$$\delta S = \int d^4x \left\{ \partial_\mu \left[\left(g^\mu_\nu \mathcal{L} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi} \partial_\nu \phi \right) \delta x^\nu \right] + \partial_\mu \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi} \delta_T \phi \right] \right\}$$

$\delta\phi + \partial_\mu \phi \delta x^\mu$

pure Coordinate

internal transfm

$\delta x_\mu = a_\mu$, ϕ scalar : $\delta_T \phi = 0$

$$T^{\mu\nu} \equiv -g^{\mu\nu}\mathcal{L} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi} \partial^\nu \phi \quad (\text{Canonical} \; - - -)$$

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \longrightarrow \text{Noether} \longrightarrow P^\nu = \int d^3x \, T^{0\nu}$$

$$P^0 = \int d^3x \, T^{00} = \int d^3x \, \underbrace{[-\mathcal{L} + \cdots]}_{\mathcal{H}}$$

$$\vec{P} = \int d^3x \, \Pi(x) \, \partial \phi(x) \qquad \Pi = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 \phi}$$

$\delta x_\mu = \omega_\mu{}^\nu x_\nu$: $\delta S = 0$

$\omega_\mu{}^\nu \rightarrow$ ω, ماتریس پادمتقارن (illegible)

$\delta_T \phi = 0$; $\delta_T \phi_i \neq 0 \longrightarrow$ spinor ; vector

$$\delta S = \int d^4x\, \partial_\mu \left[\left(g^{\mu\nu} \mathcal{L} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi} \partial^\nu \phi \right) \omega_\nu{}^\rho x_\rho \right]$$

$$\mathcal{M}^{\mu\nu\rho} \equiv T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu$$

$$\delta S = \int d^4x\, \partial_\mu \left[\frac{1}{2} \omega_{\nu\rho} \mathcal{M}^{\mu\nu\rho} \right]$$

$$\rightsquigarrow \partial_\mu \mathcal{M}^{\mu\nu\rho} = 0 \longrightarrow \text{local Conserved Current}$$

$$\delta x_0 = 0 \quad , \quad \delta x_j = \underbrace{\omega_{jk}}_{\to\, \epsilon_{jkl}\theta_l} x_k$$

$$L^{\nu\rho} = \int d^3x\, \mathcal{M}^{0\nu\rho}(\vec{x}, x_0)$$

$$L_{jk} = \int d^3x \left[T_{0j} x_k - T_{0k} x_j \right]$$

$$= \int d^3x \left[P_j x_k - P_k x_j \right]$$

$$L_j \equiv \tfrac{1}{2} \epsilon_{jkl} L_{kl}$$

$$L_j \equiv \int d^3x \, \boxed{\epsilon_{jkl}\, x_k P_l} = \int d^3x \, l_j(x)$$

$$\vec{x} \times \vec{p}$$

چون فقط میدان اسکالر درنظر گرفتیم، اسپین نداریم.

این $L^{\nu\rho}$ تحت انتقال ناوردا نیست $\xrightarrow{a^\mu} a^\nu p^\rho - a^\rho p^\nu$

Pauli - Lubanski

$$\boxed{W^\mu = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\frac{L^{\nu\lambda}p^\rho}{\sqrt{p^2}}}$$

اگر در $\vec{p}=0$ باشیم همان تکانه زاویه می‌شود.

$$\begin{cases} \partial_\mu M^{\mu\nu\rho} = 0 \\ \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \end{cases} \longrightarrow T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$$

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\lambda K^{\mu\nu\lambda}$$

$\partial_\lambda K^{\mu\nu\lambda} \longrightarrow$ $(\mu,\lambda), (\nu,\lambda)$ پادمتقارن

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \xrightarrow{+\partial_\lambda K^{\mu\nu\lambda}} \partial_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = 0$$

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \tilde{T}^{\nu\mu}$$

Belinfante energy-momentum tensor

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - F^{\nu\lambda}\partial^{\mu} A_{\lambda} \; ; \quad \partial_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$$

پیمانه ناوردا نیست.

$+$

$$K_{\mu\nu\lambda} \equiv F_{\nu\lambda} A_{\mu} \qquad \partial^{\lambda} F_{\mu\lambda} = 0$$

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{2} - F^{\nu}{}_{\lambda} F^{\mu\lambda} \longrightarrow$$ gauge invariant + Symmetric

$$\begin{cases} P^{0} = \int d^{3}x\, \tilde{T}^{00} = \int d^{3}x\, \frac{1}{2}(E^{2}+B^{2}) \\ P^{i} = \int d^{3}x\, \tilde{T}^{i0} = \int d^{3}x\, (\vec{E}\times\vec{B}) \end{cases}$$

$\longrightarrow$ بردار پوئینتینگ

آیا از اصل اول می‌توانیم یک تانسور انرژی-تکانه ذاتاً متقارن تعریف بکنیم؟!

$$(S, g^{\mu\nu}) \xrightarrow{g'^{\mu\nu}} (S', g'^{\mu\nu})$$

$$ds^{2} = g^{\mu\nu}_{(x)}\, dx_{\mu}\, dx_{\nu}$$

از دید کلاسیک تبدیل روی سیستم کار را انجام می‌دهیم تا شکل آن را عوض کنیم و سیستم متقارن بشه.

