

একটি গ্রাফ থেকে কয়েকটি নোড আর এজ নিয়ে নতুন একটি গ্রাফ তৈরি করা হলে সেটাকে বলা হয় **সাবগ্রাফ**। স্প্যানিং ট্রি হলো এমন একটি সাবগ্রাফ যেটায়:

* **মূল গ্রাফের সবগুলো নোড আছে।**

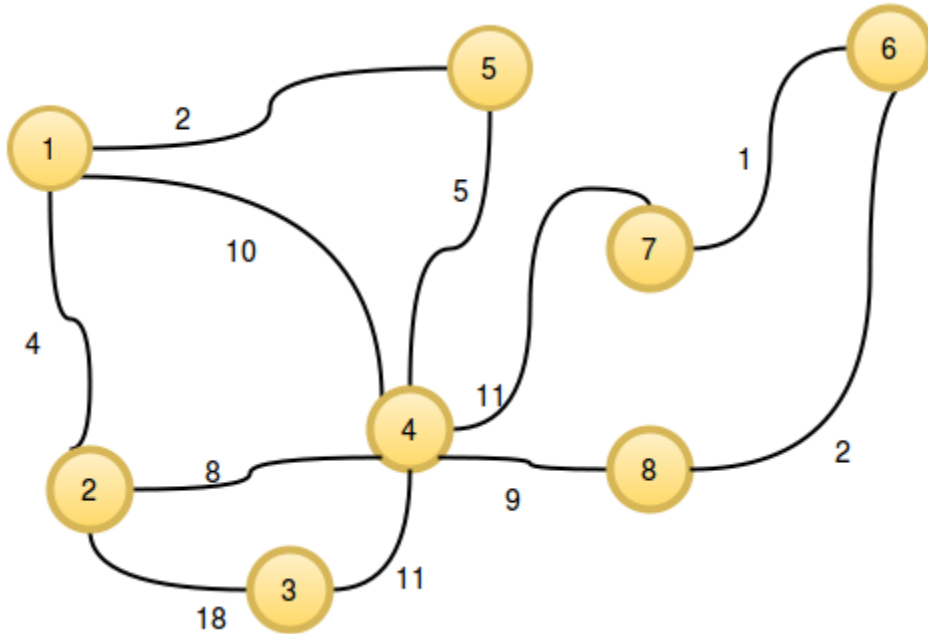
* **সাবগ্রাফটি একটি ট্রি। ট্রিতে কখনো সাইকেল থাকেনা, এজ থাকে $n-1$ টি যেখানে n হলো নোড সংখ্যা।**

একটি গ্রাফের অনেকগুলো স্প্যানিং ট্রি থাকতে পারে, যে ট্রি এর এজ গুলোর কস্ট/ওয়েট এর যোগফল সব থেকে কম সেটাই মিনিমাম স্প্যানিং ট্রি। আমরা এই লেখায় প্রিম অ্যালগোরিদমের সাহায্যে মিনিমাম স্প্যানিং ট্রি বের করা শিখবো।

মনে করি নিচের গ্রাফের প্রতিটি নোড হলো একটি করে বাড়ি। আমাদের বাড়িগুলোর মধ্যে টেলিফোন লাইন বসাতে হবে। আমরা চাই সবথেকে কম খরচে লাইন বসাতে। এজ গুলোর ওয়েট লাইন বসানোর খরচ নির্দেশ করে:

