هو

ما از جنبه‌های مختلف دیدیم که وجود تک‌قطبی مغناطیسی منجر به شرط کوانتیده بودن بار الکتریکی و مغناطیسی می‌انجامد

* Monopoles & Angular Momentum

$m\dot{\vec r}$ تکانه مکانیکی

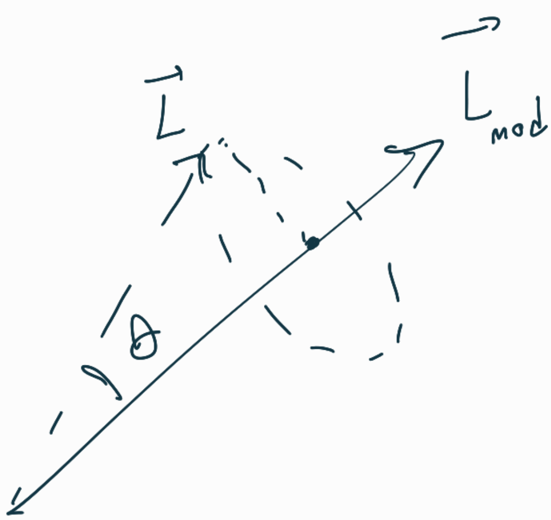
$$\frac{d\vec P}{dt} = e\,\dot{\vec r}\times\vec B \qquad ; \qquad \vec B = \frac{g}{4\pi}\frac{\vec r}{r^3}$$

$$\frac{d\vec L}{dt} = e\,\vec r\times(\dot{\vec r}\times\vec B) = \frac{eg}{4\pi r^3}\,\vec r\times(\dot{\vec r}\times\vec r)$$

$$= \frac{eg}{4\pi}\left(\frac{\dot{\vec r}}{r} - \frac{\dot r\,\vec r}{r^2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{eg}{4\pi}\hat r\right)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\vec L - \frac{eg}{4\pi}\hat r\right)}_{\text{modified angular} \sim .} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec L_{mod} = \vec L - \frac{eg}{4\pi}\hat r$$

$$\vec L_{mod}\cdot\hat r = -\frac{eg}{4\pi} = cte$$



$$\cos\theta = \frac{-eg}{4\pi L} = \frac{\vec L\cdot\hat r}{L}$$

from QM : $L_z \in \frac{1}{2}\hbar \mathbb{Z}$

$$\to \quad \frac{eg}{4\pi} = \frac{1}{2}\hbar n \quad \to \quad \boxed{eg = 2\pi\hbar n}$$

$$\vec{J} = \vec{L}_{mod} + \vec{S} \xrightarrow[g = \frac{2\pi\hbar}{e}]{n=1} \vec{r} \times \vec{p} + \vec{S} - \frac{1}{2}\hat{r}$$

$\begin{cases} \text{boson} \to \text{half-integer} \\ \text{fermion} \to \text{integer} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{dualities in } 2+1 \text{ dimension} \\ \quad 8.6 \text{ Tong} \end{cases}$

The Theta Term:

UV: Ultra Energy $\quad S_{max} = \frac{1}{\mu_0} \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\right) + O(F^4)$

$\propto E^2 - B^2$

IR: low Energy

$$ {}^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \qquad \left\{ F_{\mu\nu} : \begin{array}{l} \vec{E}/c \to -\vec{B} \\ \vec{B} \to \vec{E}/c \end{array} \right\} $$

$$ S_\theta = \frac{\theta e^2}{4\pi^2\hbar} \int d^4x \; \frac{1}{4}\, {}^*F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\frac{\theta e^2}{4\pi^2\hbar c} \int d^4x \; \vec{E}\cdot\vec{B} $$

پارامتر: بدون بعد

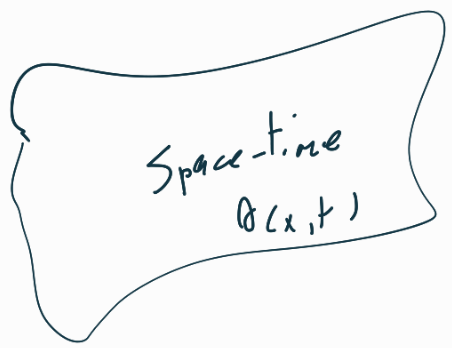
$$ S_\theta = \frac{\theta e^2}{8\pi^2\hbar} \int d^4x \; \partial_\mu \left(\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu \partial_\rho A_\sigma \right) $$

$\boxed{\text{QM} \longleftrightarrow \text{topology}}$ topological $\longrightarrow$ Boundary information

ما از متریک برای تعریف S_θ که استفاده نمی‌کنیم بلکه از فرم حجم $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ استفاده می‌کنیم.

Axion Electrodynamics:

$$ S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{e^2}{16\pi^2\hbar}\, \theta(\vec{x},t)\; {}^*F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) $$



θ را از این پارامتر ثابت به یک field روی فضازمان ارتقا دهیم.

فقط دقت داریم θ فعلاً میدان دینامیکی نیست.

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\alpha c}{\pi}\,\vec{\nabla}\theta\cdot\vec{B} & \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{\alpha}{\pi c}\left(\dot{\theta}\vec{B} + \vec{\nabla}\theta\times\vec{E}\right) & \ldots \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

Topological Insulator