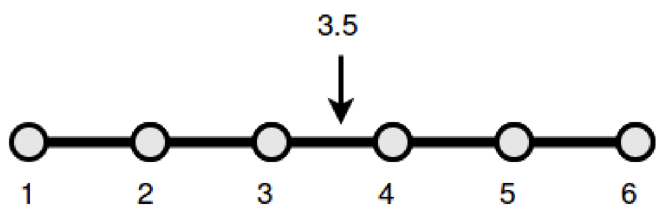
মনে করো তুমি লুডু খেলতে গিয়ে একটা ডাইস বা ছক্কা নিয়ে রোল করছো। এখন তোমার যেকোনো একটা সংখ্যা পাবার প্রোবাবিলিটি কত? বেসিক প্রোবাবিলিটি যদি জেনে থাকো তাহলে তুমি সহজেই বলতে পারবে যে উত্তরটা হলো 1616। প্রোবালিটি 1616 এর মানেটা কী এখানে? এর মানে হলো, তুমি যদি ছক্কাটা নিয়ে অসীম সংখ্যকব বার খেলতে থাকো তাহলে ছয় ভাগের এক ভাগ বার তুমি 11 পাবে, অন্য আরেকভাগ বার তুমি 22 পাবে, অন্য আরেকভাগ বার তুমি 33 পাবে ইত্যাদি। যেমন তুমি 600600 বার খেললে, 11 থেকে 66 পর্যন্ত প্রতিটা সংখ্যা 100100 বার করে পাবে। এটাতো গেলে গাণিতিক হিসাব, বাস্তবে 600600 বার খেলতে গেলে দেখা যাবে প্রতিটা 100100 বার না পেয়ে হয়তো কিছুটা কমবেশি হবে। কিন্তু তুমি যত বেশিবার খেলবে তত সংখ্যাগুলো 66 ভাগের 11 ভাগের খুব কাছাকাছি চলে আসবে, অসীমবার খেললে আমরা ধরে নিতে পারি যে প্রতিটা সংখ্যা সমান সংখ্যকবার করে পাবে কারণ প্রতিটা সংখ্যা আসার প্রোবাবিলিটি একই। এখন প্রশ্ন হলো, ছক্কা দিয়ে যদি আমরা অসীমসংখ্যক বার খেলি তাহলে যে সংখ্যাগুলো পাবো তার গড় মান কত? এটাকেই বলে এক্সপেক্টেড ভ্যালু। কোনো একটা এক্সপেরিমেন্ট অসীম সংখ্যক বার করা হলে গড়ে যে ফলাফলটা পাওয়া যায় সেটার নামই এক্সপেক্টেড ভ্যালু। একটা ছক্কার সবগুলো সংখ্যার যোগফল হলো 1+2+3+4+5+6=211+2+3+4+5+6=21 এবং যেকোনো সংখ্যা পাবার প্রোবাবিলিটি 1616। এক্সপেক্টেড ভ্যালু বের করতে হলে সরাসরি সব সংখ্যা যোগ না করে প্রতিটা সংখ্যা সাথে সেই সংখ্যা পাবার প্রোবাবিলিটি গুণ করে দিতে হবে। এই ক্ষেত্রে এক্সপেক্টেড ভ্যালু হবে 1⋅16+2⋅16+3⋅16+4⋅16+5⋅16+6⋅16=16(1+2+3+4+5+6)=3.51⋅16+2⋅16+3⋅16+4⋅16+5⋅16+6⋅16=16(1+2+3+4+5+6)=3.5। তারমানে তুমি অসীম সংখ্যকবার খেললে গড়ে প্রতিবার তুমি 3.53.5 পাবে। এখানে লক্ষ্য করার মতো ব্যাপার হলো, আমাদের ছক্কায় 3.53.5 কোথায় লেখা নেই, এটা হলো অসীম সংখ্যক বার এক্সপেরিমেন্ট করে প্রাপ্ত গড় মান।
তুমি যদি গণিত বাদ দিয়ে নিজের মত করে ভাবো তাহলেও ব্যাপারটা সহজেই বুঝতে পারবে, 3.53.5 হলো 11 থেকে 66 এর ঠিক মাঝের সংখ্যা, যেকোনো সংখ্যা পাবার প্রোবাবিলিটি যখন সমান, অসীমবার খেললে গড়ে মাঝখানের সংখ্যাটা পাওয়াইতো স্বাভাবিক।



