2016 数学建模校赛

题目 B

印制电路板焊锡

学 校: 山西大学

队 员: 李恩宾 2014271055 15735171910

张红若 2014221035 15735171665

张彪 2014241151 15383510644

指导教师: 李顺勇

2016 年 9 月 4 日

印制电路板焊锡

摘　要

题目中针对电路板焊锡问题，给出了焊锡位点，要求我们建立适当的数学模型，使得点胶机经过电路板上的 280 个位点至少一次，实现对电路板点涂锡膏，并求解最优焊锡顺序及路径长度。本文通过对电路板焊锡问题的分析，我们将焊锡过程转化为图论模型中的 TSP 旅行售货员问题。而 TSP 问题是典型的 NP-hard 问题，不存在多项式时间算法求其最优解。

针对问题一，我们逐步建立蚁群算法、改进贪婪算法和改进遗传算法，对电路板上的位点进行遍历，得到较优焊锡顺序，并通过计算最优焊接路径的距离，求得相应的路径长。由于数据量偏大，蚁群算法迭代很慢，对所得的结果不满意；进一步我们又构建了贪婪算法，贪婪算法的效率有明显的提高，路径长度有所减少，但容易陷入局部最优解，于是对贪婪算法进行改进，改进贪婪算法获得了较优的解；基于遗传算法进行改进后对模型进行求解，发现改进遗传算法所求解的结果更优，最终求得了问题的一个满意解并求出路径长度为 2694.903 95028。

针对问题二，建立贪婪算法求得一个链式解，即得到问题的最优焊锡顺序，且路径长度为 2669.605729。

关键词： 遗传算法 旅行商问题 贪婪算法 蚁群算法

1 问题的提出

焊锡是印制电路板生产过程中的一步后续处理，目的是把贴片元件焊接到电路板表面。人们使用一台装有锡膏点胶机的数控（计算机数字控制，简称 CNC）机械，将锡膏涂布于电路板表面的特定位置。现有一个电路板，大小为 $300mm \times 180mm$，共有 280 个位点需要点涂锡膏。为了节约时间以及使机器减少磨损，这里需要设计出一个让点胶机的点击头所走的路程是最少的方案。

问题一：求解点胶机从 1 号位点开始对这 280 个位点进行焊锡，最后回到 1 号位点的最优焊锡顺序，并给出相应路径长。

问题二：不预先设定起点和终点，求解对 1 万张这种类型的电路板进行焊锡的最优顺序，并给出相应路径长，这里假设每张电路板安装点胶机所需时间和所处位置都是相同的。

2 模型假设

1. 假设点胶机的初始位置位于电路板起始位点的正上方；
2. 假设在点胶机进行焊锡的过程中没有焊锡失败的情况；
3. 每张电路板安装点胶机所需时间和所处位置都是相同的；
4. 假设点胶机的柱头在两点之间是按直线行进的；
5. 假设点胶机对印刷电路板的作用力不会使印刷电路板产生移动。

3 符号说明

符号	说明
$G(V,E)$	赋权完全图
V	图的点集
E	图的边集
D	节点间距离的邻接矩阵
S	问题的解向量
x_i, y_i	i 的 xy 座标
$d_{i,j}$	i,j 间的距离

4 模型的建立

4.1 问题分析

通过对电路板焊锡问题的分析，我们将焊锡过程转化为赋权完全图中求 TSP 旅行售货员问题。TSP 问题是典型的 NP-hard 问题[1]，不存在多项式时间算法求其最优解。我们先使用了蚁群算法，对电路板上的位点进行遍历，最终回到起点，得到最优焊锡顺序，求得相应的路径长。但由于数据量大，蚁群迭代很慢，所得的结果不能满意；我们又构建了贪婪算法，贪婪算法得到的结果更好，但仍不是最优解。最后我们构建了一个经过改进的遗传算法[2]，最终求得了问题的一个满意解。

