Programiranje II

Rekurzivne funkcije

Stog (Stack)

- Predstavlja strukturu podataka kod koje se posljednji pohranjeni podatak uzima prvi u obradu
- Može se realizovati statičkom strukturom podataka
- U jednodimenzionalno polje zadane strukture dodaju se ili brišu pojedine stavke po principu Last In First Out (*LIFO*)

- Dodavanje (*push*) i brisanje (*pop*) elemenata s vrha (*top*):
  - Pojedina operacija *dodaj* ili *brisi* zahtijeva jednako vremena bez obzira na broj pohranjenih podataka
  - Slučaj da je stog pun može zahtijevati alociranje dodatne memorije i ponovno izvođenje programa. Prazan stog ne mora značiti grešku

Stog (Stack)

- Uobičajeno je da programi kompajlirani u modernim jezicima visokog nivoa koriste stek pozive kao radnu memoriju svake pozvane funkcije
- Kada se pozove neka funkcija, određeni broj parametara poziva se stavlja na stek. Nakon povratka u pozivajuću funkciju (npr. main), parametri poziva se uklanjaju sa steka
- Kada funkcija poziva drugu funkciju, najprije se njeni argumenti, zatim adresa povratka i konačno prostor za lokalne promjenljive stavljaju na stek poziva. Pošto svaka funkcija radi u sopstvenom *okruženju* ili *kontekstu*, postaje moguće da funkcija pozove samu sebe. Ova mogućnost je veoma korisna - jer se mnogi problemi elegantno specificiraju ili rješavaju na *rekurzivan* način

Rekurzija - osnovni pojmovi

- Funkcija poziva samu sebe
- **recur** (lat. **re** = *nazad;* **currere** = *izvršavati*, desiti se opet, u ponovljenim intervalima)

- Mora postojati završetak (bazni slučaj)
- Neki jezici (npr. Fortran) ne podržavaju rekurziju
- Rekurzivni programi su kraći, ali izvođenje programa je duže
- Koristi se struktura podataka stog (stek) za pohranjivanje rezultata i povratak iz rekurzije
- Mnoge matematičke funkcije se mogu definisati rekurzivno:
  - *Faktorijel*
  - *Fibonacijevi brojevi*
  - *Euklidov NZD (najveći zajednički djelilac)*
  - *Kule Hanoja*
  - ...

Rekurzija - osnovni pojmovi

- Rekurzija je postupak rješavanja zadataka, u kome neka funkcija poziva samu sebe. Tom prilikom se vodi računa da se svaki naredni poziv izvršava za jednostavniji problem od polaznog, a da se najjednostavniji problemi rješavaju direktno, tj. bez dalje upotrebe rekurzije.

- Pri rješavanju zadatka rekurziju je najbolje shvatiti i koristiti na sljedeći način: *potrebno je znati neposredno riješiti najjednostavniji slučaj datog problema, te da se složeniji slučajevi svedu na jednostavnije, tj. da se riješe koristeći jednostavnije slučajeve. Tom prilikom se ne treba brinuti o tome kako će biti riješeni jednostavniji slučajevi na koje se svodi složeni slučaj* (upravo u tom kontekstu rekurzija radi za nas).

Primjer

- U nastavku je prikazan primjer izračunavanja sume kvadrata cijelih brojeva u rasponu od n do m – iteracijom i rekurzijom

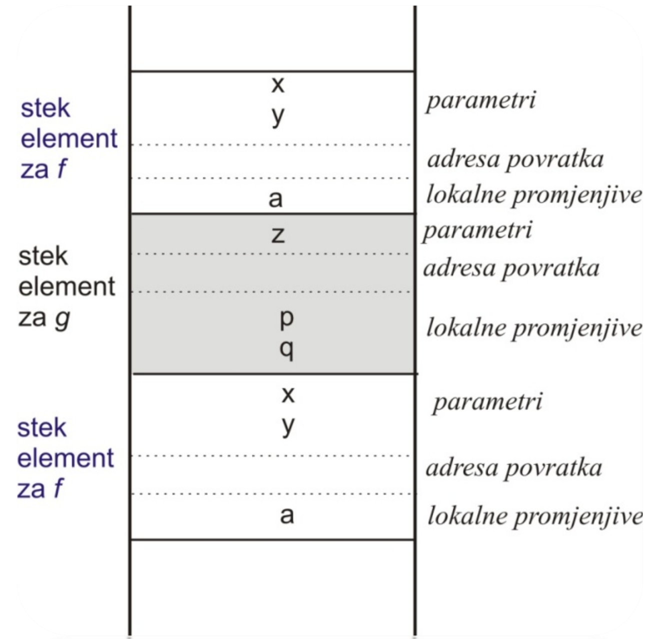
```
//RJESENJE ITERACIJOM
int SumaKvadrata(int m, int n){
    int suma = 0;
    for (int i = m; i <= n; i++)
       suma += i*i;
    return suma;
}
```

```
//RJESENJE REKURZIJOM
int SumaKvadrata(int m, int n){
    if(m > n)
       return 0;
    return m*m + SumaKvadrata(m+1, n);
}
```

Stog (Stack)

