t = A_0 \cdot (1+r)^t$$

For at kunne udligne de manglende ydelser med renter forestiller vi os, at vi laver en opsparing med samme terminsrente r, og hvor vi t gange laver indbetalingen y.



Figur 4233

Værdien af denne opsparing er så

$$A_t = y \cdot \frac{(1+r)^t - 1}{r}$$

hvilket er det beløb, vi skulle have nedbragt gælden med.

Restgælden er da netop forskellen på de to beløb

$$R_t = K_t - A_t$$

eller

$$R_t = A_0 \cdot (1+r)^t - y \cdot \frac{(1+r)^t - 1}{r}$$

ISBN 9788761685704

Eksempel 4231

Vi afvikler en gæld på 10 000 kr. med en terminsydelse på 400 kr. Renten er 1,2 % pr. termin.

Efter 20 terminer skylder vi stadig

$$\begin{aligned} R_t &= A_0 \cdot (1+r)^t - y \cdot \frac{(1+r)^t - 1}{r} \\ &= 10\,000 \cdot 1{,}012^{20} - 400 \cdot \frac{1{,}012^{20} - 1}{0{,}012} \\ &= 12\,694{,}34 - 8\,981{,}15 \\ &= 3\,713{,}19 \end{aligned}$$

så restgælden vil være 3 713,19 kr.

Øvelse 4231

Beregn restgælden efter 12 måneder på et lån på 6 000, der afvikles med en månedlig ydelse på 300 kr. Renten er 0,95 % pr. måned.

Øvelse 4232

Et billån på 250 000 kr. tilbagebetales over 5 år ved hjælp af 60 lige store månedlige ydelser.

a. Beregn den månedlige ydelse, når renten er 0,4 % pr. måned.
b. Beregn restgælden umiddelbart efter betalingen af den 30. ydelse.

4.2.4 Amortiseringsplan

En *amortiseringsplan* er en tabel, der viser, hvordan gælden i et annuitetslån bliver afviklet termin for termin.

Denne tabel kan altså anvendes som alternativ til at bestemme restgælden ved hjælp af restgældsformlen (sætning 4231 (se side 326)).

Ordet amortisering kommer af latin og betyder 'til døden'. Her er der tale om gældens tilintetgørelse.

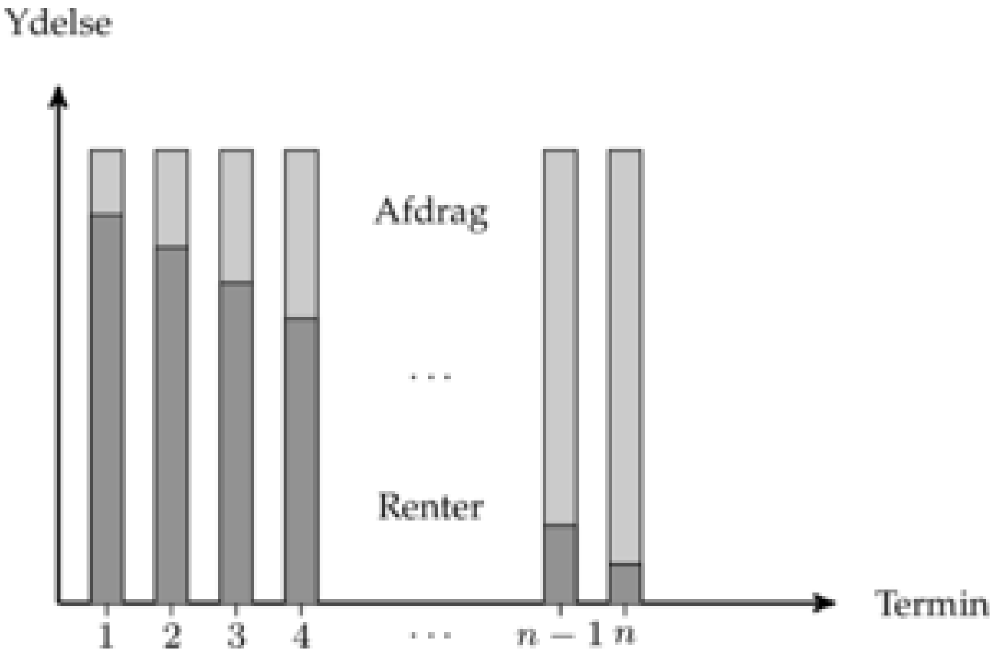
ISBN 9788761685704

En ydelse i et annuitetslån består af renter og afdrag

$$\text{Ydelse} = \text{Renter} + \text{Afdrag}$$

Ydelsen er konstant og renten betales af restgælden. Da restgælden falder over tid, bliver rentedelen derfor løbende mindre. Det betyder, at afdraget på lånet bliver større og større, efterhånden som lånet afvikles.

Vi kan illustrere det på følgende vis



Figur 4241

ISBN 9788761685704

Eksempel 4241

Vi optager et lån på 1 000 kr., som vi afvikler over 5 terminer til en rente på 10 % pr. termin.

Terminsydelsen bliver så

$$y = A_0 \cdot \frac{r}{1-(1+r)^{-n}} = 1\,000 \cdot \frac{0{,}1}{1-1{,}1^{-5}} = 263{,}80$$

Med en ydelse på 263,80 kr. viser nedenstående amortiseringsplan, hvordan gælden bliver afviklet.

Termin	Gæld	Ydelse	Renter	Afdrag	Restgæld
1	1 000,00	263,80	100,00	163,80	836,20
2	836,20	263,80	83,62	180,18	656,02
3	656,02	263,80	65,60	198,20	457,82
4	457,82	263,80	45,78	218,02	239,80
5	239,80	263,80	23,98	239,82	-0,02

ISBN 9788761685704

Eksempel 4242

For nogle annuitetslån gælder, at ydelsen ikke beregnes så den præcist kommer til at passe med et helt antal terminer.

I sådanne tilfælde vil den sidste ydelse blive mindre end de øvrige ydelser.

Optager vi et lån på 5 000 kr. med en terminsrente på 3 % og en terminsydelse på 750 kr., kan vi beregne antallet af terminer til

$$n = -\frac{\log\left(1-\frac{A_0 \cdot r}{y}\right)}{\log(1+r)} = -\frac{\log\left(1-\frac{5\,000 \cdot 0{,}03}{750}\right)}{\log(1{,}03)} = 7{,}55$$

Herudfra ser vi, at lånet bliver afviklet over 8 terminer, hvor ydelsen i den sidste termin bliver mindre end de øvrige ydelser.

Gælden bliver afviklet efter følgende amortiseringsplan .

Termin	Gæld	Ydelse	Renter	Afdrag	Restgæld
1	5 000,00	750,00	150,00	600,00	4 400,00
2	4 400,00	750,00	132,62	618,00	3 782,00
3	3 782,00	750,00	113,46	636,54	3 145,46
4	3 145,46	750,00	94,36	655,64	2 489,82
5	2 489,82	750,00	74,69	675,31	1 814,52
6	1 814,52	750,00	54,44	695,56	1 118,95
7	1 118,95	750,00	33,57	716,43	402,52
8	402,52	414,60	12,08	402,52	0,00

Øvelse 4241

En gæld på $4\,500$ kr. afvikles over 6 år med en helårlige rentetilskrivning på 5 %.

Beregn den årlige ydelse og opstil en amortisationsplan.

ISBN 9788761685704

Øvelse 4242

Et boliglån på 2 500 000 kr. afvikles over 20 år med månedlige terminer og en terminsrente på 0,25 %.

a. Beregn den månedlige ydelse.
b. Opstil en amortiseringsplan over lånet.
c. Bestem restgælden på lånet efter 10 år.
d. Hvor meget bliver der i alt betalt for huset?

Øvelse 4243

Et lån på 10 000 kr. afvikles med en terminsydelse på 1 800 kr. Lånet forrentes med en terminsrente på 5 %.

a. Opstil en amortiseringsplan for lånet.
b. Bestem størrelsen af afdraget for den 5. ydelse.

ISBN 9788761685704

Kapitel 5. Andengradspolynomier

5.1 Grundbegreber

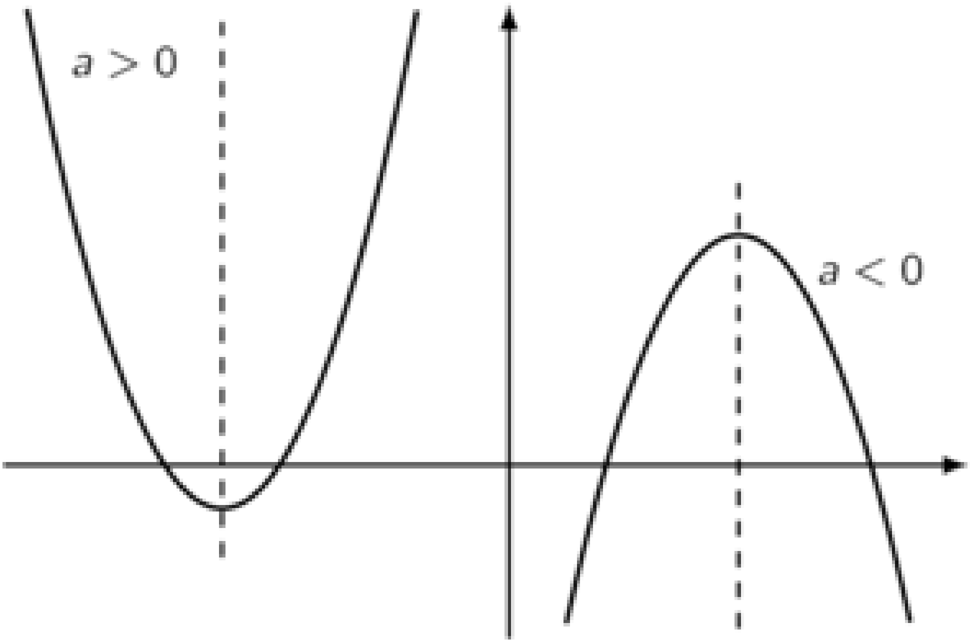
Et andengradspolynomium kan vi skrive på formen

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{hvor} \;\; a \neq 0$$

Leddet ax^2 kalder vi *andengradsleddet*, og tallet a kalder vi *koefficienten i andengradsleddet* eller koefficienten til x^2. Leddet bx kalder vi *førstegradsleddet*, og tallet b kalder vi *koefficienten i førstegradsleddet* eller koefficienten til x. Endelig kalder vi c for *konstantleddet*.

Grafen for andengradspolynomiet er en *parabel*, og den er symmetrisk omkring en lodret akse, hvilket vi beviser senere. Symmetriaksen deler parablen i to dele, der er spejlbilleder af hinanden, og som vi kalder *parablens grene* eller *ben*.

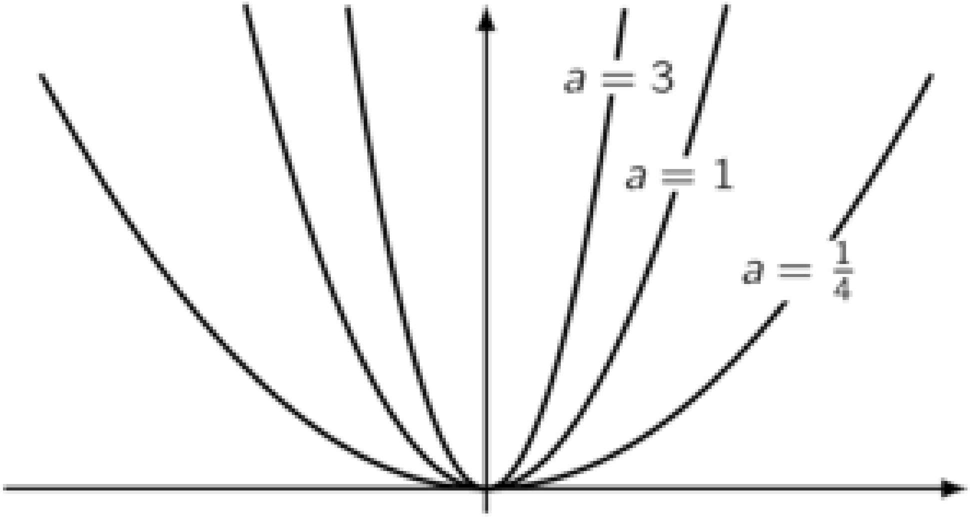
Grenenes retning er bestemt af fortegnet for a. Hvis a er *positiv*, vender *grenene opad*, og hvis a er *negativ*, vender grenene *nedad*, se figur 511.



Figur 511

Størrelsen på a bestemmer parablens "bredde". Jo tættere a er på 0, jo bredere er parablen, som illustreret i figur 512.