将问题看做定义在图 $G=(V,E)$ 上的 TSP 问题,其中 $V=1,2,\ldots,n$，$E=(i,j), i,j\in V$，图中节点之间的距离矩阵为：

$$D=\begin{bmatrix} \infty & d_{1,2} & \ldots & d_{1,n} \\ d_{2,1} & \infty & \ldots & d_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \infty & \ldots \\ d_{n,1} & \ldots & \ldots & \infty \end{bmatrix}$$

其中 $d_{i,j}=\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2}$,那么图 G 的解 $S=(s_1,s_2,\ldots,s_n), n\in V$，则本题的数学模型为找到一个解 S 使得 $\sum_{k=1}^{k=n-1} D_{k,k+1}$ 取得最小值。

4.2 问题一

4.2.1 蚁群算法

蚁群算法是通过模拟蚂蚁群体觅食行径而提出来的一种模拟进化算法[3]。经过研究，蚂蚁总能找到从食物源到蚁穴的最短路线。蚂蚁个体之间通过外激素（即信息素）进行信息传递，当蚂蚁发现食物源并返回蚁穴告知同伴的途中，会释放信息素，便于同伴通过感知信息素的存在和其浓度，选择合适路径以找到食物源。蚂蚁在刚找到食物源或者蚁穴时释放的信息素量最多，并随着蚂蚁个体走过距离的增加，释放的信息素越来越少。当遇到图 1中所示路线时，即 A 点处有两条分支，蚂蚁可选择从经 B 点到达 D 点，也可选择经 C 点到达 D 点，显然 AB 的距离小于 AC 的距离，蚂蚁会根据路径长度，释放不同量的信息素，给同伴此条路径的信息[4]。

这里把点胶机的点胶头用蚂蚁来代替，将要焊锡的位点用蚂蚁觅食的地方来表示，进而把点胶机焊锡的过程抽象为蚂蚁觅食，以便于利用蚁群算法来求解该问题。

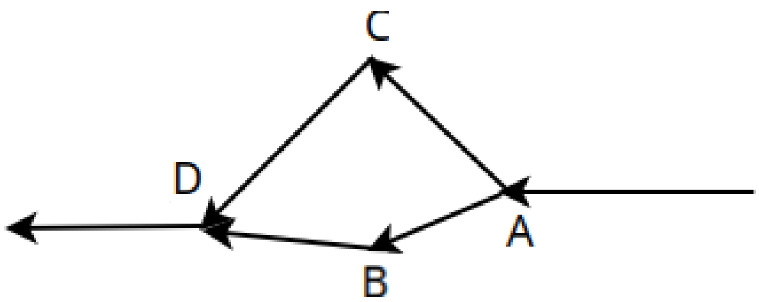


图 1: 蚁群的行为特点

信息素会随时间挥发，因而路上的信息素浓度与蚂蚁经过的个数和释放信息素的量相关。而蚁群个体根据信息素的浓度，优先选择信息素浓度高的路径。

图 2是在迭代次数为 2000 时的输出图，总长度为 2946.44724482。存在多处两条线相互交叉的现象，有几处的交叉现象明显的增加了总路径的长度。表明了蚁群算法存在的不足之处，进而用遗传算法进行下一步的优化，以便于得到路径更短的输出结果。

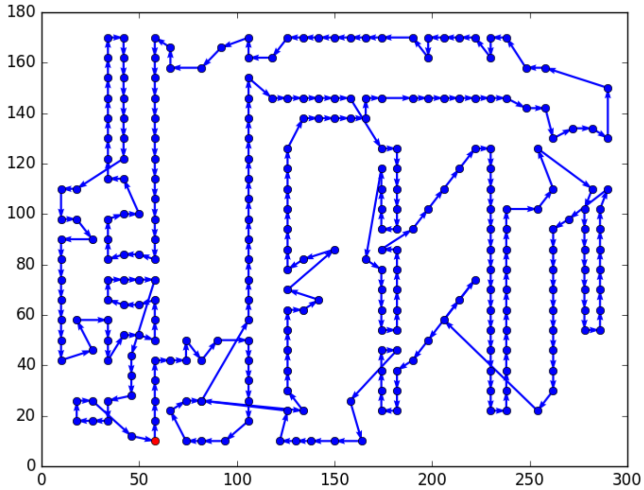


图 2: 蚁群算法得到的结果

4.2.2 改进贪婪算法[5]

