مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران

مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱۹، شمارهٔ ۴، زمستان ۱۳۹۸

تقارن لورنتس کج شده

سید اکبر جعفری

دانشکدهٔ فیزیک دانشگاه صنعتی شریف، تهران

پست الکترونیکی: jafari@sharif.edu

(دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۱/۰۴ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۹۸/۰۷/۰۷)

چکیده

مخروط دیراک در مادهٔ چگال را می‌توان کج کرد. این کج کردن باعث تقلیل تقارن لورنتس می‌شود. اما هنوز درجهٔ بالایی از تقارنی شبیه لـورنتس در سیستم باقی می‌ماند. در این مقاله تبدیلات لورنتس- کج شده را معرفی می‌کنیم که تقارن این سیستم هستند.

واژه‌های کلیدی: گروه لورنتس کج شده، فضا- زمان در فیزیک حالت جامد

۱. مقدمه

امروزه معادلهٔ دیراک به عنوان یک نظریهٔ مؤثر در فیزیـک مـاده چگال فراوان به چشم می‌خورد. یک تفاوت مهم معادلهٔ دیـراک در مادهٔ چگال با معادلهٔ دیراک در فیزیک انـرژی‌هـای بـالا ایـن است که در فیزیک مادهٔ چگـال مقیـاس‌هـای انـرژی زیـر یـک الکترون- ولت است. از آن جهـت کـه معـادلات دیـراک مـادهٔ چگالی نظریهٔ مؤثر هستند، ناوردایی لـورنتس حاصـله نیـز یـک ناوردایی پدید آمده برآمده[۱] است و لـذا یـک تقـارن بنیـادی در مادهٔ چگال نیست. دلیل این امر آن است که مادهٔ چگال در خـلأ زندگی نمی کند، بلکه در یک شـبکه زنـدگی مـی‌کنـد. از ایـن جهت تقارن لورنتس در مادهٔ چگال قابل شکستن است.

به لحاظ ریاضـی، حالـت جامـد مـاده در ۲۳۰ نـوع تقـارن مختلف می‌تواند قرار گیرد کـه متنـاظر بـا ۲۳۰ گـروه نقطـه‌ای است. برخی از این گروه‌هـای نقطـه‌ای عناصـر اصـطلاحاً غیـر سیمورفیک دارند. این عناصر عملیات تقارنیی هستند کـه در آن دوران‌های شبکه یا انعکاس‌های شبکه با یک انتقـال بـه انـدازهٔ کسری از ثابت شبکه ترکیب می‌شوند. فاز بلاخ ناشی از انتقـال کسری در این سیستم‌ها می‌تواند منجر به نمـایش‌هـای کـاهش ناپذیری شود که به عنوان مثال فرمیون‌هایی با اسپین یک ظـاهر شوند که به فرمیون‌های سه‌گانه مشهورند. تناقض این بـا قضـیهٔ اسپین- آمار که بر تقارن لـورنتس اسـتوار اسـت اصـلاً عجیـب نیست، زیرا که زندگی کردن در یک شبکه کـه سـاختار تقـارنی گروه نقطه‌ای غنی خاص خود را دارد، همانند زندگی کـردن در

۱. Emergent

خلأ نیست و برانگیختگی‌های بنیادی توسط نمایش‌های ناپذیر گروه نقطه‌ای شبکه داده می‌شوند [۱].

در مطالعهٔ اخیر خود متوجه شده‌ایم که در ساختار خاصی دو بعدی از اتم بور که به بوروفین pmmn ۸ موسوم است، ساختار غیرسیمورفیک گروه نقطه‌ای باعث می‌شود که نه تنها کلی‌ترین هامیلیتونی سازگار با تقارن‌های این گروه دارای مخروط دیراک کج شده باشد، بلکه این ساختار تقارنی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی زمینه را مجبور می‌کند به طریقی به درجات آزادی الکترونی این شبکه جفتیده شوند که میزان کج شدگی مخروط دیراک حاصل نیز با میدان الکتریکی عمودی قابل تنظیم است [۲].

در این مقاله حد پیوستار سیستمی با مخروط دیراک کج شده را در نظر می‌گیریم که به وضوح تقارن لورنتس نیست و به این سوال می پردازیم که تقارن حد پیوستار این سیستم چیست؟ درست است که تقارن سیستم لورنتیس نیست، اما تقارن عظیم لورنتس به یکباره کاملاً مضمحل نشده است، بلکه به شکلی که اندکی کمتر از تقارن لورنتس است ادامه حیات می‌دهد. ما اسم این تقارن را تقارن لورنتس کج شده می‌گذاریم که با پارامتر کج شدگی $0 \le \eta < 1$ کنترل می‌شود. حد $\eta = 0$ به مخروط دیراک استاندارد عمودی کاهش می‌یابد و در این نقطهٔ خاص گروه لورنتس احیاء می‌شود. اما خارج از این نقطه تقارن اندکی کمتر از لورنتس است که ما در این مقاله به مطالعهٔ خواص این تقارن می‌پردازیم.