ISBN 9788761685704



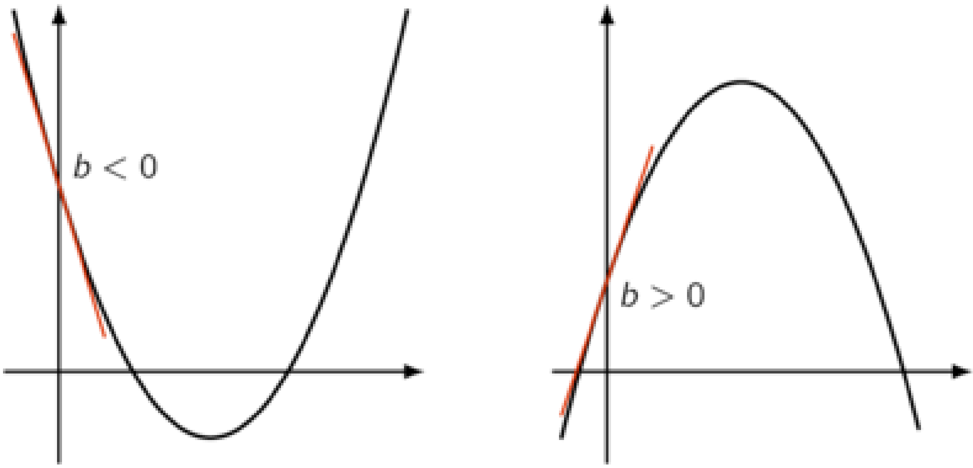
Figur 512

Idet

$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$$

vil parablen skære *y*-aksen i punktet (0, *c*).

Fortegnet på *b* finder vi ved at tegne en linje, der tangerer parablen i dens skæringspunkt med *y*-aksen. Hvis linjens hældning er negativ, er *b* negativ, og hvis linjens hældning er positiv, er *b* positiv, se figur 513.



Figur 513

Hvis den tangerende linje er vandret, dvs. dens hældning er 0, er *b* også 0, og parablen har *y*-aksen som symmetriakse.

Et andengradspolynomium kan have to, ét eller ingen nulpunkter, som svarer til, at parablen skærer *x*-aksen to gange, en gang eller slet ikke.

Antallet af nulpunkter er bestemt ved *diskriminanten d*. Diskriminanten *d* for andengradspolynomiet $f(x) = ax^2 + bx + c$ er

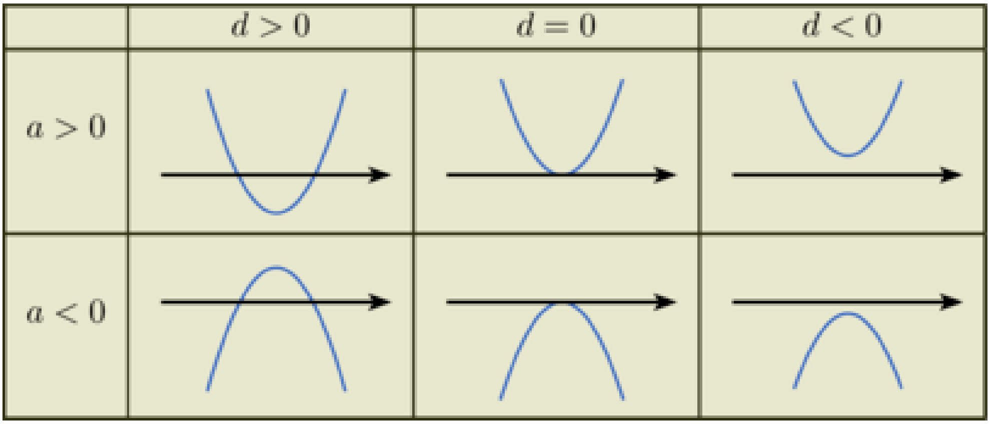
$$d = b^2 - 4ac$$

Når $d > 0$, har funktionen *f* to nulpunkter, så parablen har to skæringspunkter med *x*-aksen.

Hvis $d = 0$, har funktionen netop ét nulpunkt, og parablen rører *x*-aksen.

Endelig kan $d < 0$. Så ligger parablen hele tiden over eller hele tiden under *x*-aksen.

Fortegnet for *a* og *d* bestemmer parablens beliggenhed i koordinatsystemet, som vist på figur 514.



Figur 514

Øvelse 511

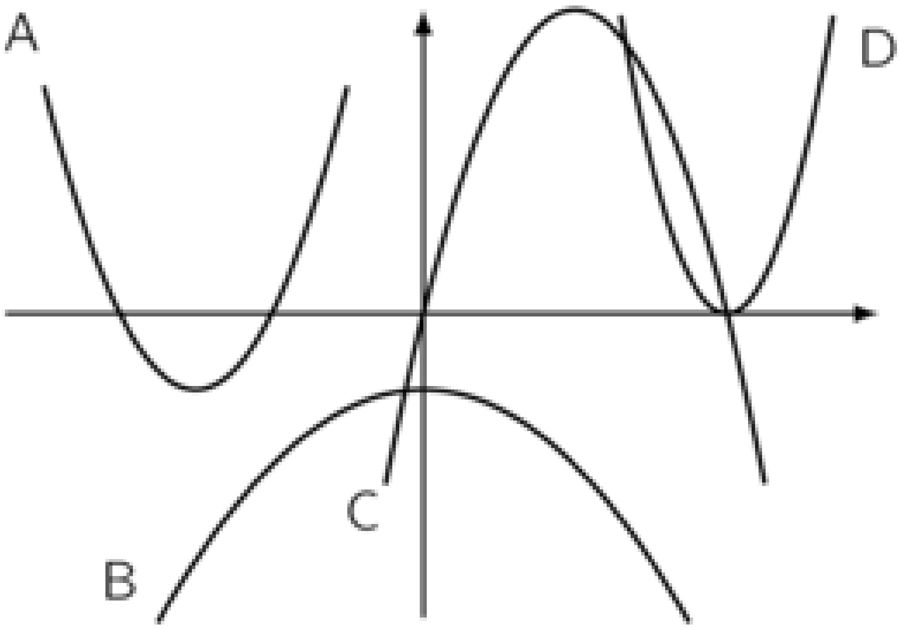
Bestem konstanterne *a*, *b* og *c* i de følgende andengradspolynomier

a. $f(x) = x^2 + 6x + 9$
b. $f(x) = 2x^2 + 4x$
c. $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$
d. $f(x) = -6x^2 - 12x - 1$
e. $f(x) = -x^2 + x - 1$
f. $f(x) = -4x^2 + 3$

ISBN 9788761685704

Øvelse 512

Figuren viser fire parabler A, B, C og D. Angiv fortegnet på a, b, c og d for de tilhørende andengradspolynomier.



Øvelse 513

Beregn diskriminanten for hvert af de følgende andengradspolynomier

a. $f(x) = x^2 + 6x - 3$
b. $f(x) = 2x^2 + 5x$
c. $f(x) = 4x^2 - 10x + 5$
d. $f(x) = -6x^2 - 2x - 1$
e. $f(x) = 4x^2 + 3$
f. $f(x) = -4x^2 + 3$

ISBN 9788761685704

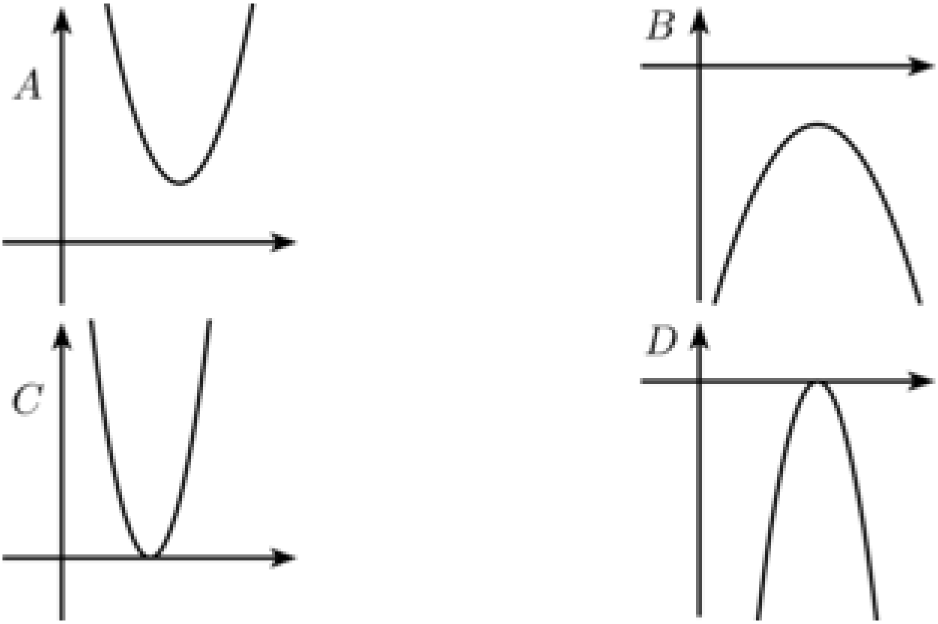
Øvelse 514

Vi betragter de seks polynomier

$$f_1(x) = 2x^2 - 8x + 9 \qquad f_2(x) = 6x^2 - 18x + 13$$
$$f_3(x) = -x^2 + 4x - 2 \qquad f_4(x) = -4x^2 + 16x - 16$$
$$f_5(x) = 4x^2 - 12x + 9 \qquad f_6(x) = -x^2 + 4x - 5$$

I figuren nedenfor er vist grafen for fire af polynomierne.

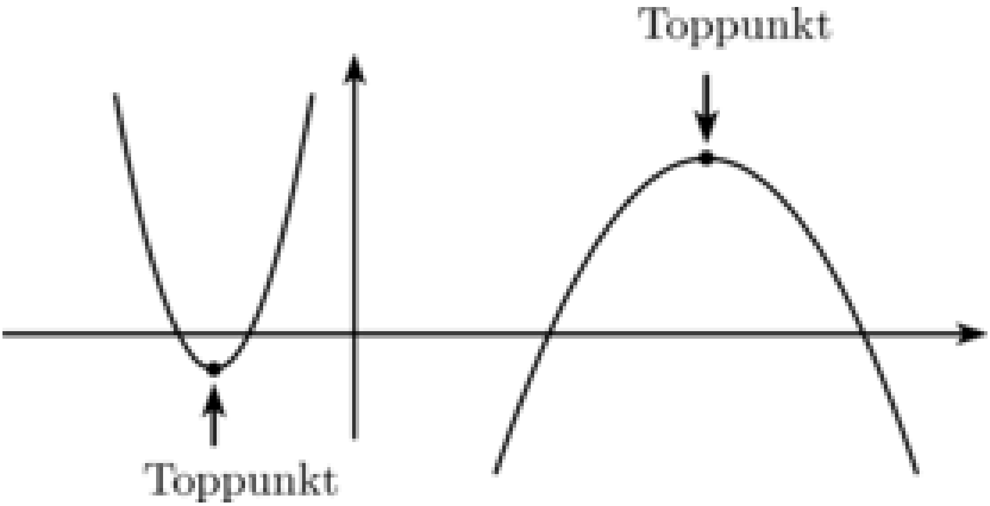
Hvilke?



5.2 Toppunkt og symmetriakse

Det punkt på parablen, som ligger på symmetriaksen, kalder vi parablens *toppunkt*.

ISBN 9788761685704



Figur 521

Vi starter med at bevise, at parablen givet ved andengradspolynomiet har en lodret symmetriakse.

Sætning 521 (Parablens symmetriakse)

Parablen, som er graf for

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

er symmetrisk omkring den lodrette linje med ligningen

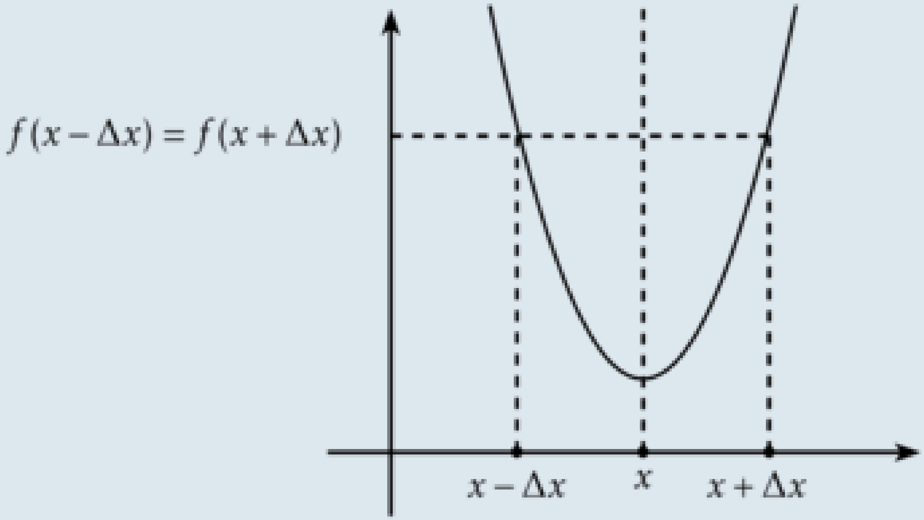
$$x = -\frac{b}{2a}$$

Bevis (Parablens symmetriakse)

For at bevise at grafen er symmetrisk omkring en lodret linje gennem et tal *x* på *x*-aksen, skal vi kunne bestemme *x*, så

$$f(x - \Delta x) = f(x + \Delta x) \tag{521}$$

for alle $\Delta x > 0$, som illustreret på figur 522.



Figur 522

Idet $f(x) = ax^2 + bx + c$, svarer (521) til ligningen

$$a(x - \Delta x)^2 + b(x - \Delta x) + c = a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c$$

som vi nu løser med hensyn til *x*.