এখন মনে করো কোনো কারণে ছক্কার কিছু পাশ ভারী, কিছু পাশ হালকা, তাই প্রতিটা সংখ্যা পাবার প্রোবাবিলিটি একই না। প্রতিবার ছুড়ে মারলে x পাবার প্রোবাবিলিটি হলো p(x)p(x) এবং অবশ্যই p(1)+p(2)+…+p(6)=1p(1)+p(2)+…+p(6)=1। তাহলে এক্সপেক্টেড ভ্যালু কত হবে? খুবই সহজ, আগের বার প্রতিটা সংখ্যার সাথে 1616 গুণ করেছো, এবার x এর সাথে গুণ করবে p(x)p(x)। এক্সপেক্টেড ভ্যালু তাহলে হবে E=p(1)∗1+p(2)∗2+…+p(6)∗6E=p(1)∗1+p(2)∗2+…+p(6)∗6।
আমরা একটা সাধারণ ফর্মূলা বের করার চেষ্টা করছি যা সবসময় কাজে লাগবে। যদি ছক্কায় ৬টি পাশ না থেকে nn টা পাশ থাকে তাহলে কি হবে? তাহলে ছক্কা শব্দটা ব্যবহার করা যাবে না, ডাইস বলতে হবে! তবে এক্সপেকটেড ভ্যালুর ফর্মূলায় তেমন পরিবর্তন আসবে না, এখন আমরা যোগ করবো nn টা টার্ম। E=p(1)∗1+p(2)∗2+…+p(n)∗n=∑ni=1p(i)⋅iE=p(1)∗1+p(2)∗2+…+p(n)∗n=∑i=1np(i)⋅i।

আমরা আরো জেনারেলাইজেশন করতে পারি, আমরা এতক্ষণ ধরেছি nn টা পাশে 11 থেকে nn পর্যন্ত প্রতিটা সংখ্যা একবার করে আছে। এখন আমরা ধরো ডাইসের ii তম সাইডে যে সংখ্যা লেখা আছে সেটা হলো $x(i)x(i)$ এবং ডাইস ছুড়ে মারলে ii তম সাইডটা পাবার প্রোবাবিলিটি আগের মতোই $p(i)p(i)$। এখন ফর্মুলাটা হবে $E=p(1)*x(1)+p(2)*x(2)+\ldots+p(n)*x(1)=\sum_{i=1}^{n}p(i)\cdot x(i)E=p(1)*x(1)+p(2)*x(2)+\ldots+p(n)*x(1)=\sum i=1np(i)\cdot x(i)$। সহজভাবে বলতে গেলে প্রতিটা ii এর জন্য আমরা ii তম সাইডে যে সংখ্যাটা লেখা আছে সেটাকে ii তম সাইড পাবার প্রোবাবিলিটি দিয়ে গুণ করছি এবং সবগুলো গুণফল যোগ করে দিচ্ছি।

তুমি যখন গণিতের উপর কোনো একাডেমিক বই পড়বে তখন দেখবে এক্সপেক্টেড ভ্যালুর সংজ্ঞায় উপরের ফর্মূলাটাই দেয়া আছে, সাথে Random Variable নিয়ে কিছু কথাবার্তা আছে। আমাদের উদাহরণে random variable হলো ডাইসের গায়ে লেখা সংখ্যা যেটার মান হবে পারে $x(1),x(2),\ldots,x(n)x(1),x(2),\ldots,x(n)$। শুধু ডাইস না, যেকোনো এক্সপেরিমেন্টের ক্ষেত্রেই তুমি উপরের ফর্মূলা কাজে লাগাতে পারবে।

আমরা এতক্ষণ যা শিখলাম সেটা দিয়ে কয়েকটি সমস্যা সমাধান করে ফেলি।

সমস্যা ১:

ধরো তোমার কাছে একটা কয়েন আছে, এই কয়েনেরও এক পাশ একটু ভারী, কয়েনটা একবার টস করলে হেড পাবার প্রোবাবিলিটি $0.40.4$ এবং টেইল পাবার প্রোবাবিলিটি $1-0.4=0.61-0.4=0.6$। তুমি কয়েনটা টস করছো যতক্ষণ না পর্যন্ত হেড পাও। হেড পাবার জন্য গড়ে (এক্সপেক্টেড) তোমার কয়বার কয়েন টস করা লাগবে?