贪婪算法是一种构建型启发式算法，其原理是求出任意两位点间欧式距离，建立图 G 的邻接矩阵 D 并为其赋值，其中 $d_{i,j}$ 表示位点 x_i 与 x_j 间的距离。将距离矩阵中两位点间距离按从小到大的顺序排列，从最短边开始向图 G 中添加，直至添加到图 G 成为一条回路为止。在添加过程中算法遵循以下原则：

1. 该节点的链接边数小于 2 。
2. 链接的边不会形成边数小于 n 的回路。

但贪婪算法在寻找过程中并没有主动使起点与终点回合，所以会造成最后返回路径非常长,如图 3所示,这时所得到的总长度为 2861.03928238。分析贪婪算法过程可知，算法最后产生的跨度主要由于算法本身没有确定边的拼接方向,依照这种思路对贪婪算法进行改进。根据 Held 与 Karp 提出的 Held-Karp 模型[6]，我们使用一个向量 $\pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_k)$ 对贪婪算法的距离矩阵 D 进行改造，如式 1。

$$D' = \begin{cases} d_{i,j} = d_{i,j} - \pi_i - \pi_j & i \neq \text{j} \\ d_{i,j} = M & i = \text{j} \end{cases} \tag{1}$$

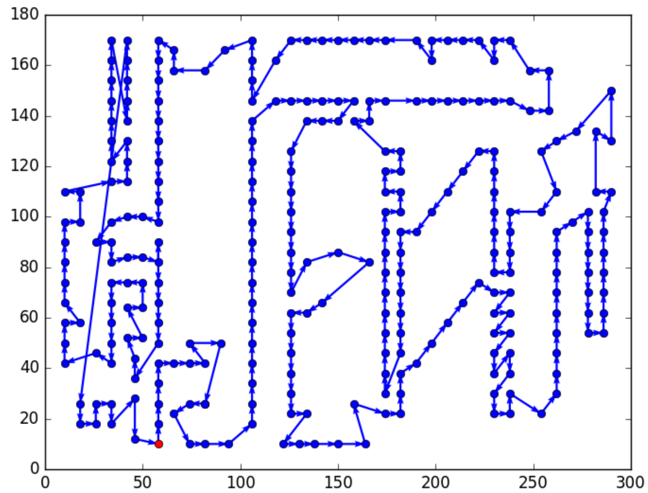


图 3: 贪婪算法得到的结果

其中 M 为一个足够大的数，len_k 是 k 号点到中心的距离，，$\overline{len}$ 是所有点到中心距离的平均 π_k 由式 2构造，α 为比例系数，比例系数越大算法就越倾向于先添加外围的点。

$$\begin{cases} \pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k), \pi_k = \alpha \cdot (len_k - \overline{len}) \\ len_k = \sqrt{(x_0 - x_k)^2 + (y_0 - y_k)^2} \\ \overline{len} = \frac{\sum_{k=0}^{k=n} len_k}{n} \\ x_0 = \frac{\sum_{k=0}^{k=n} x_k}{n}, y_0 = \frac{\sum_{k=0}^{k=n} y_k}{n} \end{cases} \tag{2}$$

根据改进贪婪算法得到最终结果如图 4所示，总长度为 2791.27883397。

4.2.3 遗传算法

遗传算法是模仿生物进化过程的一种算法，它以自然选择和遗传学中的复制、变异和交叉等自然规律为理论依据。利用遗传算法求解问题，首先需要将模型的解以适当的方式进行编码，并根据模型的目标建立个体适应度函数，然后随机生成初始种群（即一组初始的可行解），再重复对种群进行选择、交叉、变异等遗传操作直到种群成熟，停止优化?。对于 NP 困难问题智能算法是可行的选择，我们选用遗传算法对问题一进行建模求解，并且根据实际题目的要求对遗传算法进行微调。