ISBN 9788761685704

$$
\begin{aligned}
& a(x-\Delta x)^2+b(x-\Delta x)+c=a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c \\
\Leftrightarrow \quad & a(x-\Delta x)^2+b(x-\Delta x)=a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x) \\
\Leftrightarrow \quad & a(x^2+(\Delta x)^2-2x\Delta x)+bx-b\Delta x=a(x^2+(\Delta x)^2+2x\Delta x)+bx+b\Delta x \\
\Leftrightarrow \quad & ax^2+a(\Delta x)^2-2ax\Delta x-b\Delta x=ax^2+a(\Delta x)^2+2ax\Delta x+b\Delta x \\
\Leftrightarrow \quad & -2ax\Delta x-b\Delta x=2ax\Delta x+b\Delta x \\
\Leftrightarrow \quad & -4ax\Delta x=2b\Delta x \\
\Leftrightarrow \quad & x=\frac{2b\Delta x}{-4a\Delta x} \qquad (\Delta x \neq 0) \\
\Leftrightarrow \quad & x=-\frac{b}{2a}
\end{aligned}
$$

Hermed har vi, at

$$f\left(\left(-\frac{b}{2a}\right)-\Delta x\right)=f\left(\left(-\frac{b}{2a}\right)+\Delta x\right)$$

så grafen er symmetrisk omkring den lodrette linje med ligningen $x=-\frac{b}{2a}$.

Diskriminanten $d = b^2 - 4ac$ indgår i toppunktets koordinater, som vi nu vil udlede.

Sætning 522 (Toppunktsformlen)

Toppunktet T for parablen givet ved andengradspolynomiet

$$f(x)=ax^2+bx+c \quad \text{med diskriminant} \quad d=b^2-4ac$$

har koordinaterne

$$T=\left(-\frac{b}{2a},-\frac{d}{4a}\right)$$

Bevis (Toppunktsformlen)

Toppunktet ligger på symmetriaksen, så dets førstekoordinat er $-\frac{b}{2a}$.

Andenkoordinaten finder vi ved indsættelse i f

$$
\begin{aligned}
f\left(-\frac{b}{2a}\right) &= a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c \\
&= \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-d}{4a}
\end{aligned}
$$

Dermed har vi har fundet toppunktets koordinater til

$$T = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}\right)$$

Eksempel 521

Andengradspolynomiet

$$f(x) = 2x^2 + 6x + 5$$

har diskriminanten

$$d = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 36 - 40 = -4$$

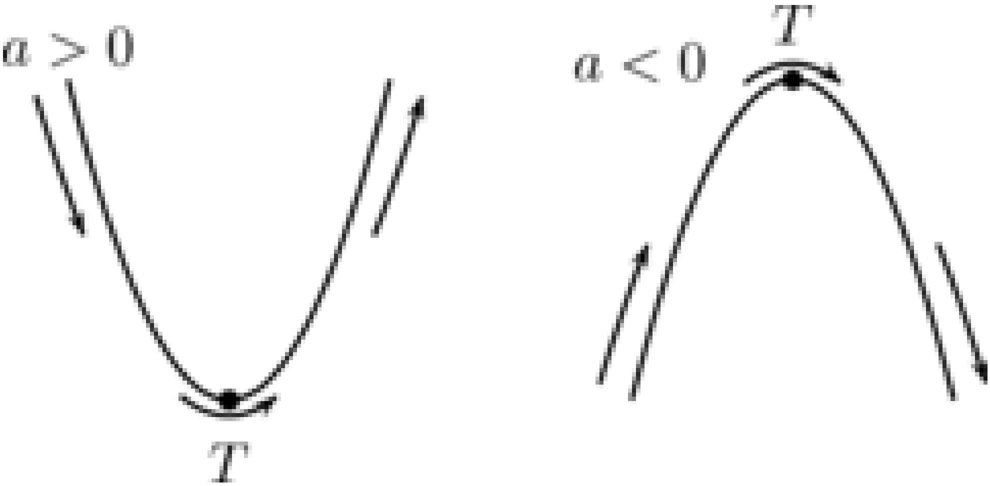
Toppunktets koordinater er så

$$T = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}\right) = \left(-\frac{6}{2 \cdot 2}, -\frac{-4}{4 \cdot 2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Hvis $a > 0$, har andengradspolynomiet *minimum* i toppunktets x-koordinat, og den mindste funktionsværdi er så toppunktets y-koordinat.

Hvis $a < 0$, har andengradspolynomiet *maksimum* i toppunktets x-koordinat, og den største funktionsværdi er så toppunktets y-koordinat.

Dette er illustreret på figur 523.



Figur 523

Eksempel 522

Parablen svarende til polynomiet

$$f(x) = x^2 - 6x + 7$$

har toppunkt i $T = (3, -2)$. Funktionen f har dermed minimum, når $x = 3$, og minimum er -2.

Toppunktet for parablen bestemt ved

$$g(x) = -2x^2 + 16x - 30$$

er $T = (4,2)$. Maksimum for funktionen g er således 2.

Øvelse 521

Bestem toppunktet og ligningen for symmetriaksen for parablen givet ved

$$f(x) = -x^2 - 4x + 10$$

ISBN 9788761685704

Øvelse 522

Bestem maksimum for funktionen

$$f(x) = -x^2 + 2x + 8$$

Øvelse 523

Bestem minimum for funktionen

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x - 10$$

Øvelse 524

Bestem tallet c, så toppunktet for

$$f(x) = x^2 + 8x + c$$

ligger på x-aksen.

Øvelse 525

Toppunktet for

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

har koordinaterne (2,4).

Bestem b og c.

ISBN 9788761685704

Øvelse 526

Bestem b, når toppunktet for

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

ligger på y-aksen.

Øvelse 527 (Træning)

Bestem toppunktet hørende til hver af nedenstående funktioner

a. $f(x) = 2x^2 - 4x - 2$
b. $f(x) = x^2 + 4x + 7$
c. $f(x) = -2x^2 + 16x - 12$
d. $f(x) = 3x^2 - 24x + 45$
e. $f(x) = -4x^2 + 16x + 3$
f. $f(x) = 0{,}5x^2 - 4x + 12$
g. $f(x) = -2x^2 + 8x + 7$
h. $f(x) = x^2 + 4x - 2$
i. $f(x) = 4x^2 - 6x + 5$
j. $f(x) = 20x^2 + 60x + 80$

5.3 Andengradsligninger

5.3.1 Den simple ligning

Den simple ligning $x^2 = k$

Vi ser på ligningen

$$x^2 = 49 \qquad (*)$$

Denne ligning har to løsninger, da både $x = 7$ og $x = -7$ ved indsættelse gør $(*)$ sand

$$\boxed{7}^2 = 49 \quad (S) \qquad \boxed{-7}^2 = 49 \quad (S)$$

Har ligningen i stedet formen

ISBN 9788761685704

$$x^2 = -49 \qquad\qquad (**)$$

kan vi ikke finde nogen løsninger, da venstresiden i $(**)$ aldrig kan være negativ.

Derimod kan vi godt finde en løsning til ligningen

$$x^2 = 0$$

da $x = 0$ passer ind i ligningen.

Vi kan formulere disse overvejelser i en sætning.

Sætning 5311 (Ligningen $x^2 = k$)

Lad k være et ikke-negativt tal.

Så gælder

$$x^2 = k \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{k} \quad \text{eller} \quad x = -\sqrt{k}$$

Hvis k er et negativt tal, har ligningen ingen løsning.

Bemærk, at sætningen viser, at ligningen kun har én løsning $x = 0$, når $k = 0$, da $\sqrt{0} = 0$, og $-\sqrt{0} = 0$.

Bevis (Ligningen $x^2 = k$)

Hvis k er negativ, har ligningen $x^2 = k$ ingen løsninger, da x^2 altid er positiv eller 0.

For $k \geq 0$ er $k = \sqrt{k} \cdot \sqrt{k}$, og så får vi

$$\begin{aligned}
& x^2 = k \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 - k = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 - (\sqrt{k})^2 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (x + \sqrt{k})(x - \sqrt{k}) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x + \sqrt{k} = 0 \quad \text{eller} \quad x - \sqrt{k} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x = -\sqrt{k} \quad \text{eller} \quad x = \sqrt{k}
\end{aligned}$$

ISBN 9788761685704

Eksempel 5311

$$x^2 = 64 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{64} \Leftrightarrow x = \pm 8$$

Eksempel 5312

$$x^2 = -4 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Eksempel 5313

$$\begin{aligned} x(x+1) &= x \\ \Leftrightarrow \quad x^2 + x &= x \\ \Leftrightarrow \quad x^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad x &= 0 \end{aligned}$$

Øvelse 5311

Løs ligningerne

a. $2x^2 - 61 = 101$
b. $2y^2 - 10 = 0$
c. $x^2 - 4 = 10$
d. $2y^2 - 8 = 28$
e. $7t^2 + 40 = 28$
f. $z^2 + 28 = 100$

Øvelse 5312

Løs ligningerne

a. $x(2x+1) = 2x^2$
b. $x(1-2x) = x-8$
c. $x^4 = 9x^2$
d. $(x+5)^2 = 4$
e. $(2x+3)^2 = 9$

5.3.2 Kvadratkomplettering

En ligning på formen

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad , \quad a \neq 0$$

kalder vi en *andengradsligning*. Vi kræver, at a ikke er nul, da ligningen ellers bliver til en 1. gradsligning $bx + c = 0$.

Inden vi udleder den generelle formel for andengradsligningens løsninger (diskriminantformlen), vil vi se på, hvordan vi kan løse andengradsligningen uden en formel.

Den metode, vi benytter, er baseret på *kvadratkomplettering*.

ISBN 9788761685704

Eksempel 5321

Ser vi på andengradsligningen

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

kan vi omskrive venstresiden ved hjælp af en kvadratsætning

$$(x + 2)^2 = 0$$

Benytter vi nulreglen, får vi

$$(x + 2)^2 = 0 \iff x + 2 = 0 \iff x = -2$$

som er den eneste løsning til andengradsligningen.

På samme måde kan vi løse ligningen

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

Vi omskriver først venstresiden til kvadratet $(x - 3)^2$ og finder så

$$(x - 3)^2 = 0 \iff x - 3 = 0 \iff x = 3$$

Øvelse 5321

Løs nedenstående andengradsligninger ved at omskrive til et kvadrat

a. $x^2 - 8x + 16 = 0$
b. $x^2 + 2x + 1 = 0$
c. $x^2 + 10x + 25 = 0$
d. $4x^2 + 20x + 25 = 0$

I de ovenstående eksempler var det muligt at omskrive andengradsudtrykket til kvadratet på en toleddet størrelse. Så simpelt er det ikke altid.

ISBN 9788761685704

Eksempel 5322

Ser vi på andengradsligningen

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

kan vi ikke umiddelbart omskrive venstresiden til et kvadrat. Vi omformer derfor ligningen.

Først flytter vi det konstante led over på højre side

$$x^2 + 4x = 5$$

Vi *kvadratkompletterer* nu venstre side, dvs. vi lægger et tal til på begge sider, så udtrykket på venstre side bliver et kvadrat på formen

$$(x + \alpha)^2$$

Når vi udregner dette kvadrat, får vi et udtryk med tre led

$$x^2 + 2\alpha x + \alpha^2$$

Det første led har vi allerede på venstre side. Det andet led, $2\alpha x$, skal svare til leddet $4x$, så $2\alpha = 4$, dvs. $\alpha = 2$. Det manglende led er så $\alpha^2 = 2^2 = 4$, som vi lægger til på begge sider og får

$$x^2 + 4x + 4 = 5 + 4$$

Dermed har vi, at

$$(x + 2)^2 = 9$$

Benytter vi nu sætning 5311, finder vi

$$\begin{aligned} & (x+2)^2 = 9 \\ \Leftrightarrow\quad & x + 2 = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \\ \Leftrightarrow\quad & x = -2 \pm 3 = \begin{cases} 1 \\ -5 \end{cases} \end{aligned}$$

Vi har altså de to løsninger $x = 1$ og $x = -5$ til andengradsligningen.

ISBN 9788761685704

Eksempel 5323

Vi vil løse ligningen

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

ved kvadratkomplettering.

Først flytter vi konstanten over på højre side

$$x^2 - 2x = 3$$

Dernæst beregner vi α som halvdelen af tallet foran x, hvilket giver $\alpha = -1$. Endelig lægger vi $(-1)^2 = 1$ til på begge sider for at kvadratkomplettere.

Vi får så

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x + 1 = 3 + 1 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)^2 = 4 \\ \Leftrightarrow\ & x - 1 = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \\ \Leftrightarrow\ & x = 1 \pm 2 = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases} \end{aligned}$$

altså løsningerne $x = 3$ og $x = -1$.

Eksempel 5324

På samme måde løser vi ligningen

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

Vi flytter 5 over

$$x^2 - 4x = -5$$

Halvdelen af -4 er -2, så vi lægger $(-2)^2 = 4$ til på begge sider

$$x^2 - 4x + 4 = -5 + 4$$

Dermed får vi

$$(x-2)^2 = -1$$

og så har ligningen ingen løsning, da udtrykket på venstre side er nul eller positivt og aldrig kan blive -1.

ISBN 9788761685704

Øvelse 5322

Løs følgende andengradsligninger ved kvadratkomplettering af venstresiden

a. $x^2 + 4x + 3 = 0$
b. $x^2 + 2x - 3 = 0$
c. $x^2 + 6x + 8 = 0$
d. $x^2 - 6x - 3 = 0$
e. $x^2 - 5x + 4 = 0$
f. $x^2 - 4x + 5 = 0$

Indtil videre har vi kun anvendt kvadratkomplettering på andengradsligninger, hvor koefficienten til x^2 var 1, altså $a = 1$.

Hvis $a \neq 1$, kan vi dividere ligningen igennem med a, f.eks.

$$3x^2 + 5x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = 0$$

og herfra kræver omformningerne en del regninger med brøker.