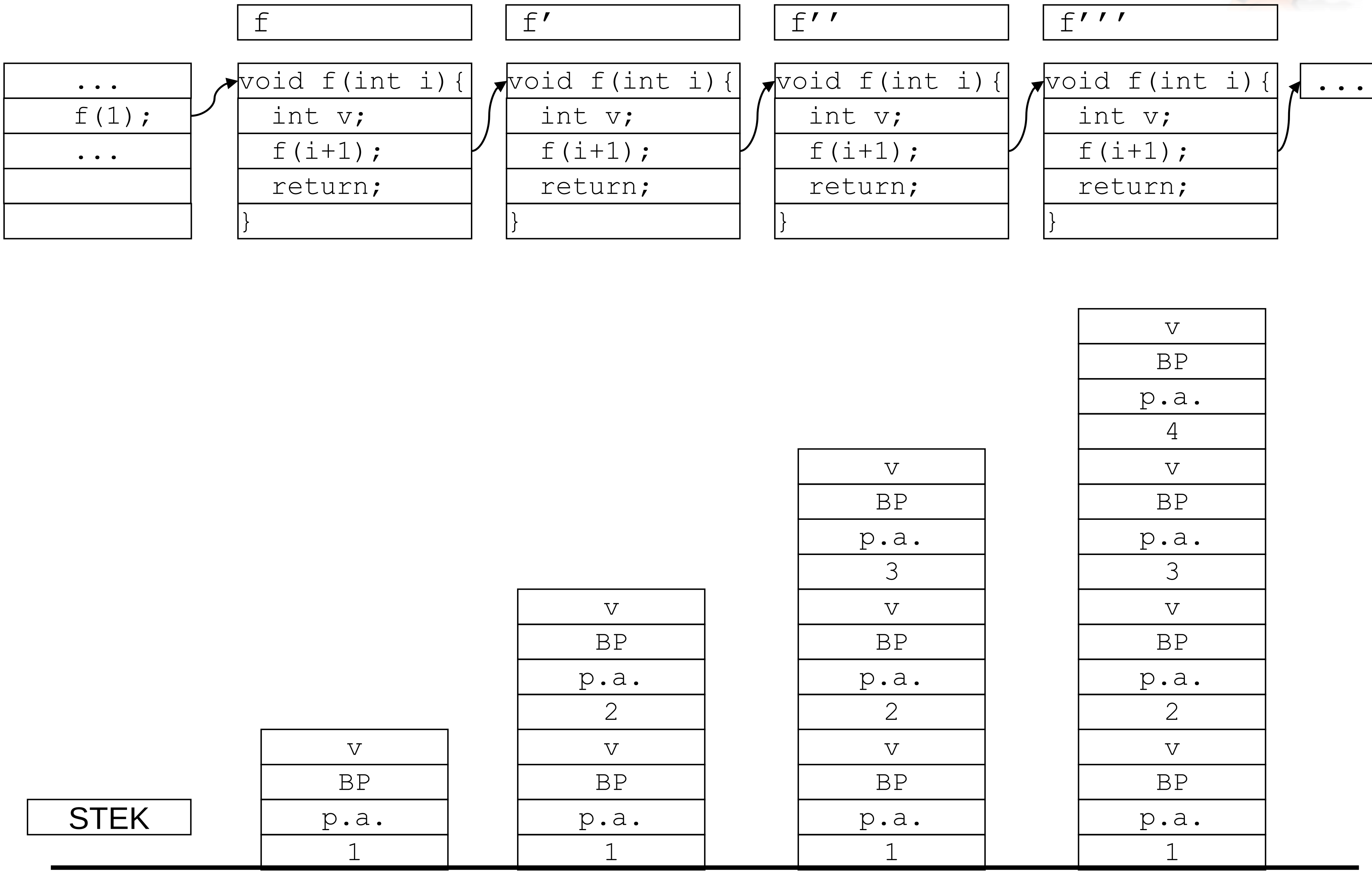
- Stek poziva poslije izvršavanja para uzajamno rekurzivnih funkcija:

```
int f(int x, int y) {
  int a;
  if (uslov_prekida)
       return ...;
  a = .....;
  return g(a);
}
int g(int z) {
    int p,q;
    p = ...;
    q = ...;
    return f(p,q);
}
```



- Vidimo da se čitava okruženja funkcija ***f*** i ***g*** (njihovi parametri i lokalne promjenljive) nalaze na steku poziva. Kada se funkcija ***f*** pozove po drugi put, iz funkcije ***g***, kreira se novi format poziva za poziv funkcije ***f***.

Primjer poziva funkcija na steku



Izračunavanje faktorijela

- Jedan od jednostavnih rekurzivnih algoritama jest izračunavanje *n!* za *n >=* 0.