۲. رابطهٔ پاشندگی مخروط دیراک کج شده

مخروط دیراک کج شده به هر صورت به یک سمتی کج خواهد شد. از آزادی خود برای انتخاب جهت محور k_x استفاده کرده و جهت k_x را طوری انتخاب می‌کنیم که در امتداد کج شدگی باشد. دنیایی که در آن مخروط‌های دیراک کج باشند، از آن جهت که در یک شبکه زندگی می‌کنند، لاجرم همیشه دو مخروط دیراک کج شده دارد که ناوردایی تحت وارونی زمانی باعث می‌شود که این دو مخروط دیراک در جهت‌های قرینهٔ هم کج شوند. تا جایی که فرایندهای با انتقال تکانهٔ کوچک مد نظر است، می‌توانیم روی یکی از این مخروط‌های دیراک کج شده متمرکز شویم که هامیلیتونی مؤثر آن به صورت زیر خواهد بود:

$$H = \hbar v_F \begin{bmatrix} \eta k_x & k_x - ik_y \\ k_x + ik_y & \eta k_x \end{bmatrix} = \hbar v_F(\eta k_x \sigma_0 + k.\sigma), \quad (1)$$

که در آن σ_μ ماتریس‌های ۲×۲ با $\mu = 0,1,2,3$ است که برای شاخص صفر ماتریس واحد و برای شاخص‌های دیگر ماتریس‌های پاولی را نشان می‌دهند. سیستم مادهٔ چگال در اینجا دو بعد فضایی دارد و لذا فضا- زمان مورد علاقهٔ ما در این مقاله فضا زمان ۱+۲ بعدی است. مقیاس سرعت فرمی v_F در اینجا به مثابهٔ سرعت نور در تبدیلات لورنتس خلأ است. در کاربردهای مادهٔ چگال معمولاً این سرعت دو الی سه مرتبهٔ بزرگی از سرعت نور کوچک‌تر است. کوچک بودن این سرعت منشا اثرات مهمی است و به عنوان مثال باعث می‌شود که «ثابت ساختار ریز» برای دنیایی که مخروط‌های نوری آن با چنین سرعتی مشخص می‌شوند از مرتبهٔ واحد باشد که پیامدهای خاص خود را دارد [۳]. در این کار ما در دستگاه یکاهایی کار می‌کنیم که $\hbar = v_F = 1$ است. در این یکاها از قطری کردن هامیلتونی (۱) ویژه مقادیر و ویژه حالت‌های زیر به دست می‌آیند:

$$E_s(k) = k(s + \eta\cos\theta_k) \quad , \quad |k,\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ \pm e^{i\theta_k} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

که در آن $s = \pm 1$ شاخهٔ انرژی‌های مثبت و منفی نسبت به نوک مخروط دیراک را برچسب می‌زند و $\theta_{\mathbf{k}}$ زاویهٔ سمتی بردار موجی $\mathbf{k}$ است. از آنجایی که ویژه بردارهای این هامیلیتونی با ویژه بردارهای مخروط دیراک عمودی یکسان است، فاز بری ناشی از آنها تغییر نخواهد کرد و لذا ترازهای لانداو همانند گرافین دارای مد صفر خواهد بود. به عنوان یک دست گرمی اجازه دهید که نقش پارامتر کج شدگی η را در مدهای صفر محاسبه کنیم. بدین منظور ابتدا مختصات مختلط تعمیم‌یافته زیر را تعریف می‌کنیم:

$$z = x + i\lambda y, \; \bar{z} = x - i\lambda y, \; \lambda = \sqrt{1-\eta^2}, \quad (3)$$

که ایجاب می‌کند:

$$\partial_x = \partial_z + \partial_{\bar{z}}, \; \partial_y = i\lambda(\partial_z - \partial_{\bar{z}}), \quad (4)$$

و لذا

$$\partial_x \pm i\partial_y = (1\mp\lambda)\partial_z + (1\pm\lambda)\partial_{\bar{z}}. \qquad (۵)$$