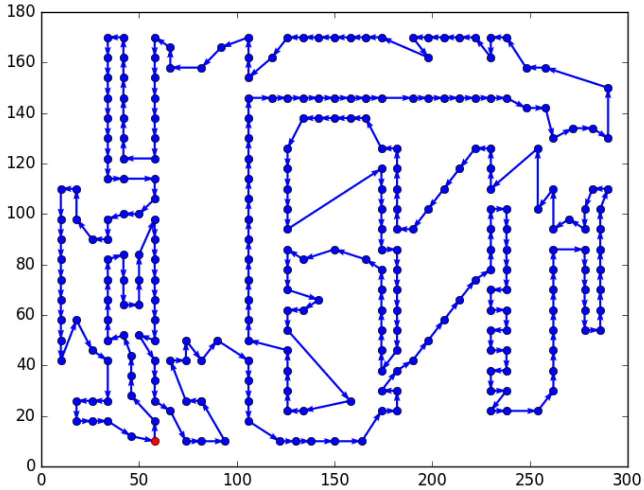


图 4: 改进贪婪算法得到的结果

在本题所用的遗传算法中，种群个体结构如图 5所示，突变算子是指让种群中某个个体的某些基因突变的算子，由于本题限定了初始位置

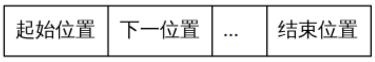


图 5: 算法中的个体

与结束位置，所以个体基因中的起始位与结束位是固定的不可以被突变算子改变，并且每个节点只能经过一次，按照以上要求突变算子在种群迭代中其过程如图 6所示。

图 6: 突变算子

同样的对于算法中的交叉算子，它是使有效基因遗传下去的主要算子，在交叉过程中同样应该遵守第一位与最后一位不可算在交叉过程中的原则，如图 7所示。

使用上述算法结构对本问题所给的数据进行种群演化，经过长时间算法运行，得到结果如图 8(a)，总长度为 2775.273329，这个结果并不能

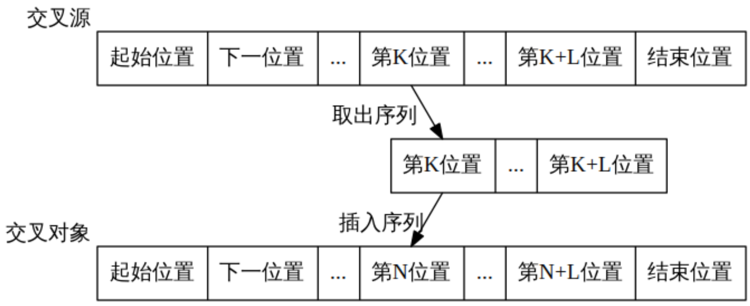
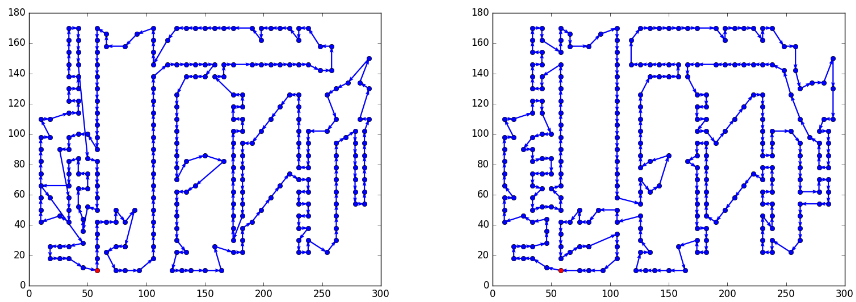


图 7: 交叉算子

让人满意，通过查阅文献，我们找到了针对 TSP 问题改进遗传算法的方案[7]，通过论文中所给方法建立改进过的遗传算法，引入浓度控制选择策略保证群体的多样性，考虑到边的邻接关系，构建贪婪交叉算子和启发式倒位变异算子来提高算法的收敛速度，较好地解决了群体多样性和收敛速度的矛盾，最终得到结果如图 8(b) 所示，总长度为 2694.90395028。