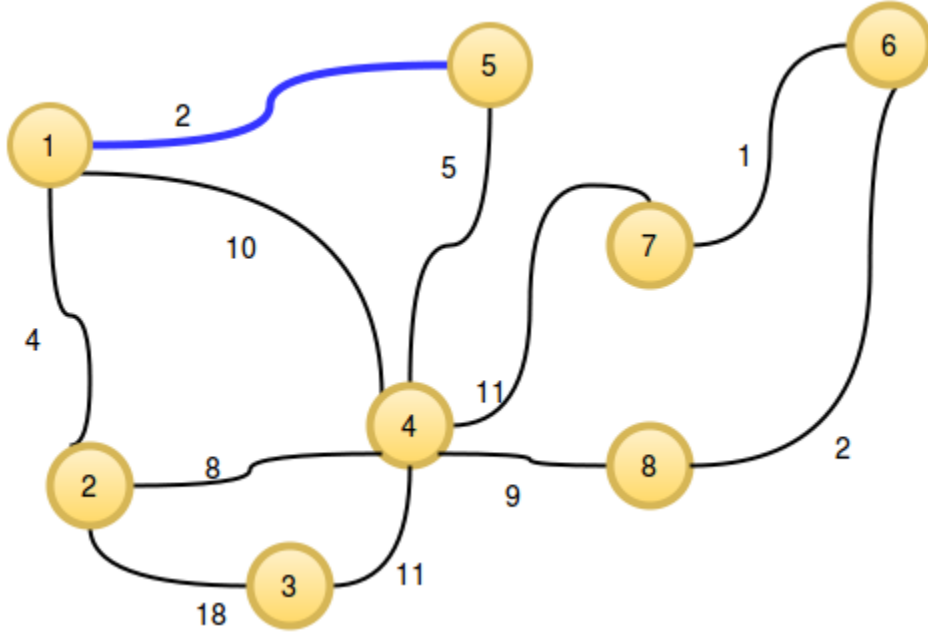
আমরা অনেক ভাবে লাইন বসাতে পারতাম। ছবিতে লাল এজ দিয়ে টেলিফোন লাইন বসানোর একটি উপায় দেখানো হয়েছে। টেলিফোন লাইনগুলো একটি সাবগ্রাফ তৈরি করেছে যেটায় অবশ্যই $n-1$ টি এজ আছে, কোনো সাইকেল নেই কারণ অতিরিক্ত এজ বসালে আমাদের খরচ বাড়বে, কোনো লাভ হবেনা। মিনিমাম স্প্যানিং ট্রি বের করার সময় আমরা এমন ভাবে এজগুলো নিবো যেন তাদের এজ এর যোগফল মিনিমাইজ হয়।

এখন নিচের গ্রাফ থেকে কিভাবে আমরা মিনিমাম স্প্যানিং ট্রি বের করব?

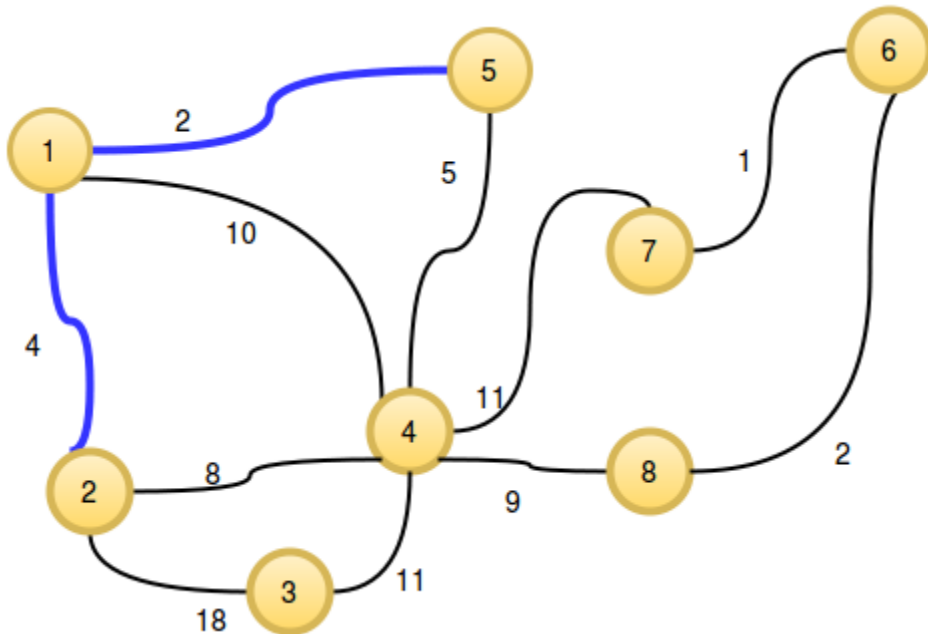


গ্রিডি(greedy) অ্যাপ্রোচে খুব সহজে মিনিমাম স্প্যানিং ট্রি বের করা যায়। আমরা এখন প্রিমস অ্যালগোরিদম কিভাবে কাজ করে দেখব। তুমি যদি আগে ক্রসকাল শিখতে চাও তাহলেও সমস্যা নেই, সরাসরি পরের পর্বে চলে যেতে পারো।