Det viser sig, at vi i mange tilfælde kan begrænse antallet af regninger med brøker, hvis vi i stedet ganger ligningen igennem med $4a$.

ISBN 9788761685704

Eksempel 5325

Vi vil løse ligningen

$$3x^2 + 5x - 2 = 0$$

Vi ganger ligningen igennem med 4 · 3 og kvadratkompletterer

$$\begin{aligned}
& 4 \cdot 3 \cdot 3x^2 + 4 \cdot 3 \cdot 5x = 4 \cdot 3 \cdot 2 \\
\Leftrightarrow\quad & 36x^2 + 60x = 24 \\
\Leftrightarrow\quad & (6x)^2 + 2 \cdot 5 \cdot 6x = 24 \\
\Leftrightarrow\quad & (6x+5)^2 = 24 + 5^2 \\
\Leftrightarrow\quad & (6x+5)^2 = 49 \\
\Leftrightarrow\quad & 6x + 5 = \pm 7 \\
\Leftrightarrow\quad & 6x = \begin{cases} 2 \\ -12 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = \begin{cases} \frac{1}{3} \\ -2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ligningen har altså de to løsninger $x = \frac{1}{3}$ og $x = -2$.

Øvelse 5323

Løs følgende andengradsligninger ved først at gange igennem med 4a og herefter lave kvadratkomplettering, når

a. $3x^2 - 12x + 9 = 0$
b. $2x^2 + 2x - 4 = 0$
c. $5x^2 - 25x + 20 = 0$
d. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 2 = 0$

ISBN 9788761685704

5.3.3 Diskriminantmetoden

Sætning 5331 (Diskriminantmetoden)

Givet andengradsligningen

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (a \neq 0)$$

med diskriminant $d = b^2 - 4ac$.

i. Hvis $d > 0$, har ligningen to løsninger

$$x = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} \quad \text{eller} \quad x = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}$$

ii. Hvis $d = 0$, har ligningen én løsning

$$x = \frac{-b}{2a}$$

iii. Hvis $d < 0$, har ligningen ingen løsninger

ISBN 9788761685704

Bevis (Diskriminantmetoden)

Først ganger vi ligningen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

igennem med $4a$ og får

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Vi flytter konstantleddet over og kvadratkompletterer ved at lægge b^2 til på begge sider

$$\begin{aligned} & 4a^2x^2 + 4abx = -4ac \\ \Leftrightarrow\quad & (2ax)^2 + 2 \cdot b \cdot 2ax = -4ac \\ \Leftrightarrow\quad & (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \qquad (*) \end{aligned}$$

Højresiden $b^2 - 4ac$ i $(*)$ kalder vi diskriminanten og betegner den med d, dvs. vi sætter

$$d = b^2 - 4ac$$

For $d > 0$ finder vi to løsninger til andengradsligningen, idet

$$\begin{aligned} & (2ax + b)^2 = d \\ \Leftrightarrow\quad & 2ax + b = \pm\sqrt{d} \\ \Leftrightarrow\quad & x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} \end{aligned}$$

For $d = 0$ finder vi én løsning til andengradsligningen, da

$$\begin{aligned} & (2ax + b)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 2ax + b = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x = \frac{-b}{2a} \end{aligned}$$

For $d < 0$ har ligningen

$$(2ax + b)^2 = d$$

ingen løsning.

ISBN 9788761685704

Eksempel 5331

Andengradsligningen

$$4x^2 - 12x - 16 = 0$$

har diskriminanten

$$d = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-16) = 144 + 256 = 400 = 20^2$$

Da $d > 0$, har ligningen to løsninger, som vi finder ved at indsætte i løsningsformlen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-12) \pm 20}{2 \cdot 4} = \frac{12 \pm 20}{8} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

som er de to løsninger.

Eksempel 5332

Ligningen

$$2x^2 + 4x + 2 = 0$$

har diskriminanten $d = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16 - 16 = 0$.

Da diskriminanten er nul, har ligningen kun den ene løsning

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot 2} = -1$$

Eksempel 5333

Ligningen

$$x^2 + 4x + 13 = 0$$

har diskriminanten $d = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 16 - 52 = -36$.

Diskriminanten er negativ, så ligningen har ingen løsninger.

ISBN 9788761685704

Øvelse 5331

Løs følgende andengradsligninger ved hjælp af diskriminantmetoden.

a. $3x^2 + 6x - 9 = 0$
b. $5x^2 - 5x = 0$
c. $x^2 - 16 = 0$
d. $2x^2 - 9x + 4 = 0$
e. $x^2 - 3x + 3 = 0$
f. $2x^2 - 4x + 2 = 0$

Eksempel 5334

Ligningen

$$x^2 + 4x + 2 = 0$$

har diskriminanten $d = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 16 - 8 = 8$.

Diskriminanten er positiv, så vi får to løsninger

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2} = -2 \pm \sqrt{\frac{8}{4}} = -2 \pm \sqrt{2}$$

altså

$$x = -2 + \sqrt{2} \quad \text{eller} \quad x = -2 - \sqrt{2}$$

ISBN 9788761685704

Eksempel 5335

For at kunne anvende diskriminantmetoden til at løse ligningen

$$2x^2 - 4x = 2x + 56$$

samler vi leddene, så der står 0 på højreside af lighedstegnet. Vi får

$$2x^2 - 6x - 56 = 0$$

Diskriminanten er

$$d = (-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-56) = 484$$

og da denne er positiv, finder vi to løsninger

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{484}}{2 \cdot 2} = \frac{6 \pm 22}{4}$$

altså $x = 7$ eller $x = -4$.

Øvelse 5332

Løs følgende ligninger med diskriminantmetoden.

a. $x^2 + 7x - 10 = 8$
b. $-2x^2 + 10 = -8x$
c. $x^2 + 4x - 25 = 4x + 11$
d. $2x^2 + 3x + 5 = 2$
e. $3x^2 - 8x = 8x - 8$
f. $x^2 + 1{,}5x - 22 = -0{,}5x^2 + 8$

Øvelse 5333

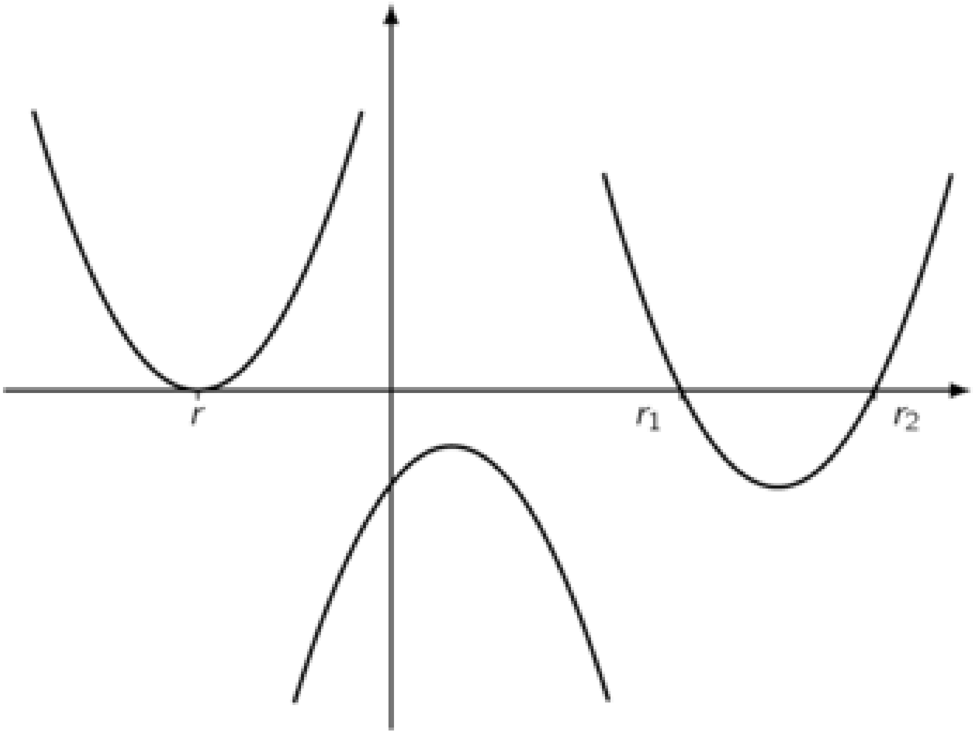
Bestem a, så andengradsligningen

$$ax^2 + x + a = 0$$

har netop én løsning.

5.4 Nulpunkter

Der, hvor parablen skærer *x*-aksen, finder vi parablens nulpunkter. Nulpunkterne kalder vi også for andengradspolynomiets rødder og betegner med *r*. Der kan være enten ingen, et eller to nulpunkter for et andengradspolynomium.



Figur 541

Funktionsværdien i et nulpunkt vil altid være 0, dvs. at nulpunkter finder vi, hvor

$$f(x) = 0$$

Dette vil sige, at vi for at bestemme parablens nulpunkter, skal løse andengradsligningen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Vi ved fra sætning 5331 (se side 353), at denne ligning kan løses ud fra diskriminantmetoden, og der gælder derfor følgende sætning om parablens nulpunkter (rødder).

ISBN 9788761685704

Sætning 541 (Nulpunkter i andengradspolynomiet)

Givet andengradpolynomiet

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

med diskriminant $d = b^2 - 4ac$.

Den tilhørende parabels *nulpunkter* finder vi, hvor $f(x) = 0$, og dermed gælder

i) hvis $d > 0$, har parablen to nulpunkter r_1 og r_2 som vi beregner som

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} \quad , \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}$$

ii) hvis $d = 0$, har parablen kun ét nulpunkt r, som vi beregner som

$$r = \frac{-b}{2a}$$

iii) hvis $d < 0$, har parablen ingen nulpunkter

Eksempel 541

Andengradspolynomiet

$$f(x) = 2x^2 + 2x - 40$$

har diskriminanten

$$d = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-40) = 324$$

Da $d > 0$, har funktionen to nulpunkter, som vi bestemmer til

$$r_1 = \frac{-2 + \sqrt{324}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 + 18}{4} = 4$$
$$r_2 = \frac{-2 - \sqrt{324}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 - 18}{4} = -5$$

ISBN 9788761685704

Øvelse 541

Bestem eventuelle nulpunkter for følgende andengradspolynomier

a. $f(x) = 2x^2 - 20x + 48$
b. $f(x) = -3x^2 + 6x + 24$
c. $f(x) = x^2 - 4x - 12$
d. $f(x) = -2x^2 + 14x - 20$
e. $f(x) = 2x^2 - 18$
f. $f(x) = 4x^2 - 5x + 8$
g. $f(x) = x^2 - 1{,}5x - 10$
h. $f(x) = 3x^2 - 6x + 3$

5.5 Faktorisering

Dersom et andengradspolynomium har nulpunkter, kan vi skrive andengradspolynomiet som et produkt.

Sætning 551 (Faktorisering af andengradspolynomiet)

Når andengradspolynomiet $f(x) = ax^2 + bx + c$ har nulpunkterne r_1 og r_2, er

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$$

Når andengradspolynomiet kun har ét nulpunkt r, er

$$f(x) = a(x - r)^2$$

Omskrivningen kalder vi *faktoriseringen af andengradspolynomiet*.

ISBN 9788761685704

Bevis (Faktorisering af andengradspolynomiet)

Når andengradspolynomiet $f(x) = ax^2 + bx + c$ har to rødder, er de givet som de to løsninger til den tilsvarende andengradsligning

$$ax^2 + bx + c = 0$$

og er derfor givet ved udtrykkene

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} \quad , \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}$$

ifølge sætning 5331.

Vi udregner først summen af rødderne r_1 og r_2

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} \\ &= \frac{-b + \sqrt{d} - b - \sqrt{d}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} \\ &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Produktet af rødderne r_1 og r_2 bliver

$$\begin{aligned} r_1 \cdot r_2 &= \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} \\ &= \frac{1}{4a^2}(-b + \sqrt{d})(-b - \sqrt{d}) \\ &= \frac{1}{4a^2}(b^2 - d) \\ &= \frac{1}{4a^2}(b^2 - (b^2 - 4ac)) \\ &= \frac{1}{4a^2}4ac \\ &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Vi får nu

$$\begin{aligned} a(x - r_1)(x - r_2) &= a(x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2) \\ &= a\left(x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right) \\ &= ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

ISBN 9788761685704

som viser, at

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$$

Hvis andengradspolynomiet kun har én rod, er $d = 0$, og så er $b^2 = 4ac$.
Roden er $r = -\frac{b}{2a}$, og dermed får vi

$$\begin{aligned} a(x-r)^2 = a(x^2 - 2rx + r^2) &= a\left(x^2 - 2\left(-\frac{b}{2a}\right)x + \frac{b^2}{4a^2}\right) \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{4ac}{4a^2}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

hvilket viser, at

$$f(x) = a(x - r)^2$$

og sætningen er bevist.

Eksempel 551

Andengradspolynomiet $f(x) = 4x^2 - x - \frac{1}{2}$ har nulpunkterne $\frac{1}{2}$ og $-\frac{1}{4}$. Dermed kan vi faktorisere f

$$f(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right)$$

Når vi har givet en faktoropløsning af et andengradspolynomium i førstegradsfaktorer, kan vi finde polynomiets nulpunkter uden at løse den tilsvarende andengradsligning. Ifølge nulreglen må en af faktorerne nemlig være nul.