(a) 未改进的结果　　(b) 改进后的结果

图 8: 遗传算法结果

4.3　问题二

根据题目中的要求，不预先设定起点和终点，即点胶机的起点和终点可不同，因而考虑路径更短的链连接电路板上所有位点；由于第二问中要对一万张电路板进行焊锡，这就对算法效率有更高的要求，我们采用如下方案进行求解：

1. 求出一个图 G 的解 S，首尾不需要相接。

2. 从 S 的起点移动到 S 的终点，完成一块电路板的焊锡。

3. 把上一步的终点作为起点，，直至完成其余各张电路板的焊锡工艺。

4.3.1 一个链式解

根据上述要求，虽然蚁群算法可以获得问题的满意解，但是其运行过程十分漫长不适用于对一万张电路板的处理，不满足对效率的要求；贪婪算法的时间复杂度底运行速度快，于是利用贪婪算法获得链式满意解，如图 9所示，总长度为 2669.605729。

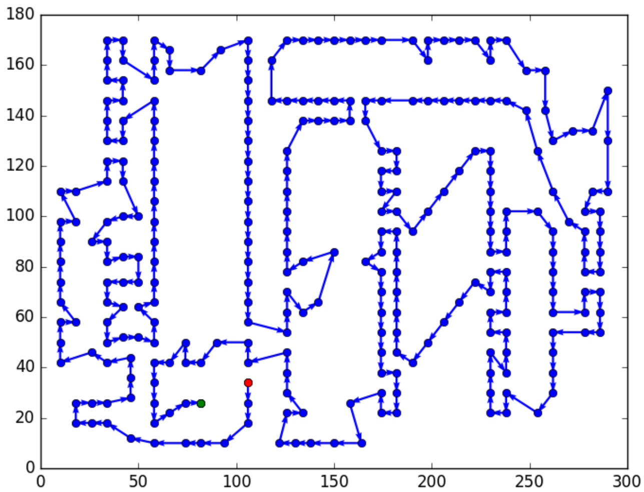


图 9: 贪婪算法得到的结果

5 结果分析与检验

针对问题一，采用蚁群算法对模型的求解时，设定蚂蚁个数为 31，经过 2000 次迭代，得到最佳路线长度为 2946.44724482，其顺序如图 2所示，图中的路径多处出现相互交叉的现象，显然不是最短路线，且时间复杂度也较大；通过贪婪算法对模型求解时，出现两局部连接时连接路径太长的现象，经过对算法的改进，得到改进贪婪算法的效率大大提高，且经过求解得到最佳路线长度为 2791.27883397，其顺序如图 4所示。在选用遗传算法对模型的求解时，进行多次迭代，得到最佳路线长度为

2694.90395028，其顺序如图 10所示。综上对结果的分析不难发现，随着

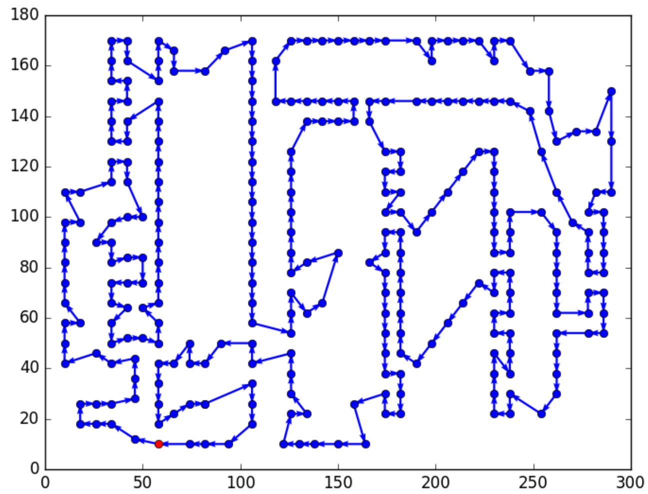


图 10: 改进后遗传算法结果

算法的优化，比较以上四种算法，其中的遗传算法的结果是最短的，求解的路径交叉部分最少，最佳路线长度最短。

针对问题二，由于题目要求不预先设定起点和终点，于是采用算法效率较高的遗传算法对一万张该类型电路板焊锡路径的最优顺序进行求解，得到的链式解并计算路径长度，最佳路径长度为 2669.605729。