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$n! = n * (n-1)!$$

```
Primjer: 4!
k = fakt (4);
   = 4 * fakt (3);
        = 3 * fakt (2);
            = 2 * fakt (1);
                = 1
```

```
int Faktorijel(int n){
    if(n<=1)
        return 1;
    return n * Faktorijel(n-1);
}
```

Izračunavanje faktorijela

$5! = 5 \times 4! = 5 \times 24 = 120$

$4! = 4 \times 3! = 4 \times 6 = 24$

$3! = 3 \times 2! = 3 \times 2 = 6$

$2! = 2 \times 1! = 2 \times 1 = 2$

$1! = 1 \times 0! = 1 \times 1 = 1$

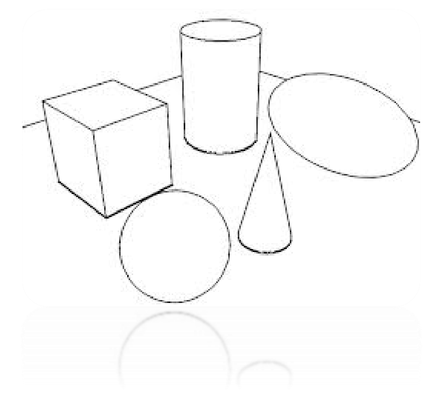
$0! = 1$

Fibonacci niz

- Malo geometrije >>>
  - Nacrtati kvadrat veličine 1.
  - Rotirati za 90 stepeni i dodati novi kvadrat veličine 1.
  - Rotirati, ponovo, za 90 stepeni i dodati kvadrat veličine 2.
  - Ponovo rotirati i dodati kvadrat veličine 3, itd.
  - ...
  - Prethodne akcije nastaviti prateći niz u kome je naredni član niza jednak zbiru dva prethodna člana:

    1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, . . . ,

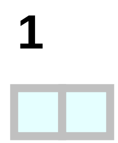
  - Šta smo dobili?