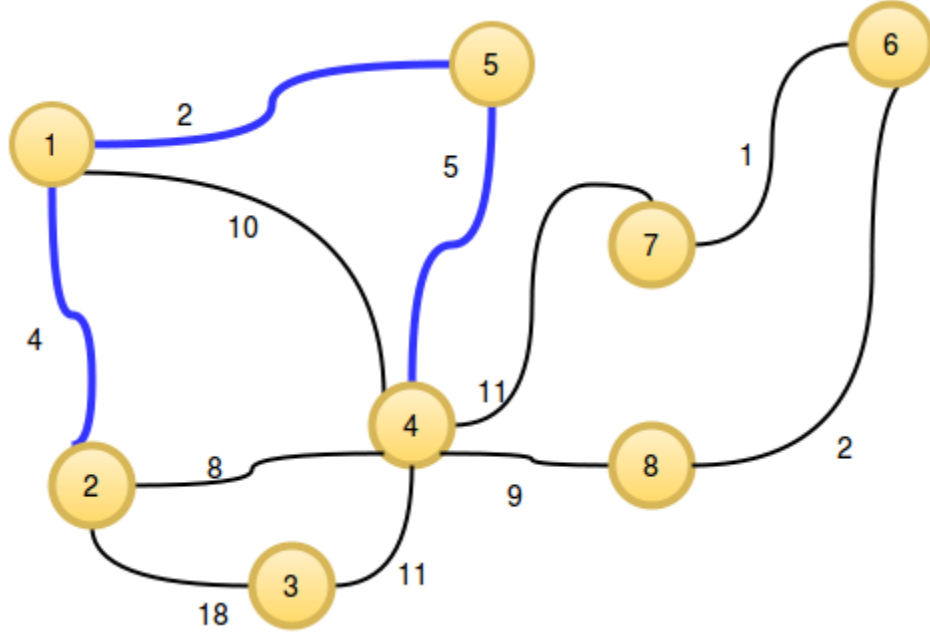
আমরা প্রথমে যেকোনো একটি সোর্স নোড নিব। ধরি সোর্স হলো ১। ১ থেকে যতগুলো এজ আছে সেগুলোর মিনিমাম টিকে আমরা সাবগ্রাফে যোগ করব। নিচের ছবিতে নীল এজ দিয়ে বুঝানো হচ্ছে এজটি সাবগ্রাফে যুক্ত করা হয়েছে:



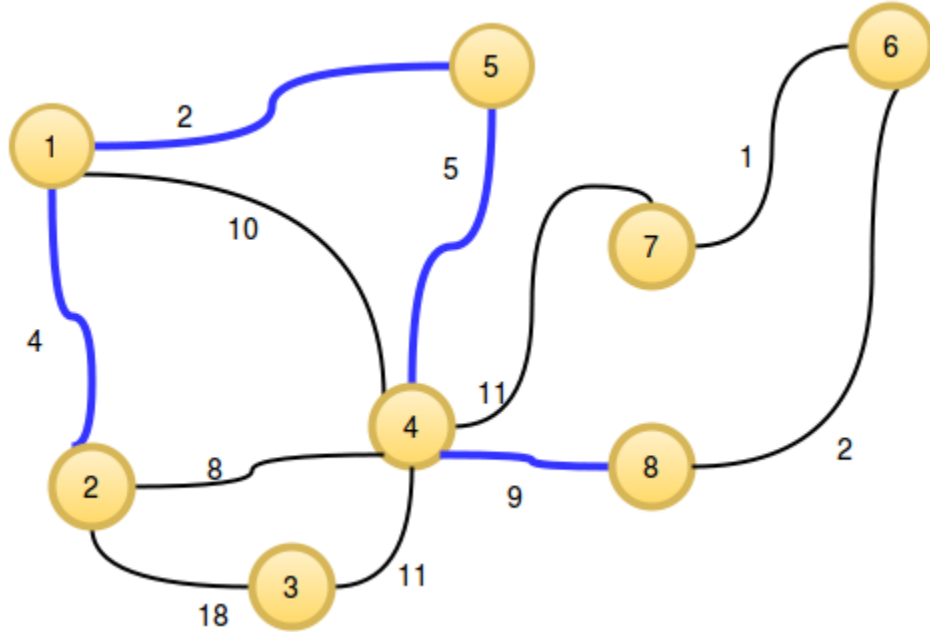
এবার সোর্স ১ এবং ৫ নম্বর নোড থেকে মোট যত এজ আছে(আগের এজগুলো সহ) তাদের মধ্যে মিনিমাম টি নিব:



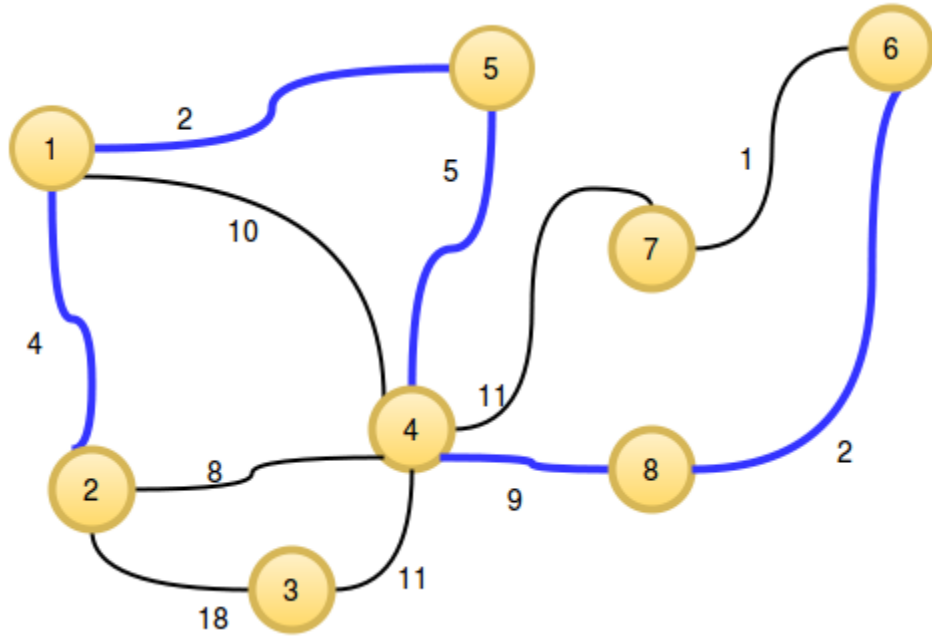
এবার নিব ১, ২ এবং ৫ নম্বর নোড থেকে মোট যত এজ আছে(আগের এজগুলো সহ) তাদের মধ্যে মিনিমাম:



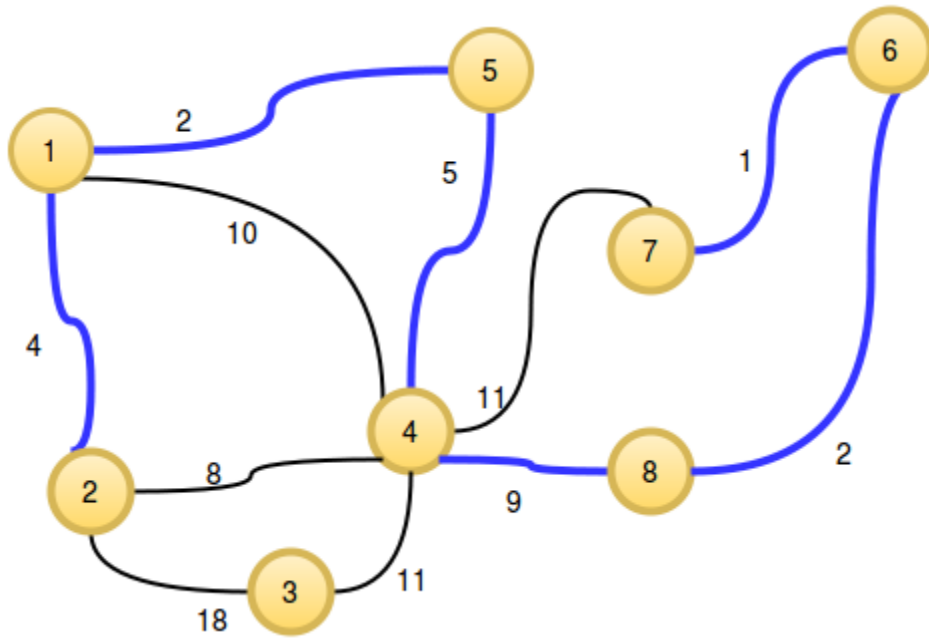
পরের ধাপটি গুরুত্বপূর্ণ। ১,২,৫,৪ থেকে যত এজ আছে তাদের মধ্য মিনিমাম হলো ২-৪, কিন্তু ২ নম্বর নোড এবং ৪ নম্বর নোড দুইটাই অলরেডি সাবগ্রাফের অংশ,তারা আগে থেকেই কানেক্টেড,এদের যোগ করলে সাবগ্রাফে সাইকেল তৈরি হবে,তাই ২-৪ এজটি নিয়ে আমাদের কোনো লাভ হবেনা। আমরা এমন প্রতিবার এজ নিব যেন নতুন আরেকটি নোড সাবগ্রাফে যুক্ত হয়। তাহলে ৪-৮ হবে আমাদের পরের চয়েস।