মনে করো যে গড়ে EE বার কয়েন টস করলে তুমি হেড পাবে। এখানে মনে রাখতে হবে, প্রতিটা কয়েন টস একটা স্বাধীন বা ইন্ডিপেন্ডেন্ট ইভেন্ট, তারমানে একবার টস করলে যে ফলাফল পাবে তারউপর পরবর্তি টসের ফলাফলের কোনো সম্পর্ক নেই। এখন এক্সপেরিমেন্টের ফলাফল আমাদের দুইরকম হতে পারে:

- তুমি একটা টেইল পেয়েছ, একটা টস নষ্ট হলো, তোমাকে এখনো গড়ে EE বার টস করতে হবে। এক্সপেক্টেড ভ্যালু $0.4(1+E)0.4(1+E)$। রিকার্সনের ধারণাটা এখানে কাজে লাগছে।
- তুমি একটা হেড পেয়েছ, তোমার আর টস করা দরকার নেই। এক্সপেক্টেড ভ্যালু $(0.6)\cdot(1)(0.6)\cdot(1)$।

সবমিলিয়ে গড়ে তোমাকে $E=0.4\cdot(1+E)+(0.6)\cdot(1)E=0.4\cdot(1+E)+(0.6)\cdot(1)$ বার কয়েন টস করতে হবে। এটাকে ঘুরিয়ে লিখলে আমরা পাবো $1.66671.6667$। এরমানে অসীম সংখ্যকবার এক্সপেরিমেন্ট করলে তুমি গড়ে $1.66671.6667$ টা টসের পরেই হেড পাবে।

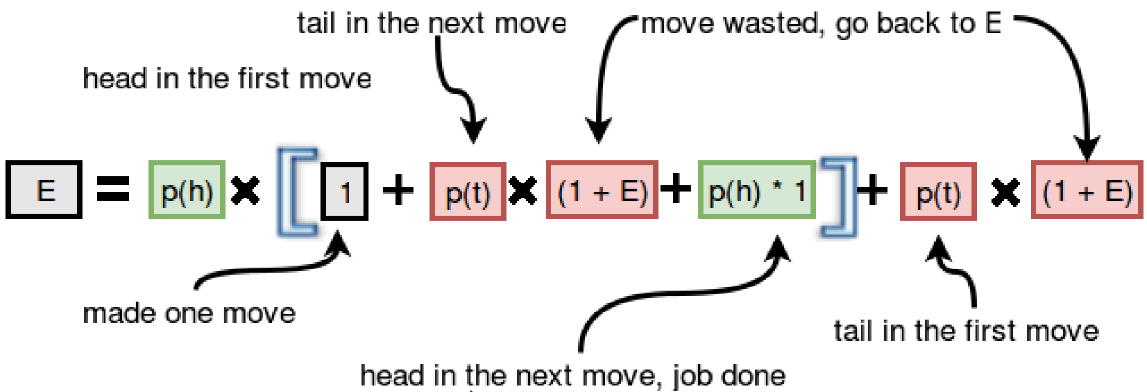
সমস্যা ২:

তোমার কাছে একটা কয়েন আছে যেটা টস করলে হেড কিংবা টেইল পাবার প্রোবাবিলিটি হলো $p(h)p(h)$ এবং $p(t)(t)$। পরপর দুটি হেড পেতে হলে গড়ে (এক্সপেক্টেড) কয়বার টস করতে হবে?