بر حسب این مختصات مختلط تعمیم‌یافته، معادلات مدهای صفر که نقش غالب در ترابرد در ولتاژهای کم دارند به صورت زیر در خواهند آمد:

$$\partial_z\left[\eta\psi_1 + (1+\lambda)\psi_2\right] + \partial_{\bar{z}}\left[\eta\psi_1 + (1-\lambda)\psi_2\right] = 0, \qquad (۶)$$

$$\partial_z\left[(1-\lambda)\psi_1 + \eta\psi_2\right] + \partial_{\bar{z}}\left[(1+\lambda)\psi_1 + \eta\psi_2\right] = 0. \qquad (۷)$$

در حالت خاص مخروط دیراک عمودی $\eta = 0$ و $\lambda = 1$ به صورت $\partial_z\psi_2 = \partial_{\bar{z}}\psi_1 = 0$ کاهش می‌یابد که به معنی آن است که $\psi_1(z)$ یک تابع هولونومیک و $\psi_2(\bar{z})$ یک تابع پاد هولونومیک هستند.

در حالتی که پارامتر کج شدگی η مقدار دلخواهی داشته باشد، به دلیل رابطهٔ $\eta^2 + \lambda^2 = 1$ برای ارضای معادلات مد صفر کفایت می‌کند که داشته باشیم:

$$\partial_z\left[\eta\psi_1 + (1+\lambda)\psi_2\right] = 0, \qquad (۸)$$

$$\partial_{\bar{z}}\left[(1+\lambda)\psi_1 + \eta\psi_2\right] = 0. \qquad (۹)$$

این معادلات پیشنهاد می‌کنند که اسپینور جدید $\phi^T = [\phi_1\ \phi_2]$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\begin{bmatrix}\eta & 1+\lambda\\ 1+\lambda & \eta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\phi_2\\ \phi_1\end{bmatrix}. \qquad (۱۰)$$

تا معادلات مد صفر بر حسب آنها به صورت

$$\partial_z\phi_2 = 0,\ \ \partial_{\bar{z}}\phi_1 = 0, \qquad (۱۱)$$

در آید. این رابطه بدان معناست که ϕ_1 یک تابع هولونومیک و ϕ_2 یک تابع پاد هولونومیک است. جواب نهایی مدهای صفر برحسب این توابع هولونومیک و پادهولونومیک به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}-\eta & 1+\lambda\\ 1+\lambda & -\eta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_2\\ \phi_1\end{bmatrix}. \qquad (۱۲)$$

معادلهٔ اخیر بدان معناست که مدهای صفر مخروط دیراک کج شده، توابع صرفاً هولونومیک یا صرفاً پادهولونومیک نیستند و پارامتر کج شدگی η باعث می‌شود که مؤلفهٔ هولونومیک مد صفر مخروط دیراک کج شده، اندکی نیز سهم پاد هولونومیک متناسب با پارامتر کج شدگی η در خود داشته باشد.

ملاحظات فوق نشان می‌دهد که کج شدن مخروط دیراک، ساختار همدیس مدهای صفر را به هم می‌ریزد و لذا ممکن است که بتوان کج شدن مخروط دیراک را بر حسب تغییرات محتوایی در متریک فضا- زمان توضیح داد. در بخش بعد به این کار خواهیم پرداخت.

۳. متریک برای مخروط دیراک کج شده

متریک زیر موسوم به متریک پی‌نه لیوه- گول اشترند (PG)[1] را در نظر بگیرید:

$$ds^2 = -v_F^2 dt^2 + (dr - v_t dt)^2, \qquad (۱۳)$$

رابطهٔ پاشندگی ذرات بدون جرم (مثل فرمیون‌های دیراک) در فضایی با این متریک به صورت $g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 0$ داده می‌شود که از باز کردن آن به دست می‌آوریم $(E - k.v_t)^2 - v_F^2 k^2 = 0$. اگر سرعت کج شدگی $v_t = \eta v_F$ انتخاب شود، این رابطهٔ پاشندگی معادل با رابطهٔ (۲) خواهد بود.

مجدداً برای سهولت فرض کنیم که سرعت کج‌شدگی فقط در راستای محور x است. همیشه می‌توانیم این انتخاب را انجام دهیم. برای دست گرمی اجازه دهید ببینیم اگر متریک فضا مینکوفسکی بود چگونه تبدیل لورنتس را برای فضا- زمان یا انرژی- تکانه به دست می‌آوردیم. برای فضا- زمان مینکوفسکی داریم، $ds^2 = -dt^2 + dx^2$، که در آن سرعت فرمی را واحد سرعت انتخاب کرده‌ایم. متریک لورنتس متناظر با آن عبارت است از $\eta = \mathrm{diag}(-1,1)$. اگر شکل بی‌نهایت کوچک تبدیل لورنتس را به صورت $\Lambda = I + \kappa K_x$ بر حسب مولد K_x بسط دهیم، شرط ناوردا بودن متریک تحت این تبدیل ایجاب می‌کند $\eta K_x + K_x^T\eta = 0$. این رابطه در فضای (t,x) به دست می‌دهد $K_x = \tau_1$ که در آن τ_1 ماتریس اول پاولی است. از آنجا بلافاصله تبدیل لورنتس در راستای محور x به دست می‌آید:

$$\Lambda(\kappa) = \begin{bmatrix}\cosh(\kappa) & \sinh(\kappa)\\ \sinh(\kappa) & \cosh(\kappa)\end{bmatrix}, \qquad (۱۴)$$