تا کنون deform کردن ها هزینه ای ندارد ← چون دقیقا معادل اعمال تقارنی تبدیل هستند .

تغییرات مختصات که صرفا لیبل‌های نقاط را عوض می‌کنه ولی ویژگی‌های ذاتی مثل فاصله نقاط و زاویه بین نقاط را دست نمی‌زنه .

$$\begin{cases} x_\mu \longrightarrow x_\mu + \delta x_\mu \\ g'_{\mu\nu}(x') = g_{\lambda\rho}(x) \dfrac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \dfrac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x) = -\frac{1}{2}\left(g_{\mu\lambda}\partial^\nu \delta x_\lambda + \cdots\right) \\ d^4x\sqrt{g} \longrightarrow \text{عنصر ناوردا حجم} \end{cases}$$

Hook's law

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{g}\, \boxed{T^{\mu\nu}(x)}\, \delta g_{\mu\nu}(x)$$

$$T^{\mu\nu} \underset{\text{قرارداد}}{\equiv} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \longrightarrow T^{\mu\nu}$$ ذاتا متقارن است .

این $T^{\mu\nu}$ با $T^{\mu\nu}$ کانونیکال چه ارتباطی دارد؟!

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

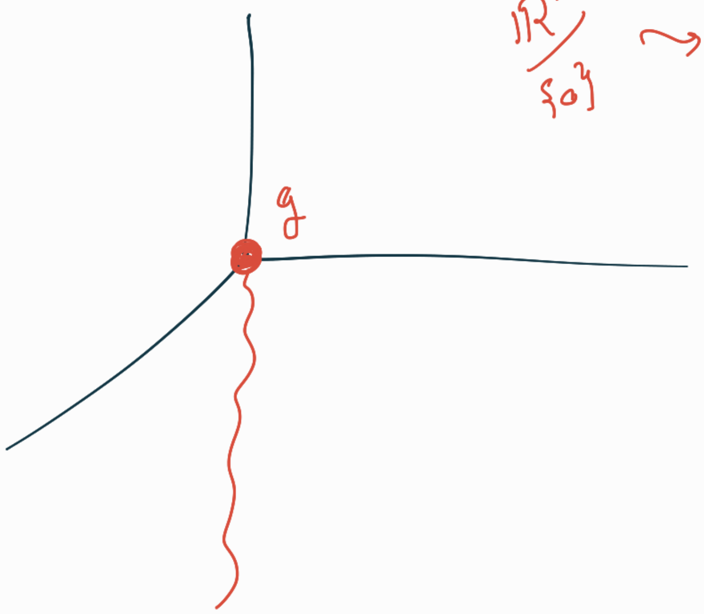
$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \longleftarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \neq 0$$

$$A^{N}_{(r,\theta)} \equiv \frac{g}{4\pi r} \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{g}{4\pi r^2} \hat{r}$$

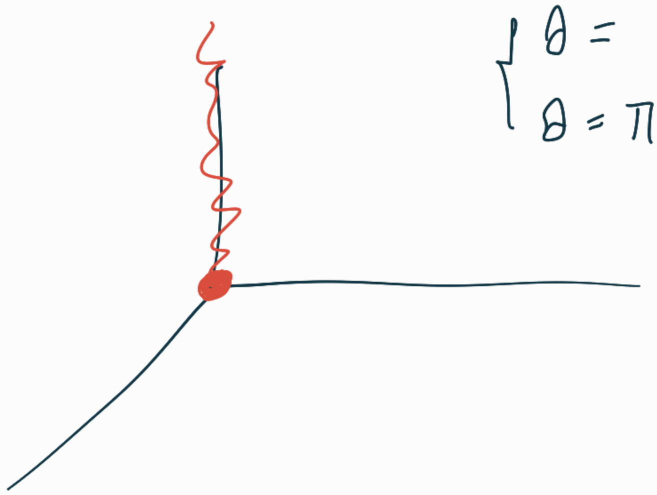
$$\begin{cases} \theta = 0 \longrightarrow 1-\cos\theta = 0, \quad \sin\theta = 0 \\ \theta = \pi \longrightarrow \text{خوش تعریف نیست} \end{cases}$$

$\mathbb{R}^3 / \{0\} \rightsquigarrow \mathbb{R}^3 / \{\text{نیم‌خط}\}$



$$A^{S}_{(r,\theta)} = \frac{-g}{4\pi r}\,\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\begin{cases} \theta = 0 \to \text{خوش تعریف نیست} \\ \theta = \pi \to \text{خوش تعریف} \end{cases}$$



$$\vec{A}^{N} \longrightarrow \vec{A}^{S} + \vec{\nabla} w \quad ; \quad w = \frac{g\phi}{2\pi} \quad (\theta \neq 0, \pi)$$

$\mathbb{R}^3 / \{$خط جنوب$\}$

w تک مقدار نیست!

$$w(\phi = 2\pi) = w(\phi = 0) + g$$

در کوانتوم ψ همراه است در میدان ϕ همراه است.

$$\psi \to e^{\frac{ie\omega}{\hbar}}\,\psi$$

ψ تحت تبدیل $U(1)$

$$\psi \to e^{i\alpha}\psi$$

$$\boxed{eg = 2\pi\hbar n} \longrightarrow \text{first chern number}$$

topologically non-trivial $U(1)$ Bundle over S^2