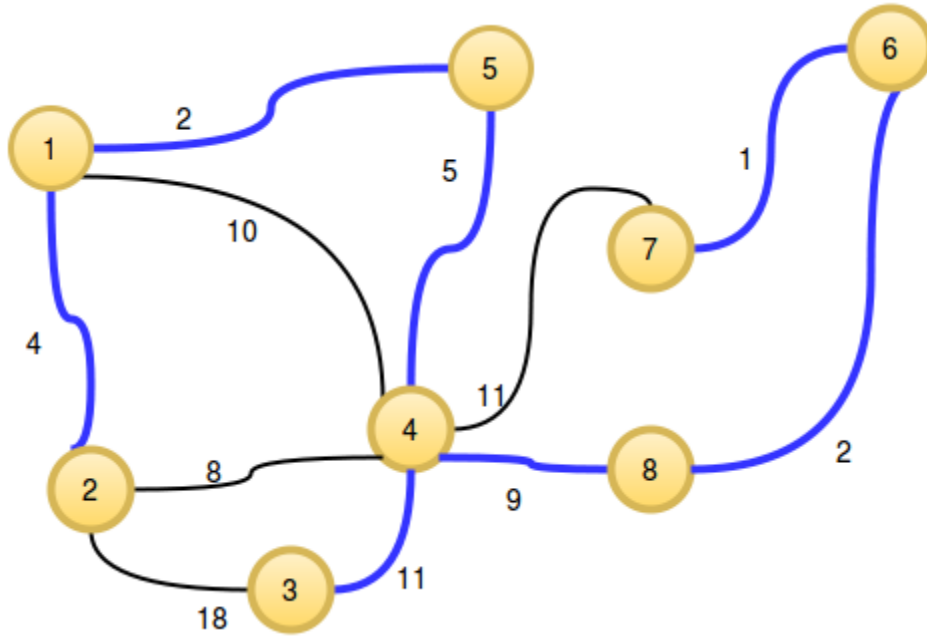
এরপর ৮-৬ যোগ করবো:



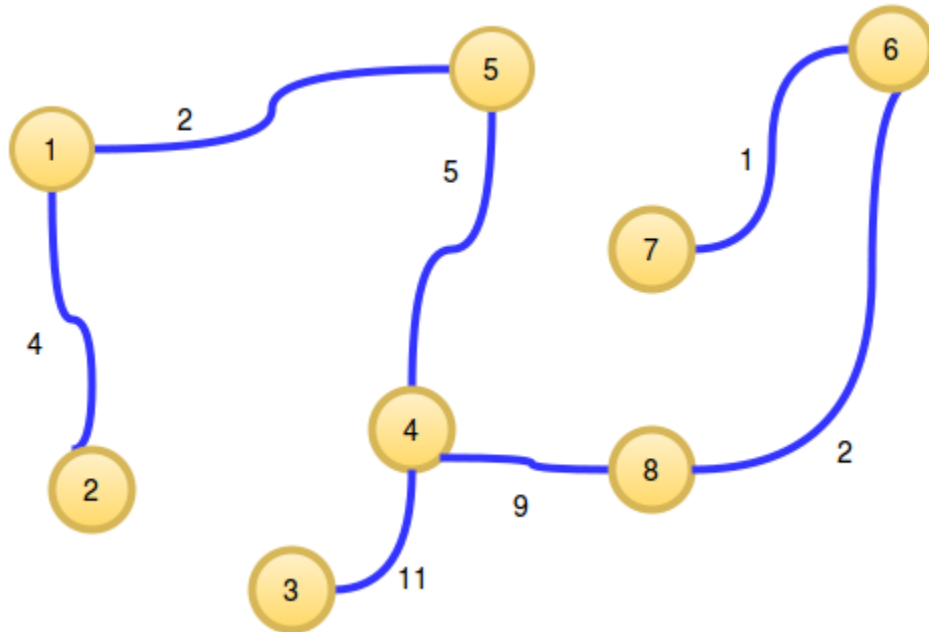
এরপর ৬-৭:



সবশেষে ৪-৩ যোগ করবো:

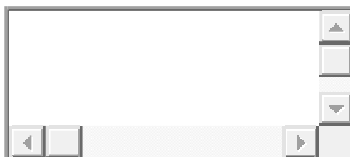


নীলরং এর এই সাবগ্রাফটাই আমাদের মিনিমাম স্প্যানিং ট্রি। বাকি এজগুলো মুছে দিলে থাকে:



তাহলে টেলিফোন লাইন বসাতো মোট খরচ: $৪ + ২ + ৫ + ১১ + ৯ + ২ + ১ = ৩৪$ । একটি গ্রাফে এক বা একাধিক মিনিমাম স্প্যানিং ট্রি থাকতে পারে।

আমাদের সুডোকোড হবে এরকম:



- 1 * Input: A non-empty connected weighted graph with vertices V and edges E (the weights can be negative).
- 2 * Initialize: $V_{new} = \{x\}$, where x is an arbitrary node (starting point) from V , $E_{new} = \{\}$
- 3 * Repeat until $V_{new} = V$:
- 4 o Choose an edge (u, v) with minimal weight such that u is in V_{new} and v is not
- 5 (if there are multiple edges with the same weight, any of them may be picked)
- 6 o Add v to V_{new} , and (u, v) to E_{new}
- 7 * Output: V_{new} and E_{new} describe a minimal spanning tree

এখন মাথায় প্রশ্ন আসতে পারে কি ভাবে প্রিমস অ্যালগোরিদম ইম্প্লিমেন্ট করব? বারবার লুপ চালিয়ে নেইভ অ্যাপ্রোচে কোড লিখলে তোমার কোড টাইম লিমিটের মধ্যে রান না করার সম্ভাবনাই বেশি।

রানটাইম কমাতে প্রায়োরিটি কিউ ব্যবহার করতে পারো। যখন নতুন একটা নোড V_{new} তে যোগ করছো তখন সেই নোডের অ্যাডজেসেন্ট সবগুলো এজ প্রায়োরিটি কিউতে ঢুকিয়ে রাখতে হবে। এখন প্রায়োরিটি কিউ থেকে সবথেকে মিনিমাম ওয়েটের এজটা লগারিদম কমপ্লেক্সিটিতে খুঁজতে পারবে। মোট কমপ্লেক্সিটি হবে $O(E \log E) O(E \log E)$ । তবে এজের বদলে কিউতে নোড পুশ করে $O(E \log V) O(E \log V)$ তে কমপ্লেক্সিটি নামিয়ে আনা যায়, সেটা কিভাবে করা যায় চিন্তা করে বের করো।

অ্যালগোরিদমটা ইম্প্লিমেন্ট করার পর অবশ্যই নিচের সমস্যা গুলো সমাধানের চেষ্টা করবে।

<http://uva.onlinejudge.org/external/5/544.html> (Straight forward)

<http://uva.onlinejudge.org/external/9/908.html>

<http://uva.onlinejudge.org/external/100/10034.html> (Straight forward)

<http://uva.onlinejudge.org/external/112/11228.html>

<http://uva.onlinejudge.org/external/104/10462.html> (2nd best mst)

spoj:

<http://www.spoj.pl/problems/MST/> (Straight forward)

মিনিমাম স্প্যানিং ট্রি বের করার জন্য আরেকটি অ্যালগোরিদম আছে যা করুসকাল অ্যালগোরিদম নামে পরিচিত। পরের পর্বে আমরা সেটা শিখবো।