Eksempel 552

I andengradspolynomiet med faktoriseringen

$$f(x) = (x + 1)(3 - 2x)$$

er nulpunkterne $r_1 = -1$ og $r_2 = \frac{3}{2}$.

ISBN 9788761685704

Eksempel 553

Andengradspolynomiet med faktoropløsningen

$$f(x) = 5(x+3)^2$$

har kun nulpunktet –3.

Når et andengradspolynomium kun har ét nulpunkt *r*, kalder vi nulpunktet en *dobbeltrod*, da den bidrager med to ens faktorer i faktoropløsningen, og vi også kalder nulpunkter for rødder.

Øvelse 551

Faktorisér nedenstående andengradspolynomier.

a. $f(x) = 2x^2 - 12x + 10$
b. $f(x) = -x^2 + 12x - 11$
c. $f(x) = 3x^2 - 18x + 27$

Øvelse 552

Andengradspolynomiet $f(x)$ har faktoropløsningen

$$f(x) = 3(x-5)(x+11)$$

Angiv toppunktets 1. koordinat.

Øvelse 553

Andengradspolynomiet $g(x)$ har faktoropløsningen

$$g(x) = a(x-r)(x-4)$$

Toppunktets 1. koordinat er 1.

Bestem *r*.

ISBN 9788761685704

5.6 Anvendelser

Eksempel 561

En virksomhed foretager analyse af deres indtjening pr. uge.

Virksomheden sælger blot én varetype, og prisen afhænger af den ønskede afsætning med følgende sammenhæng mellem enhedspris $p(x)$ (i kr.) og afsætning x (i stk.)

$$p(x) = -0{,}02x + 720$$

Omsætningen $R(x)$ beregner vi som afsætningen gange enhedsprisen, og vi antager, at virksomheden maksimalt kan afsætte 36 000 stk.

Omsætningen er dermed

$$R(x) = x \cdot p(x) = -0{,}02x^2 + 720x \quad , \quad 0 \leq x \leq 36\,000$$

Virksomhedens omkostninger $C(x)$ består af en fast omkostning og en del, der afhænger af afsætningen x.

Hvis den faste omkostning er på 2 000 000 kr., og den variable omkostning er på 140 kr. pr. enhed, kan omkostningerne udtrykkes som

$$C(x) = 140x + 2\,000\,000 \quad , \quad 0 \leq x \leq 36\,000$$

Virksomhedens overskud $O(x)$ ved produktion af x enheder finder vi ved at trække omkostningerne fra omsætningen, dvs.

$$O(x) = R(x) - C(x) = -0{,}02x^2 + 580x - 2\,000\,000 \quad , \quad 0 \leq x \leq 36\,000$$

Overskudsfunktionen O er således et andengradspolynomium, og grafen er en parabel med grenene nedad. Hvis parablen har to nulpunkter, vil der være overskud, når afsætningen ligger mellem de to nulpunkter, og vi beregner derfor diskriminaten

$$d = b^2 - 4ac = 580^2 - 4 \cdot (-0{,}02) \cdot (-2\,000\,000) = 176\,400$$

Da diskriminanten er positiv, har parablen to nulpunkter

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2 \cdot a} = \frac{-580 + \sqrt{176\,000}}{2 \cdot (-0{,}02)} = 4\,000$$
$$r_2 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2 \cdot a} = \frac{-580 - \sqrt{176\,000}}{2 \cdot (-0{,}02)} = 25\,000$$

Der er således overskud, så længe den ugentlige afsætning ligger i intervallet $]4\,000, 25\,000[$.

ISBN 9788761685704

Hvis vi ønsker at bestemme den afsætning pr. uge, der maksimerer virksomhedens overskud, kan vi finde toppunktet for overskudsfunktionen.

Toppunktet T er

$$\begin{aligned} T &= (x, y) \\ &= \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right) \\ &= \left(\frac{-580}{2\cdot(-0{,}02)}, \frac{-176\,400}{4\cdot(-0{,}02)}\right) \\ &= (\,14\,500\,,\ 2\,205\,000) \end{aligned}$$

Heraf ser vi, at vi opnår det største overskud ved en ugentlig afsætning på 14 500 stk., som giver os et overskud på 2 205 000 kr.

Den tilhørende salgspris bliver

$$p(14\,500) = -0{,}02 \cdot 14\,500 + 720 = 430$$

Den optimale enhedspris skal således fastsættes til 430 kr.

Øvelse 561

En virksomhed ønsker at foretage en analyse af deres daglige indtjening på en bestemt vare.

De har observeret følgende sammenhæng mellem enhedspris $p(x)$ (i kr.) og afsætning x (i stk.)

$$p(x) = -2x + 2\,000$$

Virksomheden har dagligt faste omkostninger på 4 000 kr., og de variable enhedsomkostninger er på 120 kr.

Dette giver virksomheden omkostningsfunktionen

$$C(x) = 120x + 4\,000$$

a. Hvilke naturlige begrænsninger er der på x? Angiv herudfra funktionernes definitionsmængder.
b. Opstil en omsætningsfunktion $R(x)$ for virksomheden.
c. Opstil en overskudsfunktion $O(x)$ for virksomheden.
d. I hvilket interval skal virksomhedens daglige salg ligge, for at de får overskud?
e. Hvor stor skal den daglige afsætning være for at opnå det største overskud?
f. Hvad bliver det størst mulige daglige overskud, og hvilken pris skal fastsættes for at få dette overskud?

Øvelse 562

En virksomhed sælger en vare til en fast pris på 45 kr.

Hermed bliver prisfunktionen

$$p(x) = 45$$

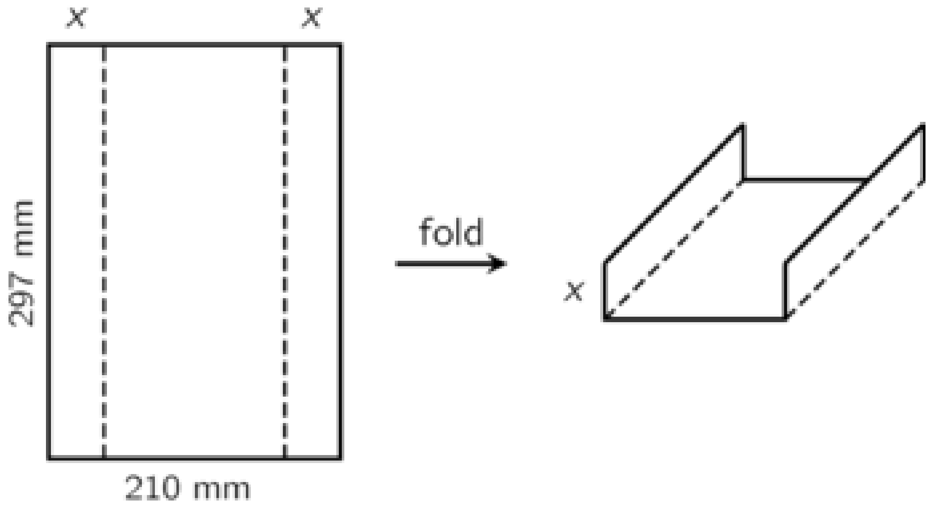
Virksomhedens omkostninger $C(x)$ vokser med afsætningen x og kan udtrykkes ved andengradspolynomiet

$$C(x) = 0{,}15x^2 + 1200$$

a. Opstil en omsætningsfunktion $R(x)$ og en overskudsfunktion $O(x)$ for virksomheden.
b. Bestem ved hvilken afsætning, virksomheden får størst overskud, og bestem dette overskud.

Øvelse 563

En plade, der har dimensioner som et A4-ark (210 mm x 297 mm) skal foldes til en kasse uden endestykker, således at rumfanget (i tilfælde af at vi satte endestykker på) bliver størst muligt.

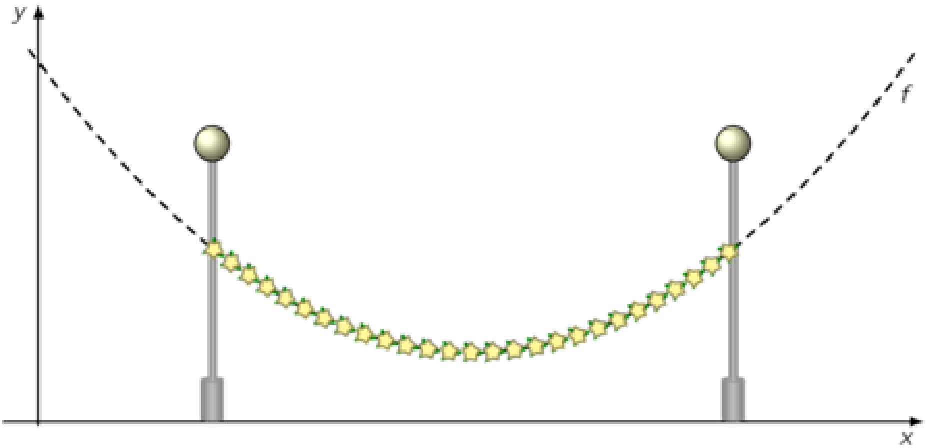


a. Hvor meget skal arket foldes op, dvs. hvor stor skal x være, for at rumfanget bliver størst muligt?
b. Vis, hvordan resultatet kan generaliseres til at gælde for alle rektangler.

ISBN 9788761685704

Øvelse 564

En guirlande er ophængt mellem to lygtepæle. Lygtepælene står med en afstand på 30 meter, og guirlanden er ophængt i samme højde i de to lygtepæle.



Guirlanden danner en parabel, som i det indlagte koordinatsystem på figuren, kan beskrives ved andengradspolynomiet

$$f(x) = \frac{1}{75}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{31}{3}$$

hvor x måles i meter.

Bestem højdeforskellen mellem guirlandens højeste og laveste punkt.

ISBN 9788761685704

Appendiks til eux merkantil

Forfatter: Jette Vind

Indholdet i dette appendiks skal ses som en tilføjelse til Systimes lærebøger for matematik C på hhx og er tænkt til at skabe klarhed over matematik C på eud-indgangen "Handel, kontor og forretningsservice", for elever med tilvalg af eux.

1. Appendikset kan være med til at skabe klarhed over undervisning på matematik C (eud/eux-bekendtgørelsen) og samtidig skabe sammenhæng mellem C-niveauet og matematik B (hhx-bekendtgørelsen) på eux.
2. Der bydes på forslag til hvordan undervisningen på C-niveauet med fordel kan tilrettelægges, så eleverne bliver klar til eksamen på C-niveau og samtidig står godt i forhold til at gennemføre matematik B,niveau, hvor bekendtgørelsen hentes fra hhx. Undervisning på B-niveauet vil ikke blive behandlet.
3. Den reviderede bekendtgørelse gældende fra 1. august 2020, hvor eleverne skal til eksamen i deres udarbejdede matematikrapport og 1-2 opgaver fra deres case-undervisningsdag. Formentlig når eleven kun én caseopgave.
4. Indholdet i dette appendiks vil derfor tage udgangspunkt i følgende emner:
    - Indhold i matematik C merkantil (undervisningsbeskrivelse), herunder kernestof og supplerende stof (også projektforløb).
    - Caseopgaver, forslag til hvordan opgaverne kan udarbejdes, så både den dygtige og den svage elev har mulighed for at arbejde. Caseundervisningsdag og forslag til hvordan dagen kan planlægges, så den enkelte elev når mest muligt.
    - Eksamen og forslag til, hvordan eleverne bliver vejledt til at præstere det bedste, de kan.
    - Forslag til hvordan overgangen fra matematik C til matematik B kan blive mere glidende (fra eud-bekendtgørelse til hhx-bekendtgørelse).
    - Refleksionsopgave.

Indhold i matematik C, eux merkantil

I bekendtgørelsen for eux matematik C er formålet med faget beskrevet således:

- At eleverne bliver i stand til at anvende matematisk modellering til løsning eller analyse af praktiske opgaver
- At kommunikere om løsning og/eller analyse af praktiske opgaver
- At bidrage til elevernes erhvervsfaglige kvalificering, hvor faget er obligatorisk
- At eleverne bliver i stand til at foretage beregninger inden for det relevante erhvervsområde.

For at kunne opnå formålene er det vigtigt at bringe matematiske emner i anvendelse, så elevernes læring understøttes bedst muligt. De matematiske emner består af to ting:

1. Kernestof

ISBN 9788761685704

    - Tal- og symbolbehandling (grundlæggende matematik)
    - Projektforløb, som skal være en betydelig del af undervisningen
2. Supplerende stof

Det betyder, at skolen skal tage stilling til og beskrive indholdet i matematik C, som også skal angives i skolens LUP (lokal undervisningsplan):

- Valg af supplerende stof
- Projektforløbet, hvor eleverne skal være undersøgende med matematikken
- Sammenhængen mellem målene og stoffet i den lokale undervisningsplan.

Se eksempel *(Filen kan downloades fra ibogen se https://laerebogimatematikhhx1.systime.dk/index.php?id=315&L=0)* på undervisningsbeskrivelse.

Se eksempel *(Filen kan downloades fra ibogen se https://laerebogimatematikhhx1.systime.dk/index.php?id=315&L=0)* på bedømmelseskriterier.

Kernestof

Tal og symbolbehandling

Tal og symbolbehandling kan være en introduktion til faget og/eller være en fast del af alle emnerne i undervisningen, så eleverne bliver fortrolig med symbolerne og anvendelse af lommeregner, Excelregneark, GeoGebra eller andre regnetekniske hjælpemidler. Indholdet er følgende:

- Regneregler
- Regning med procent, potenser og rødder
- Simpel algebraisk manipulation
- Reduktion
- Anvendelse af regnetekniske hjælpemidler.