মনে করো EE বার টস করলে তুমি পরপর দুইটি হেড পাবে। এখন তুমি যদি প্রথমবার টেইল পাও তাহলে একটা টস নষ্ট হবে এবং তোমাকে গড়ে আরো $p(t)\cdot(1+E)p(t)\cdot(1+E)$ বার টস করতে হবে। কিন্তু তুমি যদি প্রথমবার হেড পাও তাহলে দুটি ঘটনা ঘটতে পারে, পরের বার তুমি টেইল পাবে এবং আরো

$p(t)\cdot(1+E)p(t)\cdot(1+E)$ বার টস করতে হবে, অথবা পরেরবার তুমি আরেকটা হেড পাবে এবং আর টস করা দরকার নেই। সবগুলো ঘটনা একসাথে করলে এক্সপেক্টেড ভ্যালু

হবে $E=p(h)\cdot(1+p(t)\cdot(1+E)+p(h)\cdot 1)+p(t)\cdot(1+E)E=p(h)\cdot(1+p(t)\cdot(1+E)+p(h)\cdot 1)+p(t)\cdot(1+E$ $)$। নিচের ছবিতে আবারো ব্যাখ্যা করা আছে সূত্রটা:



যদি কয়েনটা ফেয়ার কয়েন হয়, অর্থাৎ $p(h)=p(t)=0.5p(h)=p(t)=0.5$ হয় তাহলে EE এর মান হবে 66, তুমি যাচাই করে দেখতে পারো।

এখন প্রশ্ন হলো দুইটির বদলে পরপর nn টা হেড পেতে চাইলে কয়বার টস করতে হবে? এটা তুমি চিন্তা করে বের করো, না পারলে উত্তর আছে এই সাইটে।

সমস্যা ৩:

একটা কয়েন nn বার টস করা হলে তুমি এক্সপেক্টেড কয়টি হেড পাবে?

প্রথমে চিন্তা করে যদি কয়েন ১বার টস করা হয় তাহলে তুমি গড়ে (এক্সপেক্টেড) কয়টি হেড পাবে? 0.5 প্রোবাবিলিটি যে তুমি ১টি হেড পাবে, বাকি 0.5 প্রোবাবিলিটিতে তুমি একটাও হেড পাবে না। তাহলে এক্সপেক্টেড ভ্যালু হলো $0.5\cdot 1+0.5\cdot 0=0.50.5\cdot 1+0.5\cdot 0=0.5$। এর মানে হলো তুমি যদি অসীমসংখ্যক বার এক্সপেরিমেন্ট করো এবং প্রতি এক্সপেরিমেন্টে ১বার করে কয়েন টস করো তাহলে গড়ে তুমি প্রতিবার $0.50.5$ টি হেড পাবে।

nn বার টস করলে তোমাকে এই ভ্যালুটাই nn বার যোগ করতে হবে: $(0.5\cdot 1+0.5\cdot 0)+(0.5\cdot 1+0.5\cdot 0)+\ldots(n\text{ times})=n\cdot 0.5(0.5\cdot 1+0.5\cdot 0)+(0.5\cdot 1+0.5\cdot 0)+\ldots(n\text{ times})=n\cdot 0.5$ । এর মানে হলো তুমি যদি অসীমসংখ্যক বার এক্সপেরিমেন্ট করো এবং প্রতি এক্সপেরিমেন্টে nn বার করে কয়েন টস করো তাহলে গড়ে তুমি প্রতিবার $n\times 0.5n\times 0.5$ টি হেড পাবে।

একইরকম আরেকটা সমস্যা হলো, nn টি শিক্ষার্থী আছে, প্রত্যেককে বলা হলো 1 থেকে 100 এর মধ্যে একটা সংখ্যা লিখতে। অসীম সংখ্যকবার এক্সপেরিমেন্টটা করা হলে গড়ে কতজন শিক্ষার্থী ১ থেকে ৯ এর মধ্যে কোনো একটা সংখ্যা লিখবে? ধরে নাও প্রতিটি সংখ্যা লেখার প্রোবাবিলিটি সমান (যদিও বাস্তবে এক্সপেরিমেন্টটা করা হলে সেটা সত্যি হবে না, মানুষ কিছু কিছু সংখ্যাকে বেশি পছন্দ করে!)।

সমস্যা ৪:

nn টা হেড পেতে হলে তোমাকে এক্সপেক্টেড কয়বার কয়েন টস করতে হবে?

