

**Кафедра № 604**

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2**  
**по дисциплине**  
**«Динамика ЛА»**  
**"Определение возмущающего ускорения, обусловленного**  
**сопротивлением атмосферы Земли"**

Утверждено  
На заседании кафедры  
«13» сентября 2023 года

Работу подготовили:  
Проф. Горбатенко С.А.  
Ст. преп. Морозова Т.А.

**Москва 2023**

## СОДЕРЖАНИЕ

	стр.
1 Введение . . . . .	3
2 Цель работы . . . . .	3
3 Элементы теории . . . . .	3
4 Задание на выполнение работы . . . . .	5
5 Порядок и методика выполнения работы . . . . .	5
6 Содержание отчета . . . . .	10
7 Контрольные вопросы. . . . .	10

## Введение

Задача необходимости учета сопротивления атмосферы имеет довольно давнюю историю и возникла впервые при прогнозировании движения первых ИСЗ и определении времени существования их на орбите с учетом тормозящего действия верхних слоев атмосферы.

Особенно актуальна эта задача для ИСЗ, имеющих «низкие» орбиты ( $r_H \approx 200 \text{ км}$ ), где влияние атмосферы особенно ощутимо.

По смыслу своего воздействия аэродинамическая сила должна быть мала, ибо в противном случае КЛА не мог бы осуществить орбитальный, вернее замкнутый полет.

## Цель работы

Исследовать возмущения, вызываемые сопротивлением атмосферы Земли.

## Элементы теории

Аэродинамическая сила мала по сравнению с гравитационной силой, а ее малость определяется малой плотностью ( $H \geq 100 \text{ км}$ ). Пусть вектор полной аэродинамической силы  $\overline{R}_A$  представляется в виде:

$$\overline{R}_A = [\overline{X}_A, \overline{Y}_A, \overline{Z}_A]$$

где  $X_A, Y_A, Z_A$  – проекции  $\overline{R}_A$  на оси скоростной СК и называется, соответственно, силой лобового сопротивления, подъемной силой и боковой силой.

Основным возмущающим аэродинамическим фактором считается сила  $X_A$ , а силы  $Y_A, Z_A$  учитываются весьма редко. Вектор  $\overline{X}_A$  направлен против вектора скорости КЛА относительно среды, а величина  $\overline{X}_A$  равна

$$\begin{aligned} X_A &= c_{xa} \frac{\rho V^2}{2} S_m \\ \overline{F}_A &= \frac{c_{xa} q S_m}{m} = \sigma_x \rho \bar{V}^2 \end{aligned} \quad (1)$$

где  $C_{xa}$  – коэффициент силы лобового сопротивления;

$q = \frac{\rho V^2}{2}$  – скоростной напор;

$V$  – вектор скорости КЛА относительно атмосферы;

$S_m$  – характерная площадь КЛА (площадь поперечного сечения спутника);

$m$  – масса КЛА;

$F_A$  – возмущающее аэродинамическое ускорение в скоростных осях.

$\sigma_x = \frac{c_{xa} S_m}{2m}$  – баллистический коэффициент КЛА.

Основным аргументом в (1) является плотность атмосферы  $\rho$ . Характер изменения плотности верхней атмосферы по высоте зависит от многих причин и может изменяться достаточно быстро и по времени  $t$ .

Одним из главных факторов, влияющих на распределение плотности верхней атмосферы, является солнечный нагрев.

Наряду с систематическими циклическими вариациями плотности могут иметь место случайные вариации, порождаемые случайными и непредсказуемыми изменениями солнечной активности. В целом картина вариаций плотности верхней атмосферы оказывается весьма сложной и трудно прогнозируемой.

Для приближенных расчетов часто пользуются упрощенной моделью атмосферы, которая строится на некоторых дополнительных упрощающих предположениях. Такую упрощенную модель мы и будем использовать.