Fibonacci niz

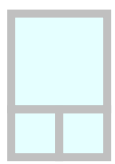
1

Fibonacci niz

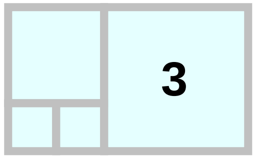


Fibonacci niz

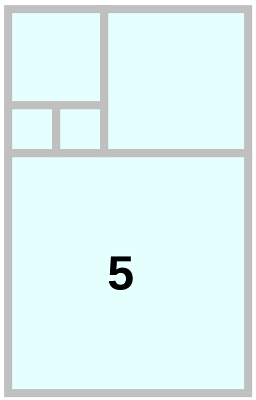
2



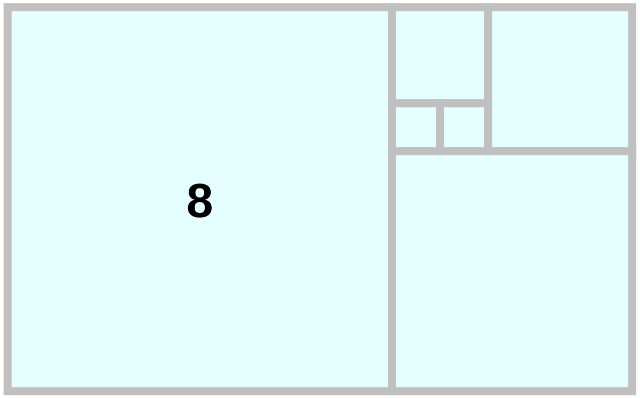
Fibonacci niz