Projektforløb

I en betydelig del af undervisningen skal eleverne arbejde individuelt med et projekt, hvor projektoplægget skal give eleverne mulighed for at være undersøgende med matematisk modellering og herigennem arbejde med problemstilling, afgrænsning, løsning og konklusion. Eleverne skal også være i stand til at arbejde med komplekse problemstillinger og fortolke resultatet. Derfor kan det være nødvendigt at arbejde med elevernes ræsonnement, intuition og overslagsregning.

Når eleverne arbejder undersøgende, giver det også mulighed for, at eleverne ser en sammenhæng mellem valg af uddannelsesretning og matematikken. Derfor kan projektoplægget med fordel tage udgangspunkt i elevernes uddannelsesvalg. Projektforløbet skal give eleverne mulighed for at være nysgerrige på deres egne uddannelsesretning og/eller deres eget interessefelt. Samtidig skal projektforløbet giver mulighed for at arbejde med et bredt

ISBN 9788761685704

udsnit af de matematiske emner. Opmærksomhed på, at for kontorelever er matematikfaget obligatorisk, og projektforløbet skal være erhvervsfagligt.

Eleverne skal have kendskab til kravene for rapportgodkendelse, og projektrapporten skal godkendes af underviseren, som kan redegøre for at rapporten har et omfang og kvalitet, der kan godkendes som elevens eksaminationsgrundlag.

Eleverne skal informeres om, at deres projektrapport bliver sendt til censor forud for deres eksamen.

Projektrapporten er en del af eksaminationsgrundlaget til eksamen. Det betyder, at eleverne skal kunne redegøre for problemstillingen, matematisk modellering, ræsonnement og fortolkning af resultatet.

Eleverne udarbejder rapport og modtager respons fra underviseren. Eleverne kan have forberedt et rapportoplæg, eventuelt som PowerPoint, hvor medstuderende som en del af undervisningsforløbet kan give respons. Se eksempel på projektforløb herunder.

ISBN 9788761685704

Eksempel: Projektforløbet Fremtidsudsigter

Fremtidsudsigter

- Enten for dansk økonomi (her kan du inddrage samfundsfag)
- Eller for en selvvalgt virksomhed (her kan du inddrage virksomhedsøkonomi)

Introduktion

På niveau C skal du udarbejde et matematikprojekt. Matematikprojektet skal laves individuelt. Matematikprojektet tager udgangspunkt i forskellige økonomiske overvejelser i en selvvalgt virksomhed eller i forskellige økonomiske overvejelser om Danmarks økonomi.

Tidsplan

- **11. november 2020**
  Projektoplægget gennemgås på klassen.
- **11. november 2020**
  I får 6 klokketimer til at arbejde med projektet på klassen - 1. skriveproces. Det forventes, at I herefter arbejder 4 timer med projektet hjemme i den kommende periode.
- **4. december 2020**
  1. Aflevering, kl. 8.00 - der gives respons til 2. skriveproces.
- **4. december 2020**
  Fremlæggelse af projektet for hinanden, rækkefølgen kommer i uddata, senest den 1. december (PPT og opponentgrupper).
- **7. december 2020**
  2. skriveproces - vi arbejder med matematikrapporten i 3 klokketimer.
- **9. december 2020**
  Endelig aflevering kl. 12.00, sendes til censor (hvis der er eksamen).

Notat til underviser: Elever, der ikke har den gode matematikrapport, kan nå at få det bragt i orden, enten med ekstra timer eller med vejledning om hvad der skal til før rapporten kan godkendes. Det er vigtigt, at eleven kender konsekvensen af en IKKE GODKENDT matematikrapport.

Vejledning

Der er afsat tid til vejledning i forbindelse med projektet, se tidsplanen. Vejledning kan også ønskes i grupper via samtaler i uddata.

Formalia

- Rapporten skal skrives i Word (WordMat). Brug gerne denne rapportskabelon *(Filen kan downloades fra ibogen se https://laerebogimatematikhhx1.systime.dk/index.php?id=315&L=0)* (venligt stillet til rådighed af Line Andersen).
- Forside med navn, fag, niveau, vejleder og titel.
- Opstilling og afgrænsning af de spørgsmål, der arbejdes med.
- Beregninger (med tilhørende dokumentation og skitser, herunder grafer i det omfang de er nødvendige for at forstå hvad der arbejdes med). Undgå bilag, men indsæt det direkte i rapprten.
- Konklusion.
- Fodnoter og kildeliste.

I må gerne samarbejde, men I skal lave rapporten individuelt. Der foretages plagiatkontrol.

Rapportkrav

Du skal i indledningen begrunde dit valg af problemstilling og kort beskrive, hvad rapporten indeholder – her også hvor matematikken kan give begrænsninger.

- Du skal lave en problemformulering, indeholdende afgrænsning, gerne med 2-3 problemstillinger.
- .Du skal redegøre for vækstfunktioner og den anvendte tilhørende teori
    - Lineære funktioner og tilhørende formler.
    - Eksponentielle funktioner og tilhørende formler.
    - Regression om hvordan det gøres i det valgte program, kan være GeoGebra.
- Du skal lave et passende antal regressionsanalyser med udgangspunkt i din problemformulering og valgte data.
- Vurder validitet i forhold til datamængden og reliabilitet i forhold til R^2. Læs mere om validitet og reliabilitet i boksen under denne liste.
- Diskuter rimeligheden i prognosen på eksempelvis 5 års sigt, 10 års sigt eller med udgangspunkt i en aktuel statistisk artikel.
- Konkluder uden at komme med ny teori, men vær kritisk. Husk at være opmærksom på, om du giver svar på dit spørgsmål.

ISBN 9788761685704

Validitet og reliabilitet

Validitet kan oversættes med gyldighed, som kan vurderes i forhold til datamaterialets størrelse.

Reliabilitet kan oversættes til pålidelighed og vurderes i forhold til forklaringsgraden, R^2-værdi, hvor 1,00 et højst og er svarende til 100 %, man taler om at 0,95 (95 %) er en acceptabel R^2-værdi. R^2-værdien kaldes determinationskoefficient. Vær derfor opmærksom på, at med et datasæt på 2, vil forklaringsgraden altid være 1,0, og meget pålidelig, MEN gyldigheden er ringe på grund af datamaterialets størrelse. Datastørrelsen skal altid være mindst 3, men gerne 5 eller flere data.

Kompetencer – bedømmelsesgrundlag

I arbejdet med matematikprojektet skal du vise nednestående kompetencer.

Du skal kunne vælge og anvende den relevante teori:

- Du skal kunne bruge oplysningerne fra dette oplæg til beregne løsninger og vurdere resultaterne.
- Du skal kunne formidle din tankegang (Du skal sørge for at forklare, hvad du gør).
- Du skal kunne illustrere beregninger med grafer (Husk, at de skal underbygge dine beregninger).
- Du skal kunne fortolke dine beregninger (Du skal kunne forklare, hvilken praktisk betydning dine resultater har).

Projektoplæg

Projektet tager udgangspunkt i din egen problemformulering, med udgangspunkt i din skriveproces.

Du skal finde relevant og brugbar data, som kan bruges til en regressionsanalyse.

Du skal begrunde dit valg af data og give en forklaring på sammenhængen til din problemformulering.

Det anbefales, at du bruger:

- Statistikbanken
- Danske virksomheders nøgletal

ISBN 9788761685704

Supplerende stof

I princippet er det kun kontoruddannelsen og finansuddannelsen, hvor matematikken er obligatorisk, men eftersom eleverne får merit til kontoruddannelsen som eux-detailhandel, så kan erhvervsfaglig kvalificering også omfatte, at eleverne både får indsigt i den matematiske anvendelse i Detailhandelsuddannelsen såvel som Kontoruddannelsen.

Der er følgende emner at vælge imellem:

- Geometri
- Funktioner og grafer
- Trigonometri
- Rentes- og annuitetsregning
- Statistik.

Der skal vælges mindst tre emner på et matematik C-niveau. For at bidrage til elevernes erhvervsfaglige kvalificering giver det mest mening at udvælge supplerende stof:

1. Funktioner og grafer,
2. Rentes- og annuitetsregning
3. Statistik.

Læs mere om disse tre emner herunder.

Funktioner og grafer

Dette emne kan anvendes til at kommunikere virksomhedernes økonomiske prognose ud fra en regressionsanalyse, baseret på virksomhedens seneste årsregnskaber, herunder også konsekvenserne af en fejlagtig valgt udviklingsmodel.

Det kræver, at eleverne har kendskab til forskellige vækstmodeller, her lineære og eksponentielle funktioner. Til løsning af ligninger også logaritmefunktioner.

Eleverne kan arbejde med den optimale salgspris fra faget virksomhedsøkonomi og ved at anvende matematisk modellering se nettoomsætning og dækningsbidrag som en andengradsfunktion. GeoGebra kan anvendes. Indholdet i dette emne er:

- Koordinatsystemet
- Lineære funktioner
- Andengradsfunktioner
- Eksponentielle funktioner
- Logaritmefunktioner
- Grafiske afbildninger
- Regressionsanalyse
- Løsning af ligninger og simple uligheder (også ligninger med 2 ubekendte).

ISBN 9788761685704

Rentes- og annuitetsregning

Dette emne kan anvendes, så eleverne får indsigt i betydningen af opsparing og gældsætning, enten privat eller for en virksomhed. Der kan arbejdes med et tema som "Privatøkonomi", hvor eleverne regner på samlede kreditomkostninger. Eleverne skal have en forståelse for rentebegreberne, herunder også ÅOP og være kritiske over for dette begreb. Indholdet i dette emne:

- Rentesregning
- Årlig effektiv rente
- Kendskab til årlig omkostning i procent, ÅOP
- Indekstal
- Annuitetsregning
- Amortisationsplan.

Indekstal kan med fordel flyttes til statistikemnet. Amortisationsplan kan også med fordel omtales som gældsafviklingsplan, som bankerne navngiver amortisationsplanen.

Statistik

Dette emne kan anvendes, så eleverne kan beskrive en målgruppe. Ved at anvende Danmarks Statistik, Statistikbanken, kan eleverne arbejde med forskellige emner. At arbejde med Statistikbanken kan også give eleleverne mulighed for i andre opgaver at skabe et godt grundlag for deres argumentation. I dette emne er indholdet:

- Empiriske observation
- Udtræk af data fra database
- Konstruktion af tabeller, her kan EXCEL anvendes
- Grafisk beskrivelse
- Middelværdi, varians og standardafvigelse.

Caseopgave

Udarbejdelse af caseopgaver

Krav til caseopgaverne udarbejdelse:

1. Der skal udarbejdes mellem 5-7 opgaver med et bredt udsnit af de matematiske emner
2. Caseopgaverne skal kunne beregnes af en gennemsnitlig elev på 4 klokketimer
3. Caseopgaverne skal give den dygtige og den svage elev mulighed for at vise matematiske kompetencer
4. Caseopgaverne tager udgangspunkt i den af skolen valgte virksomhed, så eleverne arbejder med et erhvervsfagligt område (det skal også være beskrevet i skolens LUP)

ISBN 9788761685704

5. Caseopgaverne skal sendes til censor til godkendelse sammen med 2-3 tillægsspørgsmål, som for eleverne er ukendte, i god tid inden eksamen (som tommelfingerregel 5 hverdage før).

Caseopgaverne kan udarbejdes, så de starter med konkrete opgaver til den udfordrede elev og slutter med mere abstrakte opgaver til den stærke elev (evt. henvisning til elevernes matematikprojekt). De ukendte spørgsmål kan formuleres, så de kan være med til at inddrage elevens projektrapport. Se eksempler på caseopgaver herunder.

ISBN 9788761685704

Eksempel på caseopgaver til matematikeksamen niveau C, merkantil

Indhold:

Generelle oplysninger

I caseopgaverne i matematik skal du arbejde med de emner, som du har mødt i matematikundervisningen på niveau C, indhold og formelsamling i forløbet matematik C. Du skal vise alt det du kan inden for emnerne:

Grundlæggende matematik

- Deskriptiv statistik
- Lineære funktioner, herunder funktioner generelt og koordinatsystemet
- Eksponentielle funktioner, herunder logaritmefunktioner
- Regression, gerne med inddragelse af GeoGebra
- Andengradsfunktioner
- Rente- og annuitetsregning.

Husk

Husk, at du med fordel kan Anvende 4-fasemodellen • Uddybe dine forklaringer, gerne med henvisninger til andre emner eller matematikprojektet eller måske du kan give eksempler i fra virkeligheden, fritidsjob m.m.

Løsning af caseopgaven

Du får opgaven udleveret på caseundervisningsdagen, og det forventes, at du kan forklare din metode og beregninger til eksamen.

Du skal lave dine egne besvarelser af opgaverne og udarbejde dit eget materiale, som du skal vise til eksamen. Du må selvfølgelig gerne tale med andre om opgaven, hvilket er en stor fordel for dit resultat.

Se eventuelt mere på studievaner vedrørende caseeksamen i iBogen Studievaner på EUD/EUX.

Til eksamen skal du være sikker på, at dit arbejde er afleveret i UDDATA+, og for en sikkerheds skyld også gemt på et USB-stik (spørg underviseren). Det er dit arbejde på UDDATA+, der er grundlag for din eksamen (eksaminationsgrundlag).