Наблюдение за движением многих ИСЗ и обобщение опыта проведения баллистических расчетов по прогнозу движения ИСЗ позволило создать ГОСТ 25645.115-84 «Атмосфера Земли верхняя. Модель плотности для баллистического обеспечения полетов ИСЗ» для высот  $120 \div 1500$  км. Для расчетов ниже 120 км (задачи входа КЛА в атмосферу) обычно пользуются стандартной атмосферой по ГОСТу 4401-81.

Для определения безразмерного коэффициента  $c_x$  существуют специальные методики в зависимости от формы ИСЗ и углов его ориентации относительно вектора скорости набегающего потока. Для оценочных расчетов вполне можно принять  $c_x = 2,0 \div 2,5$  независимо от формы ИСЗ.

Если взять некоторые средние значения входящих в (1) величин и оставить только функцию  $\rho = \rho(H)$ , определяемую стандартной атмосферой, то оценка величины  $F_A$  представляется в виде:

h, км	100	200	400	800
$F_A$ , см/с <sup>2</sup>	30	$2,2 \cdot 10^{-2}$	$3,1 \cdot 10^{-4}$	$2,6 \cdot 10^{-8}$

Краткая характеристика:

- на высоте  $\leq 100$  км  $F_A$  столь значительно, что КЛА не сможет сделать и один виток;
- при увеличении  $h$  от 200 км до 400 км аэродинамические возмущение убывает на два порядка;
- на высотах  $> 800$  км при проектных расчетах аэродинамическим возмущением обычно пренебрегают.

### Задание на выполнение работы

Исследовать возмущения, вызываемые сопротивлением атмосферы Земли применительно к следующим орбитам ИСЗ.

Вариант	$h_a$ , км	$h_n$ , км	$i$ , град	$\Omega$ , град	$\omega$ , град	$M$ , град
1	350	240	10	5	0	60
2	450	340	20	10	0	45
3	650	240	30	15	0	30
4	850	350	45	20	0	15
5	1150	550	60	25	0	0

### Порядок и методика выполнения работы

Алгоритм расчета проекций возмущающего ускорения, обусловленного сопротивлением атмосферы Земли, можно записать как:

**1. На основе исходных параметров орбиты  $h_a$ ,  $h_n$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $M$ , которые отвечают заданному моменту времени  $t$ , по формулам (2) найти координаты заданной точки в АГЭСК ( $x_a$ ,  $y_a$ ,  $z_a$ );**

Большая полуось и эксцентриситет определяются по формулам:

$$a = \frac{r_a + r_n}{2}$$
$$e = \frac{r_a - r_n}{2a}$$

$$\begin{aligned} x_a &= r_a \cdot (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i) \\ y_a &= r_a \cdot (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i) \\ z_a &= r_a \cdot \sin u \sin i \end{aligned} \quad (2)$$

где:  $u = \vartheta + \omega$  – аргумент широты орбиты;

$$\vartheta = 2 \cdot \arctg \left( \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \tg \left( \frac{E}{2} \right) \right) - \text{истинная аномалия КА на орбите;}$$

$r_a = a \cdot (1 - e \cos E) = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cos \vartheta}$  – модуль радиус-вектора КА в АГЭСК.

При этом значение эксцентрической аномалии  $E$ , которая отвечает средней аномалии  $M$ . Находим методом приближений из уравнения Кеплера.

а) Задать начальное значение эксцентрической аномалии  $E_0 = M$ ;

б) рассчитать новое значение эксцентрической аномалии согласно уравнению Кеплера по формуле

$$E_{i+1} = M + e \sin E_i$$

где  $i$  – номер итерации.

В случае выполнения условия

$$|E_{i+1} - E_i| \leq \varepsilon$$

где  $\varepsilon$  – некоторое наперед заданное малое положительное число ( $\varepsilon=0,001$ град), решение полагается найденным и  $E = E_{i+1}$ . Конец алгоритма.

Если это условие не выполняется, то переходим к пункту в).

в)  $E_i = E_{i+1}$ . Алгоритм повторяется с пункта б).