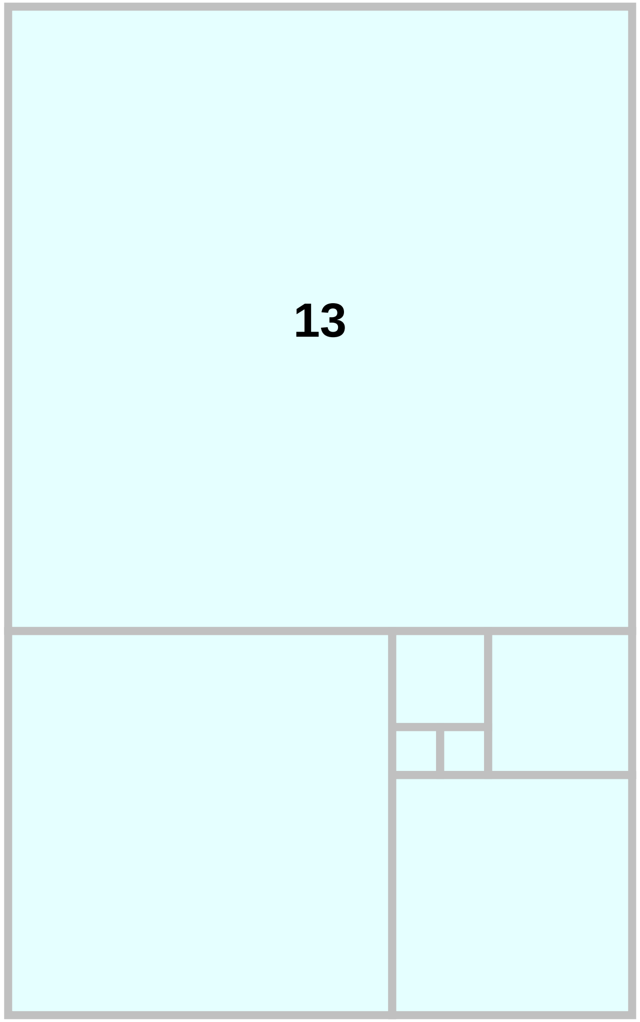
Fibonacci niz



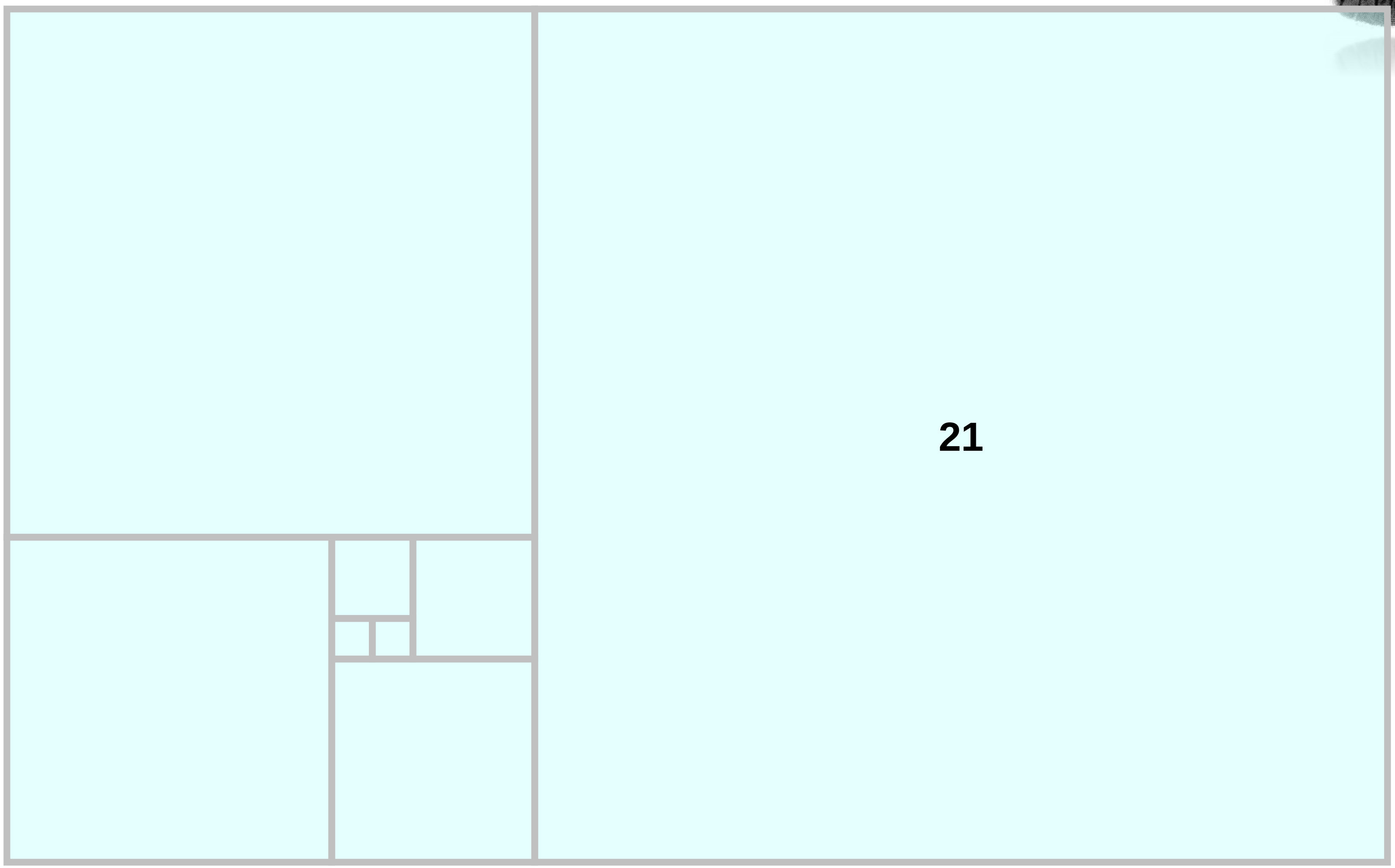
Fibonacci niz



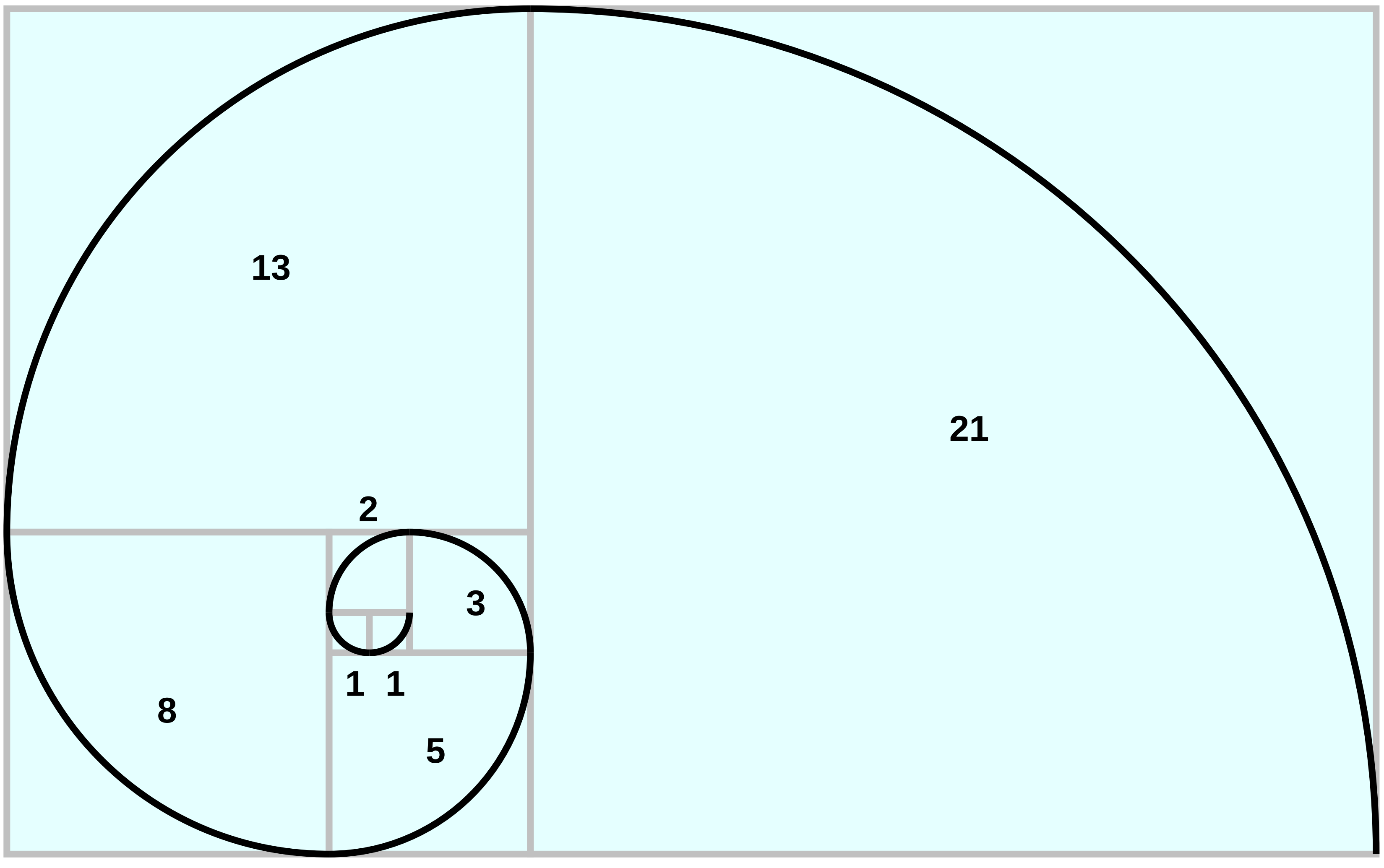
Fibonacci niz



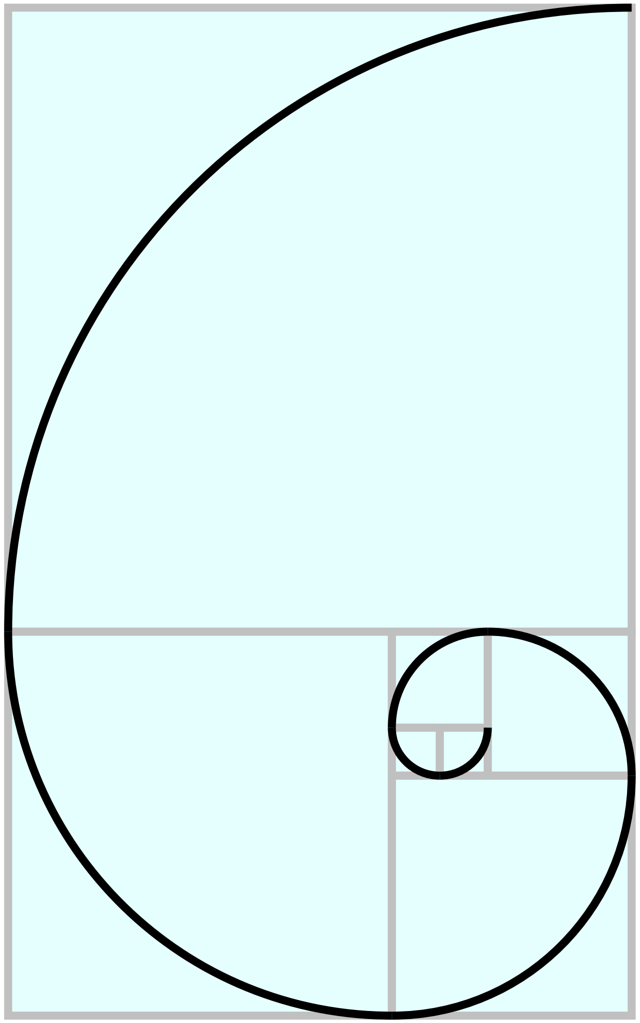
Fibonacci niz



Fibonacci niz

