

هوش مصنوعی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دکتر رهبان

بهار ۱۴۰۳

مهدی علی نژاد، ۴۰۱۱۰۶۲۶۶

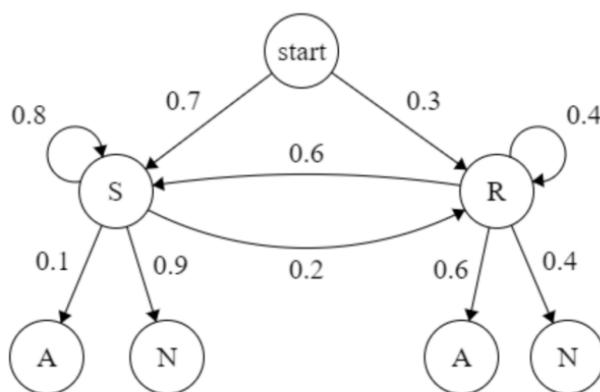


تمرین سوم تئوری، بخش دوم

سوال ۱

۴. (۱۰ نمره، درجه سختی ۴) Markov chain زیر که مربوط به احتمال تصادف کردن در روزهای آفتابی و بارانی هست را در نظر بگیرید. مقدار $P_{\infty}(\text{Accident})$ را حساب کنید.

($S : \text{Sunny} - R : \text{Rainy} - A : \text{Accident} - N : \text{No - accident}$)



$$P_{\infty}(\text{Accident}) = P_{\infty}(\text{Accident}|S)P_{\infty}(S) + P_{\infty}(\text{Accident}|R)P_{\infty}(R)$$

$$P_{\infty}(S) = P(S|S)P_{\infty}(s) + P(S|R)P_{\infty}(R) = 0.8P_{\infty}(S) + 0.6P_{\infty}(R) \rightarrow P_{\infty}(S) = 3P_{\infty}(R)$$

$$P_{\infty}(S) + P_{\infty}(R) = 1 \xrightarrow{P_{\infty}(S)=3P_{\infty}(R)} P_{\infty}(S) = \frac{3}{4}, P_{\infty}(R) = \frac{1}{4}$$

$$P_{\infty}(\text{Accident}) = 0.1 \times \frac{3}{4} + 0.6 \times \frac{1}{4} = \frac{9}{40}$$

۵. (۱۵ نمره، درجه سختی ۴) توماس و مینهو می‌خواهند رفتار هیولای داخل ماز را پیش‌بینی کنند. طبق بررسی آنها، هیولا ممکن است خواب یا بیدار باشد و در هر وضعیت ممکن است صدایی از خود تولید کند. حال با یافته‌های زیر به سوالات پاسخ دهید:

- احتمال بیدار بودن هیولا در لحظه‌ی t بدون دانش قبلی، 0.7 است.
- اگر هیولا در لحظه‌ی t خواب باشد، به احتمال 0.6 در لحظه‌ی $t + 1$ هم خواب است و اگر بیدار باشد، به احتمال 0.7 در لحظه‌ی بعدی هم بیدار است.
- اگر هیولا بیدار باشد به احتمال 0.7 و اگر خواب باشد، به احتمال 0.1 صدا تولید می‌کند.

(آ) برای این مسئله یک *Hidden Markov Model* به همراه جداول احتمالاتی آن طراحی کنید.
 (ب) با استفاده از الگوریتم *forward*، احتمال $Observation = no\ noise, noise, noise$ را بدست آورید.

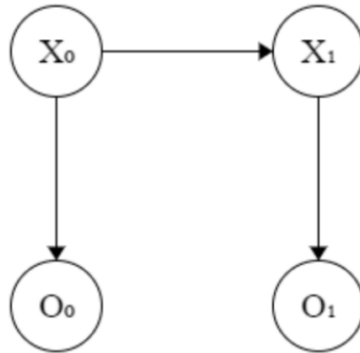
(آ) بیدار یا خواب بودن هیولا زنجیره‌ی مارکو ما را تشکیل می‌دهند و شنیدن صدا خروجی هر مرحله است

S_t	$S_{(t+1)}$	$P(S_{(t+1)} S_t)$	S_t	N_t	$P(N_t S_t)$	S_1	$P(S_1)$
+s	+s	0.6	+s	+n	0.1	+s	0.3
+s	-s	0.4	+s	-n	0.9	-s	0.7
-s	+s	0.3	-s	+n	0.7		
-s	-s	0.7	-s	-n	0.3		

(ب) نیاز است تا احتمال زیر را حساب کنیم.