## 2. По формулам (3), (4) найти трансверсальную $V_\tau$ и радиальную $V_r$ скорости;

Для упрощения выражений будем считать, что атмосфера Земли неподвижная ( $V_{\text{пер}} = 0$ ). Тогда

$$V = V_{\text{отн}} + V_{\text{пер}} = V_{\text{отн}}$$

Тогда в проекциях на векторы  $\bar{S}$ ,  $\bar{T}$ ,  $\bar{W}$  имеет вид  $\bar{V} = [-V_r \ -V_\tau \ 0]^T$ .

А  $V_r$  и  $V_\tau$  есть радиальная и трансверсальная составляющие вектора скорости, которые определяются соотношениями (3) и (4).

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot e \sin \vartheta \quad (3)$$

$$V_\tau = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot (1 + e \cos \vartheta) \quad (4)$$

Поскольку

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_\tau^2} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot \sqrt{1 + 2e \cos \vartheta + e^2}$$

## 3. На базе значений $x_a, y_a, z_a$ по формуле (5) найти положение этой точки В ГСК, заданное координатами $x, y, z$ , и рассчитать соответствующие им геодезические координаты $L, B, H$ ;

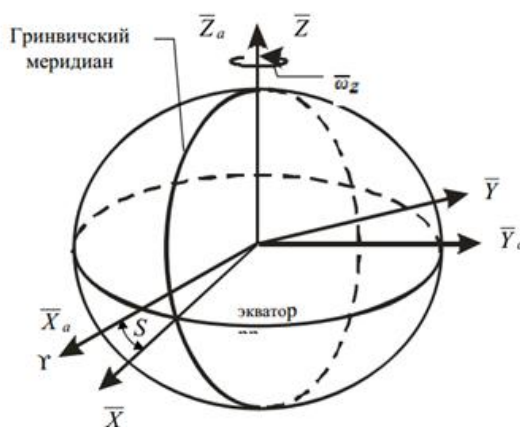


Рис. 4. Абсолютная и относительная экваториальные СК

Взаимное положение систем координат АГЭС и ГСК определяется углом поворота Земли вокруг оси вращения  $S(t)$ , которое отвечает звездному времени на момент  $t$  времени UTC.

Положение точки в АГЭСК определяется вектором  $\bar{r}_a = (x_a, y_a, z_a)^T$ , а положение той же точки в ГСК определяется вектором  $\bar{r} = (x, y, z)^T$ , которые равны по модулю ( $r = r_a$ ). Взаимосвязь между положением точки в этих системах координат определяется матрицей взаимного перехода.

$$\Psi = \begin{bmatrix} \cos S(t) & \sin S(t) & 0 \\ -\sin S(t) & \cos S(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Тогда имеем:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos S(t) & \sin S(t) & 0 \\ -\sin S(t) & \cos S(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} \quad (5)$$

Или  $\bar{r} = \Psi \cdot \bar{r}_a$

Связь координат точки  $(x, y, z)$  в ГСК с геодезическими координатами  $(L, B, H)$  задается формулами

$$\begin{aligned} x &= (N + H) \cdot \cos B \cdot \cos L \\ y &= (N + H) \cdot \cos B \cdot \sin L \\ z &= \left( (1 - e_3^2) \cdot N + H \right) \cdot \sin B \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e_3^2 \sin^2 B}}$$

$$e_3^2 = 0.0067385254$$

$a = 6378136_m$  - большая полуось ОЗЭ,  $f = 298,257839303$  - знаменатель коэффициента сжатия.

Обратное преобразование согласно формулам (6) имеет в определенных случаях деление на ноль. Поэтому для обратного преобразования нужно применять специальный алгоритм перехода от геоцентрической системы координат в геодезическую систему координат.