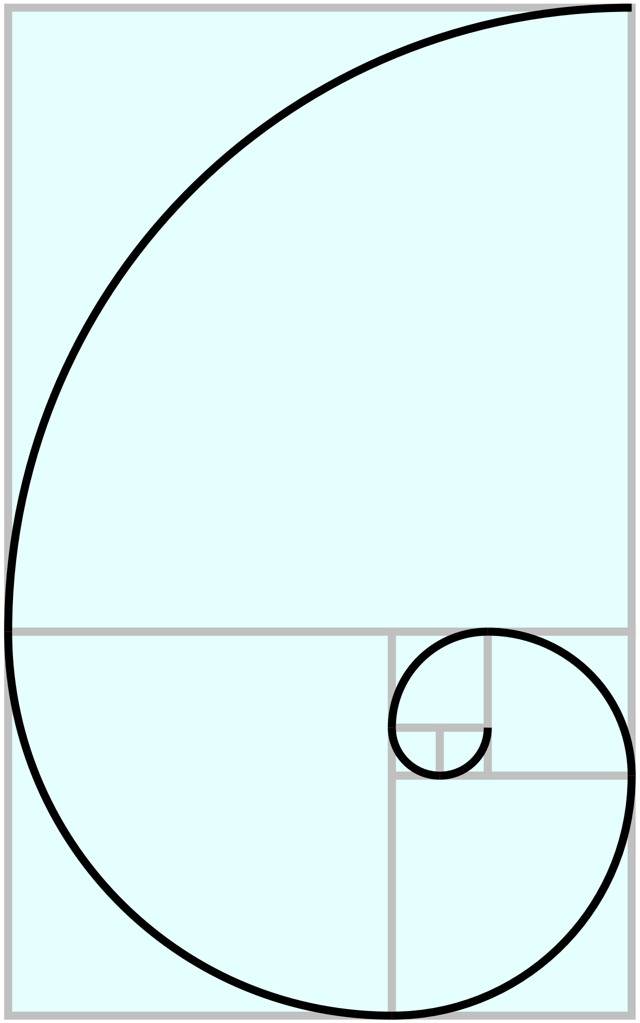


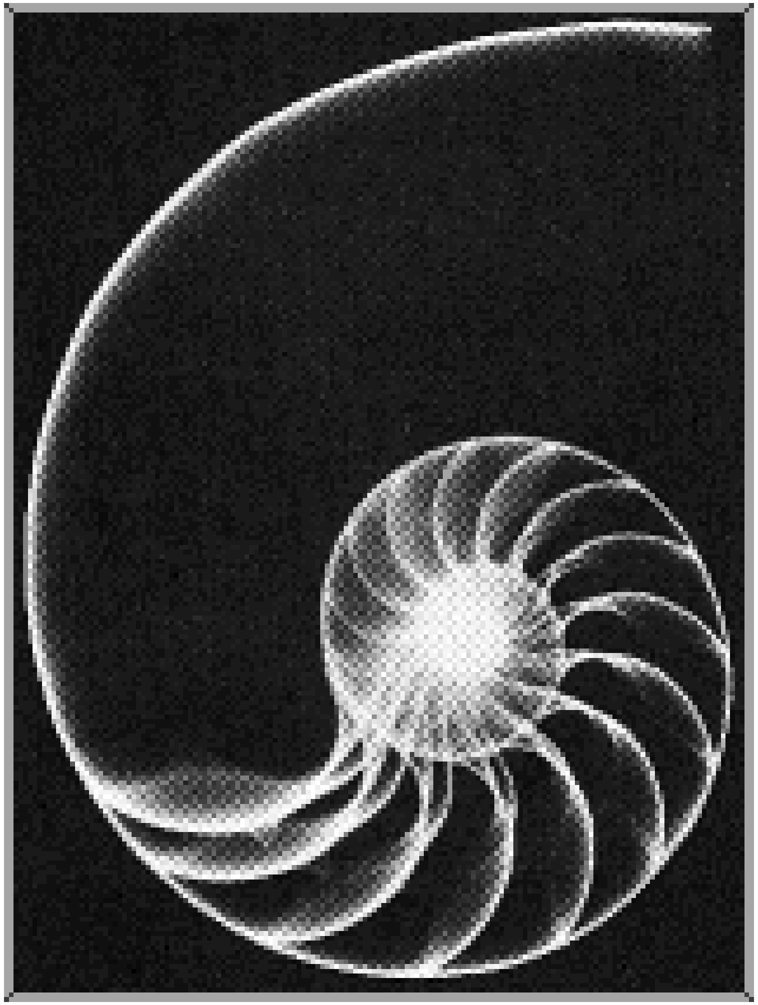
Fibonacci niz



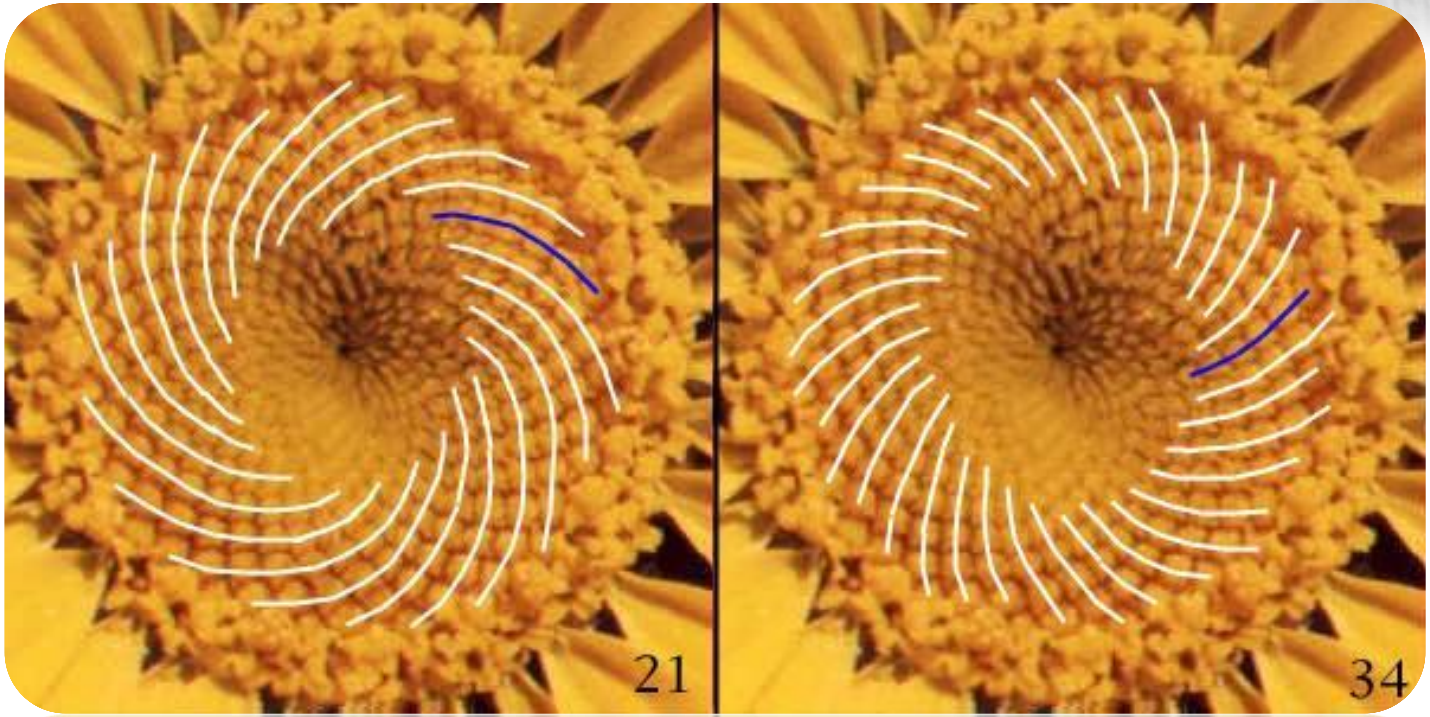
Da li ste ovaj oblik negdje već vidjeli?

Fibonacci niz





Fibonacci niz



Fibonacci niz - formula

- Da li je na osnovu datog niza:

  1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... ,

  moguće napisati formulu za bilo koji ***n***?

$$Fib(n) = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^n - \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^n$$