Du kan finde information om JYSK i iBogen Studievaner på EUD/EUX. Det er ikke nødvendigt for at løse opgaverne.

Brug hinanden og tiden fornuftigt.

Rigtig god fornøjelse og arbejdslyst :)

Jette

Opgave 1: Deskriptiv statistik

”Butiksmedarbejderne i JYSK er overordnet meget tilfredse med de nye mobile træninger, og mange andre virksomheder kigger på JYSK for at hente inspiration” .

> Helt grundlæggende har vi ændret fokus, så medarbejderne får feedback løbende, mens de gennemfører træningen. For JYSK er det jo ikke kun et mål, at vores ansatte skal bestå en test. Det er derimod at sikre, at de forstår, hvordan forskellige handlinger opfattes af kunder, for det kan omsættes til både bedre kundeservice og endnu højere medarbejdertilfredshed.

Ivana Dragić Topić, Training Manager i JYSK Nordic.

Forestil dig, at JYSK har foretaget en undersøgelse i 2015 og i 2018 med deltagelse af butiksmedarbejdere i alle JYSK Nordic-lande. Butiksmedarbejderne har givet den nye mobile træning karakter. Karakteren kan gives fra 1 til 10, hvor 10 er den bedste karakter.

Butiksmedarbejdernes karakter af træning i 2015 og 2018.

Butiksmedarbejdernes karakter af træning i 2015 og 2018.		
Karakter for træningsforløbet	**Butiksmedarbejder 2015 (ikke mobile)**	**Butiksmedarbejder 2018 (mobile)**
1	1	0
2	13	2
3	11	3
4	12	5
5	12	5
6	11	5
7	7	7
8	25	18
9	12	39
10	8	56

ISBN 9788761685704

a. Hvor mange butiksmedarbejdere er blevet spurgt i JYSK Nordic i 2015 og 2018?
b. Opstil en hyppighedstabel med tilhørende grafiske diagrammer for både 2015 og 2018. (anvend gerne Excel).
c. Sammenlign karaktererne fra 2015 til 2018. Eksempelvis: Hvad er sandsynligheden for at der er givet karakteren 8 og derunder? Hvad er sandsynligheden for at der er givet karakteren 10?
d. Mener du, at der er tale om en forbedring af den gennemførte træning? Begrundelsen skal tage udgangspunkt i deskriptorerne som minimum, summeret frekvens, gennemsnit, typetal, variationsbredde og spredning/standardafvigelse.

ISBN 9788761685704

Opgave 2: Break even og lineære funktioner

Forestil dig, at JYSK vil være medsponsor for Dansk E-Sports festival den 20.-22. september 2021 og opstiller en salgsstand, for at sælge deres populære gaming-stol.

Salgsprisen for gaming-stolen sættes til 400 kr. uden moms.

Forestil dig, at JYSK indkøber gaming-stolen til 219 kr. (VE).

Forestil dig, at JYSK betaler 25.000 kr. i sponsoromkostninger ved Dansk E-Sports festival.

a. Hvad skal der stå på prisskiltet for stolen, når du ved, at kunderne skal betale moms?
b. Bestem funktionsforskriften for omsætningen af gaming-stolen (altid uden moms).
c. Forklar, hvorfor funktionsforskriften for de samlede omkostninger, SO(x), for JYSKs deltagelse ved Dansk E-sports festival med gamingstol-standen kan skrives som $SO(x)=219x + 25000$.
d. Bestem break even for JYSKs deltagelse som sponsor ved Dansk E-Sports festival. Kan løses både som beregning og grafisk.
e. Forklar funktionerne grafisk, idet du beskriver sammenhængen mellem x- og y-værdierne og kommer ind på proportionalitetsbegrebet.

Forestil dig, at regnskabsafdelingen i JYSK har meddelt, at de gennemsnitlige omkostninger, $GO(x)$, skal holdes under 344 kr.

f. Giv en begrundet vurdering af, hvor mange stole JYSK mindst skal sælge på Dansk E-Sports festival for at holde de gennemsnitlige omkostninger under 344 kr.

ISBN 9788761685704

Opgave 3: Vækst og eksponentielle funktioner

Jysk har de seneste år lagt en ekstra milliard kroner oven i deres i forvejen gigantiske omsætning. Sådan er det også i år, hvor omsætningen er steget til 26,6 mia. kroner. Det viser nøgletal, som gruppen har offentliggjort i 2018.

> Det er meget tilfredsstillende, at vi endnu engang formår at sætte rekorder i JYSK. Det bekræfter os i, at det fortsat er den rigtige strategi at investere i fysiske butikker, så vi kommer helt tæt på kunderne i alle de lande, hvor JYSK er i dag.
>
> *Lars Larsen*

JYSK Nordic har tilsammen 2.668 butikker og beskæftiger omkring 23.000 medarbejdere.

Det er særligt i Øst- og Sydeuropa og på Balkan, at JYSK har store vækstrater. Kundestrømmen i regnskabsåret er øget med 12 %.

JYSK mener, at vækstraten i kundestrømmen skal afspejle antallet af butikker og forventer derfor samme vækstrate i udviklingen af antallet af butikker som i kunder.

a. Bestem den funktionsforskrift, der beskriver udviklingen af butikker i JYSK, når udviklingen af butikker har samme vækst som kundestrømmen.
b. JYSK åbnede i 2012 butik nr. 2000 i det nordlige Norge. Vurdér, om din model, der beskriver udviklingen af butikker i JYSK, passer med, at JYSK i 2012 åbnede butik nr. 2000.
c. Begrund, hvorfor Lars Larsen har ret i, at JYSK vil åbne mindst 700 butikker de næste 5 år.
d. Vis både grafisk og ved beregning, hvornår JYSK vil fordoble antallet af butikker.

ISBN 9788761685704

Opgave 4: Prisoptimering og andengradsfunktioner

Forestil dig, at JYSK i Horsens har besluttet at sætte fokus på festivaltelte, fordi mange unge tager til Jelling Festival. Deres nuværende telte er til 4 personer, men JYSK vil sælge 2-personers-telte til lavpris, som et kampagnetilbud.

Forestil dig, at JYSK har fået lavet en markedsanalyse og har fundet følgende sammenhæng mellem pris på festivalteltet og antal, som JYSK kan sælge (afsætning):

Afsætning (antal stk), *x*	**Pris pr stk. (kr. ekskl. moms), *y***
25	125
150	100
275	75
400	50
525	25

Sammenhængen mellem pris og afsætning kan beskrives ud fra funktionsforskriften (matematisk model) $p(x) = -0{,}2x + 130$; hvor x er afsætning (antal kunder) og $p(x)$ er stykprisen ved en afsætning på x.

a. Forklar hvorfor funktionsforskriften for omsætningen kan skrives som

$\text{Omsætning}(x) = -0{,}2x^2 + 130x$. Brug gerne GeoGebra.

b. JYSK forventer at sælge højst 400 stk. og mindst 250 stk. festivaltelte. Bestem omsætningsintervallet.
c. Bestem funktionsforskriften for de samlede variable omkostninger VO, når du ved, at JYSK indkøber festivalteltet til 29 kr. eksklusiv moms (VE).
d. Bestem funktionsforskriften, der beskriver dækningsbidraget for festivalteltet.
e. Bestem den afsætning, der giver JYSK det største dækningsbidrag for kampagnen af festivalteltet.
f. Bestem den bedste (optimale) salgspris, for festivalteltene.

Detaileleven laver et prisskilt på 99,- kr.

g. Giv en forklaring på forskellen mellem den fundne optimale salgspris og prisen på prisskiltet.

ISBN 9788761685704

Opgave 5: Prognose og regression

JYSK vil have butikker world wide. Dog har de lukket deres butikker i Kina på grund af manglende omsætning.

JYSK forsøger altid at opdyrke nye markeder.

I 2018 åbner JYSK i Irland, og i 2019 åbner JYSK i Rusland.

JYSK mener, at den største vækst i øjeblikket ses i Grækenland og de øvrige balkanlande. Forestil dig en tabel, som viser omsætningen i 1.000 kroner i nogle udvalgte lande:

Lande	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**	**2018**
Spanien	48.999	48.019	47.059	46.117	43.788
Tyskland	38.900	45.488	52.076	58.664	65.750
Grønland	6.655	6.422	6.244	6.146	5.999
Grækenland	13.499	15.524	20.530	26.660	34.794

a. Udarbejd indekstal for de udvalgte lande for alle år. Sæt basisåret til 2014, og giv en kommentar til udviklingen.

Udviklingsforløb er et centralt begreb i matematikken. I dette tilfælde har vi oplysninger for 5 år (5 punkter – Husk x = tiden efter 2014).

Modellen skal have en forklaringsgrad $R^2 > 0{,}95$. Det betyder, at modellen med 95% sikkerhed kan bestemmes ud fra den valgte model. En forklaringsgraden $R^2 > 0{,}99$, viser en sikkerhed på 99 %, og den valgte model siges at være glimrende.

b. Hvilken model (lineær eller eksponentiel) beskriver bedst udviklingen af omsætningen i de forskellige lande?
c. Bestem den forventede omsætning i de forskellige lande i år 2025 ud fra den udviklingsmodel, der passer bedst.
d. Beskriv udviklingen i de forskellige lande med udgangspunkt i de fundne funktionsforskrifter.
e. Forklar, om det er rimeligt at antage, at omsætningen også kan bestemmes for år 2030 ud fra samme modeller.

ISBN 9788761685704

f. Ud over at opsøge nye markeder har JYSK besluttet at satse på to lande i de næste 5 år. Giv en begrundet forklaring på, hvilke lande JYSK skal satse på i de næste 5 år.

ISBN 9788761685704

Opgave 6: Finansiel regning

I 2017 blev det første spadestik taget til JYSKs distributionscenter i Bozhurishte tæt ved den bulgarske hovedstad Sofia.

Der er tale om en investering på over 100 millioner Euro. Distributionscentret placering passer perfekt ind i planerne for fortsat at vokse og indtage nye markeder

Med et nyt distributionscenter i Bulgarien kan JYSK levere endnu bedre service til de mange kunder i kædens butikker i blandt andet Rumænien, Bulgarien og resten af Balkan. Samtidig betyder det nye distributionscenter også, at JYSK kan spare mange kilometer på landevejen til gavn for miljøet.

Distributionscentret forventer at kunne spare JYSK op mod 10 millioner kilometer lastbilkørsel hvert år.

a. Hvad koster distributionscentret i danske kroner, når kursen på Euro (EUR) er 746,78?

Forestil dig, at JYSK har fået 2 lånetilbud. Et fra en bulgarsk bank og et fra en dansk bank.

	Bulgarsk bank i EUR (Euro)	**Dansk bank i DKK (danske kroner)**
Udlånsrente	0,17 % pr. måned	0,5 % pr. kvartal
Etableringsgebyr	500.000,00 EUR	1.500.000,00 DKK
Løbetid	20 år	20 år

b. Hvad er ÅOP for de to lån? Giv en forklaring på forskellen for rentebegreberne pålydende rente, effektiv rente og ÅOP.
c. Begrund, hvor du vil anbefale JYSK at optage lånet.
d. Hvad er den kvartårlige ydelse for lånet i Danmark?

Forestil dig, at JYSK regnskabsafdeling har udregnet, at det koster 7,01 kr. pr. km at holde en lastbil kørende.

e. Kan besparelsen i km betale ydelsen på lånet?

Egenkapitalens forrentning har følgende udvikling de seneste år:

ISBN 9788761685704

	2013-14	2014-15	2015-16	2016-17	2017-18
Egenkapitalens forrentning i %	33,0	34,0	40,5	41,9	44,9

f. Begrund, at den gennemsnitlige forrentning af egenkapitalen i JYSK er 38,78% p.a.

JYSK fejrede i 2019 40-års jubilæum, og med alle de arrangementer, kampagner, sponsorater m.m. Forestil dig, at jubilæet forventes at koste 10 mio. kr.

Forestil dig, at ejerne af JYSK ekstraordinært har indskudt egenkapital i 2014.

g. Hvilket beløb har været indskudt i egenkapital i 2014, så JYSK har 10 mio. kr. til at betale jubilæet i 2019, når den gennemsnitlige rente forventes at være den samme i alle år?

Caseundervisningsdag

Undervisningsdagen har til formål, at den enkelte elev når mest muligt. Det betyder, at eleverne skal være forberedte på, hvordan dagen bliver tilrettelagt og være bekendt med de værktøjer, som anvendes på caseundervisningsdagen. Det kan derfor være en god idé at lave en øve-case-undervisningsdag, til fordel for både elev og underviser.

Da caseundervisningsdagen betragtes som en del af undervisningen, er elever med funktionsnedsættelse omfattet af de almindelige regler for SPS-støtte i undervisningen. Elever, der ikke afleverer et dokument med casebesvarelse ved caseundervisningsdagens ophør, har ikke udarbejdet et eksaminationsgrundlag og kan derfor ikke gå til mundtlig prøve.

Planlægning og "undervisning"

Motivation og koncentration kan være svær at fastholde hos eleverne igennem 4 klokketimer. Elevernes aktivitetsniveau kan øges ved at arbejde med forskellige hjerneaktivitetsøvelser, som giver eleverne en pause. Der findes forskellige øvelser, som kan optimere elevernes fokus og motivation.