$$\begin{aligned}
 P(N_1 = -n, N_2 = +n, N_3 = +n) &= \sum_{S_3} P(S_3, N_1 = -n, N_2 = +n, N_3 = +n) = \\
 &= P(+n_3 | +s_3) \sum_{S_2} P(+s_3 | S_2) P(S_2, +n_2, -n_1) + P(+n_3 | -s_3) \sum_{S_2} P(-s_3 | S_2) P(S_2, +n_2, -n_1) \\
 &= 0.1 * (0.6 * P(+s_2, +n_2, -n_1) + 0.3 * P(-s_2, +n_2, -n_1)) + 0.7 * (0.4 * P(+s_2, +n_2, -n_1) + 0.7 * P(-s_2, +n_2, -n_1)) \\
 &= 0.34 * P(+s_2, +n_2, -n_1) + 0.52 * P(-s_2, +n_2, -n_1) \\
 P(+s_2, +n_2, -n_1) &= P(+n_2 | +s_2) \sum_{S_1} P(+s_2 | S_1) P(S_1, -n_1) = 0.1 * (0.6 * P(+s_1, -n_1) + 0.3 * P(-s_1, -n_1)) \\
 P(-s_2, +n_2, -n_1) &= P(+n_2 | -s_2) \sum_{S_1} P(-s_2 | S_1) P(S_1, -n_1) = 0.7 * (0.4 * P(+s_1, -n_1) + 0.7 * P(-s_1, -n_1)) \\
 P(+s_1, -n_1) &= P(-n_1 | +s_1) P(+s_1) = 0.9 * 0.3 \\
 P(-s_1, -n_1) &= P(-n_1 | -s_1) P(-s_1) = 0.3 * 0.7 \\
 &\downarrow \text{calculating} \\
 P(+s_2, +n_2, -n_1) &= 0.1 * (0.6 * 0.27 + 0.3 * 0.21) = 0.0225 \\
 P(-s_2, +n_2, -n_1) &= 0.7 * (0.4 * 0.27 + 0.7 * 0.21) = 0.1785 \\
 &\downarrow \text{calculating} \\
 P(N_1 = -n, N_2 = +n, N_3 = +n) &= 0.34 * 0.0225 + 0.52 * 0.1785 = 0.10047
 \end{aligned}$$

۶. (۱۵ نمره، درجه سختی ۵) مدل HMM زیر را در نظر بگیرید. میدانیم O_i مشاهدات (observation) هستند.



X_t	O_t	$P(O_t X_t)$	X_t	X_{t+1}	$P(X_{t+1} X_t)$	$X.$	$P(X.)$
۰	A	۰/۹	۰	۰	۰/۵	۰	۰/۳
۰	B	۰/۸	۰	۱	۰/۵	۱	۰/۷
۱	A	۰/۲	۱	۰	۰/۴		
۱	B	۰/۸	۱	۱	۰/۶		

(آ) به ازای $X.$ های ممکن، مقادیر احتمال $P(X., O. = B)$ را بدست بیاورید.

(ب) توزیع احتمال $P(X_1, O. = B, O_1 = B)$ را بیابید.

(ج) توزیع احتمال $P(X_1|O. = B, O_1 = B)$ را محاسبه کنید.

(آ)

$$P(X_0, O_0 = B) = P(O_0 = B|X_0)P(X_0)$$

X_0	$P(X_0, O_0 = B)$
0	0.03
1	0.56

(ب)

$$P(X_1, O_0 = B, O_1 = B) = P(O_1 = B|X_1)\sum_{X_0} P(X_1|X_0)P(X_0, O_0 = B)$$

$$= P(O_1 = B|X_1) \left(0.03P(X_1|X_0 = 0) + 0.56P(X_1|X_0 = 1) \right)$$

X_1	$P(X_1, O_1 = B, O_0 = B)$
0	0.0239
1	0.2808

(ج) فقط کافیت جدول قبل را normalize بکنیم.

X_1	$P(X_1 O_1 = B, O_0 = B)$
0	0.0784
1	0.9216

۷. (۱۵ نمره، درجه سختی ۵) فرض کنید می‌خواهیم با استفاده از یک HMM سیستمی طراحی کنیم که با گرفتن صدای یک قطعه موسیقی، آن را به نت تبدیل کند. در این مدل، observation ها فرکانس هستند و variable hidden ها نت مربوط به آن فرکانس است (که می‌خواهیم آن را پیدا کنیم). برای سادگی مدل فرض می‌کنیم که قطعه مورد نظر فقط از چهار نت زیر تشکیل شده است. (متغیرهای پنهان متغیرهای گسسته هستند که یکی از مقادیر زیر را می‌توانند بگیرند):

Note	Frequency (Hz)
D	293.7
E _b	311.1
F	349.2
G	392.0

Table 1: Values for X_t

متغیر E_t فرکانس صدای شنیده شده در لحظه t را نشان می‌دهد و یک متغیر پیوسته است. فرکانس‌های شنیده شده برای ۸ نت اول یک قطعه به شکل زیر است:

Evidence	Observed (Hz)	$P(e X = D)$	$P(e X = E_b)$	$P(e X = F)$	$P(e X = G)$
E_1	389.1	0.011	0.023	0.140	0.712
E_2	395.4	0.008	0.019	0.120	0.763
E_3	393.0	0.009	0.021	0.131	0.830
E_4	315.2	0.181	0.687	0.033	0.018
E_5	350.0	0.024	0.170	0.883	0.103
E_6	345.3	0.031	0.198	0.794	0.095
E_7	357.8	0.038	0.201	0.692	0.083
E_8	294.1	0.906	0.310	0.055	0.004

Table 2: Observed Frequencies and Emission Probabilities

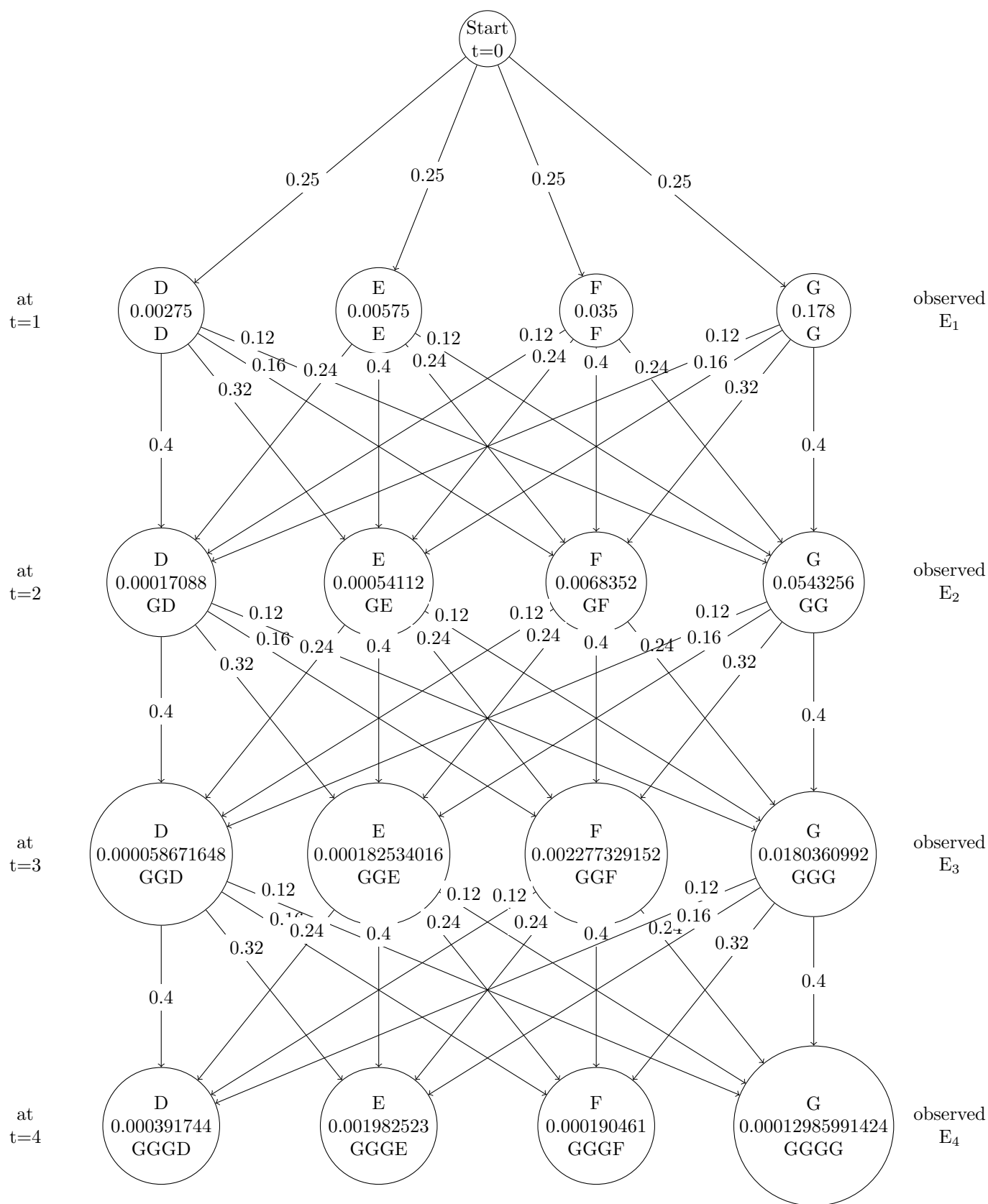
برای احتمال‌های Transition هم فرض می‌کنیم که احتمال رفتن از یک نت به نت دیگر، رابطه خطی با عکس فاصله دو نت از هم دارد. (برای سادگی، فاصله بین نت‌های متوالی را یکسان در نظر بگیرید و همچنین احتمال رفتن از یک نت به همان نت ۴۰ درصد است.)