$$Fib(n) = Fib(n-1) + Fib(n-2)$$
$$Fib(0) = 0;$$
$$Fib(1) = 1;$$

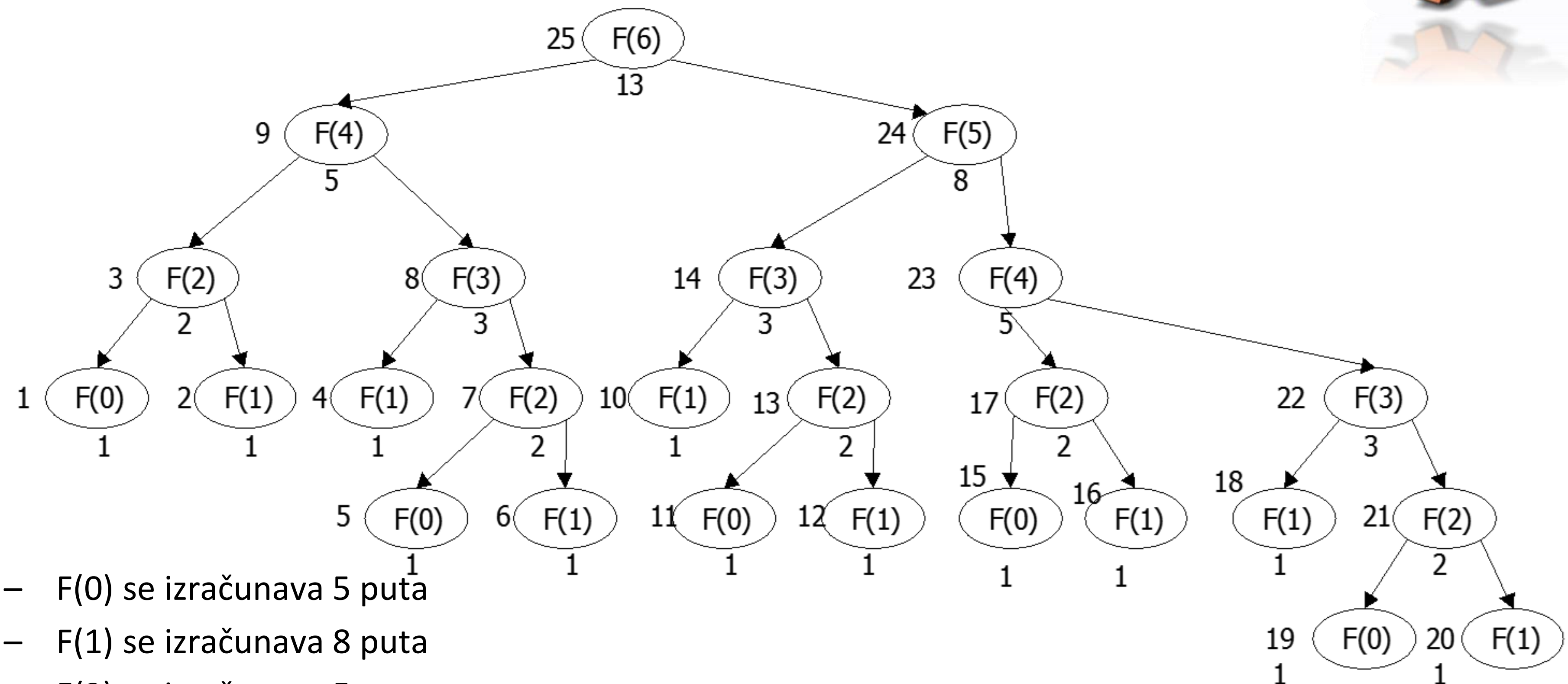
Fibonacci niz - primjer

$$Fib(n) = Fib(n-1) + Fib(n-2)$$
$$Fib(0) = 0;$$
$$Fib(1) = 1;$$

```
int Fibonacci (int n) {
    if (n <= 1)
        return 1;
    return Fibonacci(n-1) + Fibonacci(n-2);
}

void main(){
    int brojClanova = 0;
    cout<<"Koliko clanova niza zelite: ";
    cin>>brojClanova;
    cout<<"Fibonacci niz ->  ";
    for (int i = 0; i < brojClanova; i++)
        cout<<Fibonacci(i)<<", ";
    cout<<endl;
}
```

Fibonacci niz - primjer



- F(0) se izračunava 5 puta
- F(1) se izračunava 8 puta
- F(2) se izračunava 5 puta
- F(3) se izračunava 3 puta
- F(4) se izračunava 2 puta
- F(5) se izračunava 1 puta
- F(6) se izračunava 1 puta
- Ukupno izračunavanja za F(6): 25

Rekurzija

- Nekoliko napomena vezanih za rekurziju:
  - ✓ Rekurzija postoji svuda u prirodi
  - ✓ Za svaki problem i ne postoji formula, ali većina problema može biti predstavljena kao serija malih ponovljenih koraka
  - ✓ Svaki korak u rekurzivnom procesu treba da bude mali i jednostavan (izračunljiv)
  - ✓ Apsolutno je neophodan uslov koji završava proces (bazni slučaj)
  - ✓ Tipični primjeri korištenja rekurzije su izračunavanje faktorijela i članova Fibonacci niz
  - ✓ Mnoge formule i definicije su same po sebi rekurzivne, to treba iskoristiti!
  - ✓ Rekurzija je dobra za izradu algoritama za rekurzivno definisane strukture podataka kao što su binarna stabla. Mnogo lakše i pogodnije od iteracije!
  - ✓ Rekurzija je idealna za svaki “divide & conquer” algoritam

Funkcija `pow(x,y)`

- Koristeći rekurziju napisati funkciju koja će simulirati rad funkcije pow.

$$Pow(x,y) = x^y$$

$$x^1 = x$$

$$x^0 = 1$$

```
double pow(double vrijednost, int eksponent){
    if (eksponent == 0)
          return 1;
    else if (eksponent == 1)
          return vrijednost;
    else
          return vrijednost * pow (vrijednost, eksponent - 1);
}
```

Kule Hanoja (The Towers of Hanoi)

- Osnovna pravila:
  - Kada se disk premješta postavlja se na jedan od stubova
  - Može se premještati samo po jedan disk i on mora biti na vrhu diskova na stubovima
  - Veći disk ne može biti postavljen na manji

- *Legenda kaže da kada svećenici premjeste 64 diska nastupa kraj svijeta*

Kule Hanoja (The Towers of Hanoi)

- Moguće rekurzivno rješenje za problem Kula Hanoja

```
void HanoiKule(int brojDiskova, char start, char pomocni,
               char destinacija)
{
    if (brojDiskova == 0)
        return;
    HanoiKule(brojDiskova - 1, start, destinacija, pomocni);
    cout<<"Disk sa tornja "<<start<<" na toranj "<<destinacija<<endl;
    HanoiKule(brojDiskova - 1, pomocni, start, destinacija);
}
void main(){
        HanoiKule(6, 'A', 'C', 'B');
}
```

- Program proširiti na način da **onemogući** izvršenje za 64 diska

Najveći zajednički djelilac (nzd)

- Jedan od najstarijih algoritama je Euklidov postupak za pronalaženje najvećeg zajedničkog djelioca (nzd) dva pozitivna cijela broja, npr.:

nzd(22,8)=nzd(8,6)=nzd(6,2)=nzd(2,0)=**2**
nzd(21,13)=nzd(13,8)=nzd(8,5)=nzd(5,3)=nzd(3,2)=nzd(2,1)=nzd(1,0)=**1**
nzd(21,0)=**21**
nzd(0,21)=nzd(21,0) = **21**

```
int nzd (int a, int b) {
    if(b == 0)
        return a;
    return nzd (b, a % b);
}
```

Prednosti i nedostaci rekurzije

- Prednosti:
  - koncizniji opis algoritma
  - lakše je dokazati korektnost
- Nedostaci:
  - uvećano vrijeme izvođenja
  - neki jezici ne podržavaju rekurziju

KRAJ PREZENTACIJE