এই সমস্যাটাকে আমরা রিকার্সিভলি সলভ করবো। মনে করো nn টা হেড পেতে হলে E(n) বার কয়েন টস করতে হবে। এখন যদি একটা হেড পাই তাহলে আমার আরো $n-1n-1$ টা কয়েন লাগবে যার জন্য আমাকে আরো $E(n-1)E(n-1)$ বার টস করতে হবে। কিন্তু যদি একটা টেইল পাই তাহলে আমাকে আরো $E(n)E(n)$ বার টস করতে হবে।

তাহলে মোট কয়েন টস করতে হবে $E(n)=0.5\cdot(1+E(n-1))+0.5\cdot(1+E(n))E(n)=0.5\cdot(1+E(n-1))+0.5\cdot(1+E(n))$ বার। এটাকে সরল করলে পাবে $E(n)=E(n-1)+2E(n)=E(n-1)+2$। এখন আমাদের রিকার্সন থামানোর জন্য

একটা বেস কেস দরকার। যদি আমাদের 0 টা হেড লাগে তাহলে আর টস করা দরকার নেই, E(0)=0E(0)=0।

সমস্যা ৫:

এই সমস্যাটা ২০১৭'র NCPC কনটেস্টের প্রিলিমিনারিতে আমি সেট করেছিলাম। তোমার কাছে nn টা বাল্ব আছে, শুরুতে সবগুলো বাল্ব অফ। প্রতিটা মুভ এ তুমি random একটা বাল্ব সিলেক্ট করতে পারো। এখন বাল্বটা যদি অফ থাকে তাহলে তুমি একটা কয়েন টস করবে, যদি হেড পাও তাহলে বাল্বটা অন করবে, যদি টেইল পাও তাহলে কিছুই করবে না। আর বাল্বটা যদি আগেই অন থাকে তাহলে সেই মুভে তোমার কিছুই করা দরকার নেই। এক্সপেক্টেড কয়টা মুভে তুমি সবগুলো বাল্ব অন করতে পারবে? কয়েনটা ফেয়ার কয়েন না, প্রতিবার টেইল পাবার প্রোবাবিলিটি p।

এই প্রবলেমও রিকার্সিভলি সলভ করতে হবে। তোমার মুলত জানা দরকার বর্তমানে কয়টা বাল্ব অন আছে। ধরো বর্তমানে xx টা বাল্ব অন আছে এবং এক্সপেক্টেড মুভ লাগবে e(x) টি। তাহলে অলরেডি অন আছে এমন বাল্ব সিলেক্ট করার প্রোবাবিলিটি xnxn, সেক্ষেত্রে এক্সপেক্টেড মুভ লাগবে আরো \fractxn(1+e(x))\fractxn(1+e(x)) টি। অলরেডি অফ আছে এমন বাল্ব সিলেক্ট করার প্রোবাবিলিটি n−xnn−xn। সেক্ষেত্রে আবার ২টি ঘটনা ঘটতে পারে, pp প্রোবাবিলিটিতে তুমি টেইল পাবে এবং আরো e(x)e(x) টি মুভ লাগবে, অথবা 1−p1−p প্রোবাবিলিটিতে হেড পাবে এবং আরো e(x+1)e(x+1) টি মুভ লাগবে।

সবমিলিয়ে ইকুয়েশনটা হবে e(x)=xn⋅(1+e(x))+n−xn⋅(p⋅(1+e(x))+(1−p)⋅(1+e(x+1))e(x)=xn⋅(1+e(x))+n−xn⋅(p⋅(1+e(x))+(1−p)⋅(1+e(x+1))

এক্সপেক্টেড ভ্যালু নিয়ে আরো জানতে কোডশেফের এই আর্টিকেলটি পড়তে পারো। প্র্যাকটিস করার জন্য lightoj'র প্রোবাবিলিটি সেকশনটা দেখো।

হ্যাপি কোডিং!