а) вычисляем величину D

$$D = \sqrt{x^2 + y^2}$$

б) если  $D = 0$ , то  $B = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{z}{|z|}$ ,  $L = 0$ ,

$$H = z \cdot \sin B - a \sqrt{1 - e_3^2 \cdot \sin^2 B}$$

*Решение найдено – выход из алгоритма.*

Если  $D > 0$ , то  $L_a = \arcsin\left(\frac{y}{D}\right)$

- 1)  $y < 0$  и  $x > 0$ , то  $L = 2\pi - L_a$ ;
- 2)  $y < 0$  и  $x < 0$ , то  $L = \pi + L_a$ ;
- 3)  $y > 0$  и  $x < 0$ , то  $L = \pi - L_a$ ;
- 4)  $y > 0$  и  $x > 0$ , то  $L = L_a$

с) Анализируем значение  $z$ :

1)  $z = 0$ , то  $B = 0$ ,  $H = D - a$

*Решение найдено – выход из алгоритма.*

2)  $z \neq 0$ , тогда надо найти дополнительные величины

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, c = \arcsin\left(\frac{z}{r}\right), p = \frac{e_3^2 \cdot a}{2 \cdot r}$$

и реализовать итерационный процесс:

$$s_1 = 0, b = c + s_1, s_2 = \arcsin\left(\frac{p \cdot \sin 2b}{\sqrt{1 - e_3^2 \cdot \sin^2 b}}\right)$$

Если  $|s_2 - s_1| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon = 0.0001''$  – заведомо заданная малая положительная величина, то  $B = b$ ,

$$H = D \cdot \cos B + z \cdot \sin B - a \sqrt{1 - e_3^2 \cdot \sin^2 B}$$

*Решение найдено – выход из алгоритма.*

Погрешность нахождения  $H$  по данному алгоритму не превышает 0.003м.

Положения объектов на геодезических картах представляются в геодезических координатах, кроме того, геодезические координаты применяются в теории полета космических аппаратов, в расчетах, связанных с возмущением движения КА. Использование геодезических координат и этот алгоритм позволяет решать задачи, в которых используется оценка взаимного расположения объектов на поверхности Земли и космического аппарата дистанционного зондирования Земли.

#### 4. Рассчитать $\rho_{\text{атм}}(H)$ ;

Плотность атмосферы  $\rho$ , кг/м<sup>3</sup>, вычисляют по формуле

$$\rho = \rho_n K_0 (1 + K_1 + K_2 + K_3 + K_4)$$

где

$$\rho_n = \rho_0 e^{(a_0 + a_1 H + a_2 H^2 + a_3 H^3 + a_4 H^4 + a_5 H^5 + a_6 H^6)}$$

$\rho_n$  - плотность ночной атмосферы, кг/м<sup>3</sup>;

$\rho_0 = 1,58868 \cdot 10^{-8}$  - плотность ночной атмосферы на высоте 120 км, кг/м<sup>3</sup>;

$a_i$  - коэффициенты модели, используемые для расчета плотности атмосферы при различных значениях фиксированного уровня солнечной активности  $F_0$ ;

$K_i$  - нормирующие коэффициенты, учитывающие суточные, полугодовые отклонения плотности атмосферы, учитывающие геомагнитную активность солнца. Будем полагать  $K_0 = 1$ , а остальные  $K_i = 0$ .

Провести расчеты возмущающего ускорения при различных значениях уровня солнечной активности.



Таблица 2 - Коэффициенты модели плотности атмосферы для первого высотного диапазона (120-500 км)

Коэффициент		Значение при фиксированном уровне солнечной активности $F_0$ , $10^{-22}$ Вт/(м <sup>2</sup> · Гц)						
Обозначение	Размерность	75	100	125	150	175	200	250
$a_h$	км	120	120	120	120	120	120	120
$a_0$	-	26,8629	27,4598	28,6395	29,6418	30,1671	29,7578	30,7854
$a_1$	км <sup>-1</sup>	-0,451674	-0,463668	-0,490987	-0,514957	-0,527837	-0,517915	-0,545695
$a_2$	км <sup>-2</sup>	0,00290397	0,002974	0,00320649	0,00341926	0,00353211	0,00342699	0,00370328
$a_3$	км <sup>-3</sup>	-1,06953e-5	-1,0753e-5	-1,1681e-5	-1,25785e-5	-1,30227e-5	-1,24137e-5	-1,37072e-5
$a_4$	км <sup>-4</sup>	2,21598e-8	2,17059e-8	2,36847e-8	2,5727e-8	2,66455e-8	2,48209e-8	2,80614e-8
$a_5$	км <sup>-5</sup>	-2,42941e-11	-2,30249e-11	-2,51809e-11	-2,75874e-11	-2,85432e-11	-2,58413e-11	-3,00184e-11
$a_6$	км <sup>-6</sup>	1,09926e-14	1,00123e-14	1,09536e-14	1,21091e-14	1,25009e-14	1,09383e-14	1,31142e-14