6 模型评价

对于问题一，建立适当的数学模型并运用蚁群算法对其求解。蚁群算法具有较强的 Robus（鲁棒性），对初始路线的选择要求比较低，求解结果不依赖于初始路线的选择，且在搜索过程中不需人工调整；其次它是一种正反馈算法，通过蚁群个体对路径上信息素的感知确定路线，保证了相对优良的信息能够被保存下来，在一定程度上可加快进化进程；但是蚁群算法存在不足之处，在算法初期，各条路径上信息素浓度相差不大，可能产生不可预测的群体行为，且算法初期求解缓慢；随着蚂蚁数目的增加，算法的全局搜索能力越强，迭代次数越多，算法的收敛速度越慢，影响算法效率，而减少蚂蚁的数目，则容易使算法陷入局部最优解、得到非最佳路线的问题，算法存在上述不足亟待改进。

因而，我们采用遗传算法对此问题再次求解，遗传算法是模仿自然界生物进化过程中的选择、交叉和变异过程搜索最优解的方法，具有快速全局搜索的能力。根据个体的适应度大小选择更优个体，根据交叉算子的交叉原则进行组合、交叉和变异，生新一代群体，如此反复操作，使种群不断向更优的方向进化，克服了算法陷入局部最优解的缺点；但是遗传算法的时间复杂度偏大、进化代数多，影响算法运算效率。

这里进行试探性引用贪婪算法进行求解，我们引进贪婪算法并对其进行优化，得到改进贪婪算法。贪婪算法是将整体分为一个一个的小局部，对局部求最优解，然后再将每一个小的局部进行连接，对局部扩大以求得整体的最优解；但是这样会使得其中存在的问题也会扩大化，虽然每个局部均可求得最优解，但是两个局部起点和终点间的距离是不确定的，连接两局部的距离也就不可预测；于是对贪婪算法进行改进，首先求出各点距中心的距离，确定边的拼接方向，求得整体的最优解。改进后的贪婪算法相对于蚁群算法和遗传算法的时间复杂度明显变小，继承了贪婪算法的部分优点，并且在最终结果的求解中，改进后的贪婪算法没有了几条路线相互交叉的现象，从几何的知识上可以得出路径的总长度会有所减少，相对与以上运用的几个算法进行求解的结果而言，已经得到大幅度的改进；但是从结果来看利用贪婪算法求得的解不如利用遗传算法求得的结果优。

参考文献

[1] GUTIN G, PUNNEN A P. The traveling salesman problem and its variations : Vol 12[M]. [S.l.] : Springer Science & Business Media, 2006.

[2] 楼建华. 数学建模与数学实验 [J]. 黑龙江高教研究, 2003(3) : 126–127.

[3] 士勇, 永强, 研. 蚁群算法及其应用 [M]. [S.l.] : 哈尔滨工业大学出版社, 2004.

[4] 马良, 项培军. 蚂蚁算法在组合优化中的应用 [J]. 管理科学学报, 2001, 4(2) : 32–37.

[5] 饶卫振, 金淳. 基于求解 TSP 问题的改进贪婪算法 [J]. 运筹与管理, 2012, 21(6) : 1–9.

[6] HELD M, KARP R M. The traveling-salesman problem and minimum spanning trees[J]. Operations Research, 1970, 18(6) : 1138–1162.

[7] 谢胜利, 唐敏, OTHERS. 求解 TSP 问题的一种改进的遗传算法 [J]. 计算机工程与应用, 2002, 38(8) : 58–60.