که در آن پارامتر تبدیل لورنتس κ به صورت $\cosh(\kappa) = (1-\beta^2)^{-1/2} \equiv \gamma$ و $\sinh(\kappa) = -\beta\gamma$ به پارامتر سرعت β (در واحد سرعت فرمی) مرتبط است. برای دو بعد

۱. Paineleve-Gulstrand (PG)

فضایی شکل سه در سه این تبدیل به صورت زیر خواهد بود:

$$\Lambda^{x}(\kappa)=\begin{bmatrix}\cosh(\kappa) & \sinh(\kappa) & 0\\ \sinh(\kappa) & \cosh(\kappa) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \qquad (15)$$

با این مقدمه، همین کار را با متریک PG که به صورت زیر است، تکرار می‌کنیم.

$$g_{\mu\nu}=-\begin{bmatrix}\lambda^{2} & \eta\\ \eta & -1\end{bmatrix},\ \lambda^{2}=1-\eta^{2}, \qquad (16)$$

تا به دست آوریم:

$$\Lambda^{x}_{\mathrm{tilt}}=\begin{bmatrix}\cosh(\beta)-\eta\sinh(\beta) & \sinh(\beta) & 0\\ \lambda^{2}\sinh(\beta) & \cosh(\beta)+\eta\sinh(\beta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} =\gamma\begin{bmatrix}1+\eta\beta & -\beta & 0\\ -\lambda^{2}\beta & 1-\eta\beta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \qquad (17)$$

بدیهی است که در حالت خاص $\eta=0, \lambda=1$ که مخروط دیراک به صورت عمودی در می‌آید، این تبدیل به تبدیل لورنتس استاندارد کاهش می‌یابد.

۴. بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله به دنیایی که مخروط‌های دیراک در آن کج هستند پرداختیم و نشان دادیم که تقارن لورنتس در حالت کلی کاهش می‌یابد، اما کاملاً نابود نمی‌شود و به صورت تبدیلات لونتس کج شده ادامه حیات می‌دهد. تبیین ساختار جبری و نمایش‌های کاهش‌ناپذیر این گروه ممکن است به روشن شدن پدیده‌هایی مانند حرکت تقدیمی تامسون (که ناشی از این است که حاصل‌ضرب دو تبدیل لورنتس یک تبدیل لورنتس خالی نیست، بلکه حاصل‌ضرب یک تبدیل لورنتس در یک دوران است) در سیستم‌های دارای مخروط دیراک کج شده کمک کند [۴]. با توجه به این که امکان مهندسی متریک با استفاده از میدان‌های الکتریکی عمودی در بروفین تک لایه فراهم است [۳]، امکان دارد که بتوان هندسه‌های جالبی نظیر AdS ۲+۱ بعدی را در این سیستم شبیه‌سازی کرد. لذا رهیافت هندسی ما به سیستم‌های دیراک دارای مخروط کج شده، امکان شبیه سازی تناظر AdS-CFT در چارچوب مادهٔ چگال را فراهم می‌کند [۵].

سپاسگزاری

از همکاری دکتر علیرضا حبیبی در تبدیل فایل مقاله از زی پرشین به ماکروسافت ورد سپاسگزارم.

مراجع

1. B Bradlyn, J Cano, Z Wang, M G Vergniory, C Felser, R J Cava, and B A Bernevig, *Science* **353** (2016) 6299.
2. T Farajollahpour, Z Faraei, and S A Jafari, *Phys. Rev.* B **99** (2019) 235150.
3. M I Katsnelson and M Iosifovich Katsnel'son. Graphene, "*Carbon in Two Dimensions*", Cambridge university press (2012).
4. T Padmanabhan, *Springer General Relativity and Gravitation* 46, 3 (2014) 1673.

۵. ک بی‌تقصیر فدافن و س مجرد لمن جویی، *مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران*، ۱۸، ۲ (۱۳۹۷) ۱۹۰.

5. K Bitaghsir Fadafan and S Mojarad Laman jouee, *Iranian J. Phys. Res*. **18**, 2 (2018) 190.