Таблица 3 - Коэффициенты модели плотности атмосферы для второго высотного диапазона (500-1500 км)

Коэффициент		Значение при фиксированном уровне солнечной активности $F_0$ , $10^{-22}$ Вт/(м <sup>2</sup> · Гц)						
Обозначение	Размерность	75	100	125	150	175	200	250
$a_h$	км	500	500	500	500	500	500	500
$a_0$	-	17,8781	-2,54909	-13,9599	-23,3079	-14,7264	-4,912	-5,40952
$a_1$	км <sup>-1</sup>	-0,132025	0,0140064	0,0844951	0,135141	0,0713256	0,0108326	0,00550749
$a_2$	км <sup>-2</sup>	0,000227717	-0,00016946	-0,000328875	-0,000420802	-0,000228015	-8,10546e-5	-3,78851e-5
$a_3$	км <sup>-3</sup>	-2,2543e-7	3,27196e-7	5,05918e-7	5,73717e-7	2,8487e-7	1,15712e-7	2,4808e-8
$a_4$	км <sup>-4</sup>	1,33574e-10	-2,8763e-10	-3,92299e-10	-4,03238e-10	-1,74383e-10	-8,13296e-11	4,92183e-12
$a_5$	км <sup>-5</sup>	-4,50458e-14	1,22625e-13	1,52279e-13	1,42846e-13	5,08071e-14	3,04913e-14	-8,65011e-15
$a_6$	км <sup>-6</sup>	6,72086e-18	-2,05736e-17	-2,35576e-17	-2,01726e-17	-5,34955e-18	-4,94989e-18	1,9849e-18

**5. Согласно формулам (..) найти составляющие возмущающего ускорения, обусловленного влиянием атмосферы,  $S$ ,  $T$ ,  $W$ .**

Таким образом, запишем модули ускорений  $S$ ,  $T$ ,  $W$  на основе соотношения (1)

$$S = -\sigma_x \rho V V_r$$

$$T = -\sigma_x \rho V V_\tau$$

$$W = 0$$

где  $V = \sqrt{V_r^2 + V_\tau^2}$

Ускорение силы притяжения определяется по следующему соотношению в зависимости от текущей высоты полета:

$$g = G \frac{M_3}{(R_3 + H)^2}$$

**6. Построить по полученным результатам графики.**

1. Построить зависимость:
  - составляющих возмущающего ускорения в зависимости от уровня солнечной активности;
  - полной величины возмущающего ускорения в зависимости от уровня солнечной активности.
2. Сравнить величину возмущающего ускорения с величиной ускорения силы притяжения на соответствующей высоте.

**Содержание отчета**

Отчет о выполненной работе должен содержать следующие материалы:

- Формулировку цели работы и исходные данные;
- Полученные в ходе вычислений результаты;
- Анализ результатов работы и выводы.

**Контрольные вопросы**

1. Аэродинамическое воздействие на ИСЗ.
2. Основной возмущающий аэродинамический фактор.
3. Плотность атмосферы.
4. Атмосферные возмущения.
5. Время существования КА на орбите ИСЗ.
6. Критическая орбита.
7. Результат влияния сопротивления атмосферы на движение ИСЗ.
8. Действия возмущений, вызываемых сопротивлением атмосферы Земли.