ISBN 9788761685704

Studiegrupper

Hvis eleverne har arbejdet meget i studiegrupper i undervisningen, så vil det også være en fordel at inddele eleverne i studiegrupper til en caseundervisningsdag. Formålet med studiegrupperne er, at eleverne får mulighed for at drøfte deres opgaver og støtte hinanden. Arbejder skolen med NetWerk, kan det være en måde at inddele studiegrupperne på. Når det handler om eksamen, kan det skabe tryghed, at eleverne arbejder i selvvalgte grupper. Det er vigtigt at skabe tryghed for eleverne, så både den svage og den stærke elev kan få bedst muligt udbytte af undervisningsdagen.

Aflevering

Eleverne skal aflevere deres arbejde fra caseundervisningsdagen. For at sikre, at det er deres arbejde, kan der oprettes en ”opgave” i skolens LMS-system, eksempelvis ”UDDATA+”.

Eksempel på en caseundervisningsdag

- **08.00** Eleverne møder ind sammen med underviser og evt. SPS-støttepersoner
- **08.15** Eleverne bliver præsenteret for caseopgavesættet, her overordnet med emner, dagens plan og hvordan eleverne skal præsentere deres løsninger på eksamensdagen
- **08.30** Eleverne arbejder i deres studiegrupper med 1. valgte opgave (aflever det, der er - der kan arbejdes videre med opgaven senere)
- **09.00** Brainbrake - eleverne skal være aktive og væk fra lokalet
- **09.15** Eleverne arbejder i deres studiegrupper med 2. valgte opgave (aflever det, der er - der kan arbejdes videre med opgaven senere)
- **09.45** Formiddagspause
- **10.00** Eleverne arbejder i deres studiegrupper med 3. valgte opgave (aflever det, der er - der kan arbejdes videre med opgaven senere)
- **10.30** Eleverne arbejder i deres studiegrupper med 4. valgte opgave (aflever det, der er - der kan arbejdes videre med opgaven senere)
- **11.00** Brain break - eleverne skal være aktive og væk fra lokalet
- **11.15** Eleverne arbejder i deres studiegrupper med 5. valgte opgave (aflever det, der er - der kan arbejdes videre med opgaven senere)
- **11.45** Frokostpause
- **12.15** Eleverne arbejder i deres studiegruppe med 6. valgte (sidste opgave) (aflever, det der er - der kan arbejdes videre med opgaven senere)
- **12.45** Brain break - eleverne skal være aktive og væk fra lokalet
- **13.00** Eleverne arbejder i deres studiegruppe og gennemlæser deres arbejder, arbejder eventuelt videre på nogle af opgaverne
- **14.00** Eleverne skal uploade deres arbejde til UDDATA+, i WordMat, hvis de har arbejdet med det i undervisningen

Der står i bekendtgørelsen, at eleverne ikke må tage deres arbejde med fra lokalet – eksamen er i gang, når caseundervisningsdagen starter. Det betyder, at caseopgavesættet skal indsamles, når caseundervisningsdagen er afsluttet.

ISBN 9788761685704

Eksamen

Elever er forskellige, men langt de fleste har det bedst med at være godt forberedt.

Eksaminationen har en varighed på 30 min. – så eksaminationen tager imellem 20-22 min. for at have tid til votering og skrift.

Censor er i god tid kontaktet inden eksamen. og følgende er fremsendt:

- Undervisningsbeskrivelse, med rækkefølgeliste og valgte prøveform (merkantil eux kan kun vælge caseopgave)
- Projektforløb og bedømmelseskriterier
- Elevernes projektbesvarelse
- Caseopgaver til godkendelse sammen med 2-3 tillægsspørgsmål til hver opgave.

Eksamen er 2-delt:

1. Projektforløbet - læs mere her (se side 371), som danner den ene del af elevens eksaminationsgrundlag (10-11 min.)
2. Caseopgaverne - læs mere her (se side 377), som danner den anden del af elevernes eksaminationsgrundlag (10-11 min.)

Jeg vil altid anbefale eleverne at starte med projektforløbet, fordi eleverne er forberedt på dette. Det betyder at vi i undervisningen har lavet følgende:

1. Gennemarbejdet opgaven skriftligt i lektioner på klassen
2. Udarbejdet PowerPoint, så eleven kan fremlægge projektforløbet
3. Fremlagt projektforløbet for en klassekammerat
4. Udvalgt det faglige stof, som eleven vil præsentere.

Jeg retter ikke eleverne de første 2 min., selvom de siger noget forkert. Jeg gør et notat og vender tilbage. Det skaber mindre nervøsitet.

Det er vigtigt, at kontakten med censor er imødekommende, dog ikke på bekostning af det, som er væsentligt i forhold til undervisningsbeskrivelsen.

Husk at lave aftale med censor om spørgsmål. Hvem starter, og hvordan fastlægges karakter?

Vær altid klar med fagbilag og karakterforklaringer. Så bliver voteringen langt mere kvalificeret.

Jeg bruger denne:

Karakter	Med ord	Processen	Helheden
12	Fremragende	Ingen eller få uvæsentlige mangler	Gives for den usædvanlig selvstændige og udmærkede præstation

Karakter	Med ord	Processen	Helheden
10	Udmærket	Nogle mindre væsentlige mangler	Gives for den udmærkede, men noget rutinemæssige præstation
7	Godt	Adskillige mangler	Gives for den gode præstation, der ligger lidt over middel Gives for den middelgode præstation
4	Nogenlunde	Adskillelige væsentlige mangler	Gives for den ret jævne præstation, der ligger lidt under middel
02	Tilstrækkeligt	Det minimalt acceptable	Gives for den noget usikre, men nogenlunde tilfredsstillende præstation
00	Utilstrækkeligt	Ikke tilstrækkeligt til niveauet	Gives for den usikre, meget mangelfulde og utilfredsstillende præstation
-3	Helt utilstrækkeligt	Mindre end på folkeskoleniveau	Gives for den helt uantagelige præstation

Efter voteringen skal eleven have karakteren før begrundelsen. Elever, der ikke består, skal gives tid til at næste trin beskrives, og de skal have at vide, hvor de kan gå hen for at tale med nogen.

Overgang fra matematik C til B

Afslutningsvis er her forslag til, hvordan overgangen fra matematik C til matematik B kan blive mere glidende.

Refleksionsopgaver udarbejdes efter hvert emne på niveau C. En form for emneopgaver eller portfolio, dog uden beviser. Der bruges undervisningstid på projektforløbet, som også er en form for portfolio. Bekendtgørelsen nævner ikke noget om refleksionsopgave, og den er derfor ikke noget krav, Her en forklaring på egenskaber, fordele og udbytter for både elever og underviser.

Egenskaber	En refleksionsopgave er en samling af teori og modeller, gerne med opgaveeksempler. Dokumentet kan eksempelvis udarbejdes i WordMat på 3-6 sider – gerne i grupper af 2-3, så eleverne kan dele og formidle viden. Der arbejdes med elevernes symbolbehandling og generel notifikation i matematik. Refleksionsopgaverne gennemgås på klassen med udgangspunkt i en af elevprodukterne, som en repetition. Der gives ikke karakter for refleksionsopgaven. Navnet er forskelligt fra emneopgaver, fordi opgaven skal viderebehandles på B-niveau og for at give klarhed over, at den mangler efterbehandling for elever, der skal videre på B-niveau.

ISBN 9788761685704

Fordele	Samlingen af teori, modeller og opgaveeksempler giver eleven en sikkerhed for at kunne finde og anvende refleksionsopgaven til en eventuel eksamen. Eleverne kan nemt og hurtigt finde de enkelte emner. Som underviser er det let at lave repetition af emnet ved at anvende forskellige elevprodukter – både nogle rigtig gode, mellem og nogle, som mangler en del. Samtidig kan der også tales om bedømmelseskriterier.
Udbytte	Refleksionsopgaverne danner et godt udgangspunkt for elever, der skal til eksamen på C-niveau, så eleverne let kan finde frem til lignende opgaveeksempler og den tilhørende teori. Refleksionsopgaven er et godt udgangspunkt for elever, som skal videre på et B-niveau. Det vil betyde, at det meste af arbejdet er gjort, men der skal tilføjes beviser. Det betyder, at eleverne får en tryghed i at have overblik over emnet, at eleverne kan bruge tiden til at løse opgaverne til en caseundervisningsdag, at eleverne kan arbejde med tilvækst i matematikniveauet fra C- til B-niveau, at eleverne bliver klar over, hvor meget matematik de kan. Se eksempel (se side 393) på oplæg til en refleksionsopgave.

Det er naturligvis en fordel at samarbejde med underviseren på B-niveau, så man sammen bliver enige om temaer eller emner, der med behandles på C-niveau.

Refleksionsopgave

Herunder ser du et eksempel på en refleksionsopgave, der kan ændres til en emneopgave.

ISBN 9788761685704

Eksempel på refleksionsopgave

Indhold:

- Indledning
- Deskriptiv statistik - Mindmap
- Deskriptiv statistik - Centrale elementer
- Ikke-grupperet observation (diskret variabel)
- Grupperet observation (kontinuert variabel)
- Deskriptorer
- Ikke-grupperet observation med hyppighedstabel og diagrammer
- Grupperet observation med hyppighedstabel og diagrammer
- Anvendelse af statistisk værktøj i iBog
- Case
- Konklusion

Indledning

Kort indledning, hvad kan statistik bruges til, giv en forklaring i forhold til dit kommende erhverv. Forklar emnet uden brug af matematiske fagtermer. Du kan forestille dig, at du skal forklare emnet for en, der aldrig har haft matematik før. Det betyder altså, at du skal lade være med at inddrage statistiske deskriptorer, men i stedet komme ind på at statistik kan bruges til at behandle data fra undersøgelser osv.

Deskriptiv statistik – Mindmap

Et fint program er Edraw Mindmaster eller tilføjelsesprogram til GoogleDrev: MindUP. Klik på NY og vælg tilknyt flere og søg ”Mind map”. .

Deskriptiv statistik – Centrale elementer

Skriv kort, hvad dette afsnit indeholder, eksempelvis forskellen på ikke-grupperet og grupperet observation. Alle deskriptorerne, beregnet både for ikke-grupperet observation og grupperet observation. Ikke-grupperet observation (diskret variabel). Det betyder, at ...

Ikke-grupperet observation (diskret variabel)

Det betyder, at ...

Grupperet observation (kontinuert variabel)

Det betyder, at …

Deskriptorer

ISBN 9788761685704

Det betyder, at …

Ikke-grupperet observation med hyppighedstabel og diagrammer

Det betyder, at …

Brug gerne eksempler der er anvendt på klassen

Grupperet observation med hyppighedstabel og diagrammer

Det betyder, at …

Anvendelse af statistisk værktøj i iBog

Lav en kontrol af dit eksempel og indsæt et billede af svaret fra interaktivt værktøj...

Case

Løs opgaven og giv svar – svaret skal tage 7 min. Se et eksempel på caseopgave (se side 379). Her vælges opgaven med deskriptiv statistik. Brug 4-fasemodellen til hvert spørgsmål:

Virkelighedens verden	Matematikkens verden
Fase 1	**Fase 2**
Handler om • Problemstilling • Hvad vil du have svar på?	**Handler om** • Fakta og metode. • Hvad ved du? • Hvilken metode vil du anvende? Tænk i emner.
Fase 4	**Fase 3**
Handler om • Konklusion. • Giv svar på problemstillingen.	**Handler om** • Beregning og løsning. • Hvordan har du foretaget beregninger? • Hvad er løsningen?

ISBN 9788761685704

Væsentligt i de fire faser

Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4
Formuler hver opgave som et spørgsmål. Du er i den virkelige verden, så brug hverdagssprog.	Matematisk modelleringsproces. Skriv, hvad du ved, og hvilke formler der er nyttige at kende til i løsning af problemet. Du er i matematikkens verden, så brug tal og symboler korrekt.	Giv en løsning med matematiske symboler. Forhold dig kritisk til den matematiske model. Du er i matematikkens verden, så brug værktøjer, tal og symboler korrekt.	Præcis kommunikation – skriftligt og mundtligt. Håndtere og kritisk forholde sig til den matematiske løsning. Start altid med: Det betyder, at ... Du er i den virkelige verden, så oversæt matematikløsningen til hverdagssprog.

Konklusion

Skriv, hvad du har fået kendskab til i forhold til emnet deskriptiv statistik. Hvad kan du bruge det til i forhold til din uddannelsesretning?

En refleksionsopgave skrives i Word, for så slipper du kompatibilitetsproblemer mellem forskellige programmer. Erfaringen viser, at mange vælger at skrive i Google Docs for herefter at kopiere opgaven over i Word. Mange af funktionerne og genvejstasterne er dog ikke de samme, og du vil derfor være meget bedre stillet ved fra begyndelsen at skrive i Word.

Litteratur

Indhold	Udgiver	Bemærkninger
Bekendtgørelse til matematik på eud/eux	UVM	Bilag 12, se også indholdsfortegnelsen, især §10, hvor caseopgaver er beskrevet.
Bekendtgørelse til karakter	UVM	Hvem har ansvaret for hvad?
Bekendtgørelse om erhvervsfaglig studentereksamen eux	UVM	Sammensætning af eux-forløb – hvad skal der til?
Bekendtgørelse om erhvervsuddannelse	UVM	Formålet med en erhvervsuddannelse, her også eux.

ISBN 9788761685704

Indhold	Udgiver	Bemærkninger
Vejledning til matematik og vejledning til caseopgaver	UVM	Find faget matematik, og der dukker pdf-filer op.

ISBN 9788761685704