(آ) با استفاده از الگوریتم Viterbi این قطعه را به نت درآورید (در واقع باید محتمل‌ترین نت را برای هر کدام از مقادیر X_1 تا X_8 مشخص کنید). احتمال‌های اولیه را یکسان و برابر 0.25 در نظر بگیرید. برای طولانی نشدن جواب، به نوشتن محاسبات برای ۴ نت اول اکتفا کنید. راهنمایی: این نت معروف‌ترین موتیف موسیقی کلاسیک است:)

(ب) در فرایند Particle Filtering فرض کنید با چهار ذره با مقادیر D و E_b و F و G شروع کرده‌ایم. احتمال اینکه سومین نت «سل» باشد را بدست بیاورید (در واقع دنبال $P(X_3 = G|e_{1:3})$ هستیم). برای مرحله resampling و elapse time از اعداد تصادفی زیر استفاده کنید:

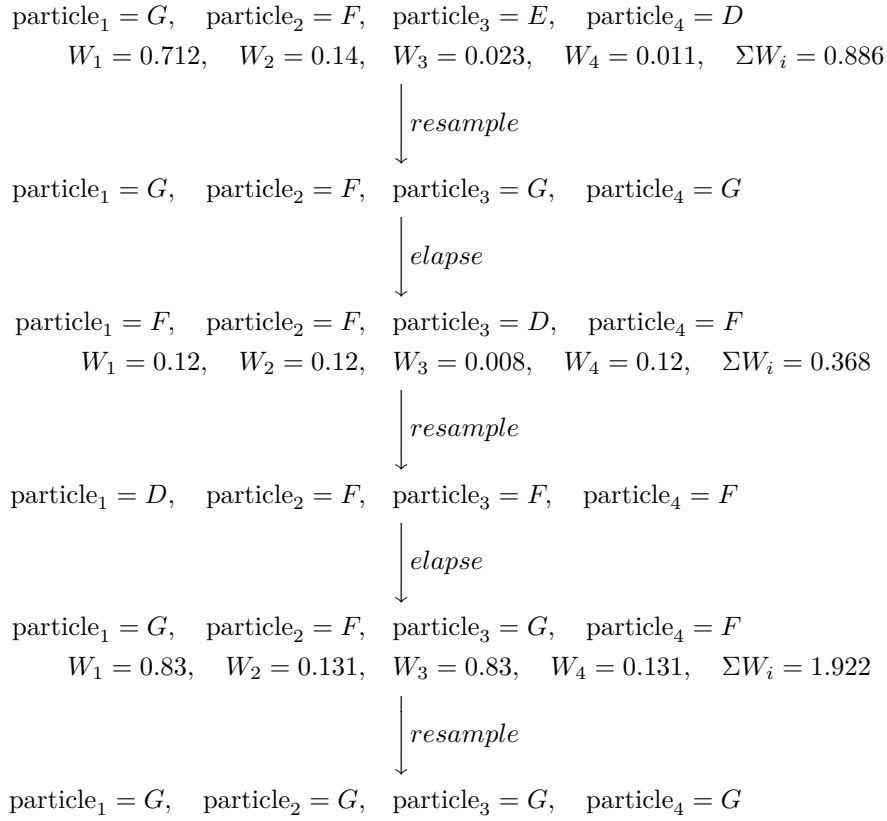
0.6284, 0.1842, 0.5482, 0.770, 0.3556, 0.8090, 0.1113, 0.5338, 0.0043, 0.3455, 0.2198, 0.2875, 0.0570, 0.8803, 0.5927, 0.6177, 0.5034, 0.8624, 0.7918, 0.3254

توجه کنید که در مرحله اول هم باید ابتدا این چهار ذره را وزن‌دهی و resample کنید.



پس محتمل ترین مسیر برابر است با: GGGEFFFD با توجه به راهنمایی :

(ب) در استفاده از اعداد شانس داده شده اینگونه عمل می کنیم که اگر بودن عدد در چندین بازه مد نظر بود، بازه ها به ترتیب از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم و عدد در بین هر بازه ای افتاد، ان را انتخاب می کنیم. همچنین در صورت برابری چند بازه، بازه ای زودتر می آید که ترتیب الفبایی نوت آن زودتر باشد. در صورت برابری در این صورت نیز آنی که شماره ی پارتیکل کمتری داشته باشد اول می آید.



طبق نتایج به دست آمده با ۴ پارتیکل ۱ $P(X_3 = G | e_{1:3}) =$