№1

$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$ – матрица параллельного переноса на вектор (a,b), то есть перехода от системы координат с центром в $(0,0)$ в систему координат с центром в (a,b).

$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица поворота на φ вокруг центра координат

$M = S^{-1} R_\varphi S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$ – матрица поворота на φ с центром в ~~A~~ (a,b).

№3

Пусть $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & 1 \end{pmatrix}$, $R(\varphi)$ – матрица поворота ~~во~~ на угол φ вокруг прямой, проходящей через 0, с напр. вект. (l,m,n).

Тогда $R(\varphi)$ – матрица по преобр. в системе координат с центром (a,b,c) и параллельными исходным осями, S_1 – матрица перехода в эту систему координат, => искомая матрица – $M = \cancel{S_1^{-1} R_\varphi S}\ S_1^{-1} R(\varphi) S$

Пусть ~~S~~ S_2 – матрица поворота, переводящая прямую с напр. вектором $(0,0,1)$ в прямую с напр. вектором ~~(a~~ (l,m,n), ~~тот~~ (то есть точку $(0,0,1)$ в точку (l,m,n)), ~~$R_z(\varphi)=$~~

$$R_z(\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ – матрица поворота на угол φ вокруг оси Oz.

Тогда ~~$R_\varphi = I$~~ $R(\varphi)=$ ~~R_z~~ $S_2^{-1}R_z(\varphi)S_2$.

Пусть R_x – матрица поворота вокруг OX, переводящая $(l,0,K)$ в ~~$(0,0,1)$~~ (l,m,n), R_y – матрица поворота вокруг OY, переводящая $(0,0,1)$ в $(l,0,K)$, $K=\sqrt{m^2+n^2}$

Тогда $S_2=R_yR_x$,

$$R_y=\begin{pmatrix}K & 0 & -l & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ l & 0 & K & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad R_x=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{n}{K} & -\frac{m}{K} & 0\\ 0 & \frac{m}{K} & \frac{n}{K} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(при $K=0$ считаем, что $R_x=Id$, т.к. $m=n=0$, $(l,0,K)=(l,m,n)$)

Итак, матрица всего преобразования $M=$

$$=S_1^{-1}R(\varphi)S_1=S_1^{-1}S_2^{-1}R_z(\varphi)S_2S_1=S_1^{-1}R_x^{-1}R_y^{-1}R_z(\varphi)R_yR_xS_1=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -a & -b & -c & 1\end{pmatrix}\cdot\cancel{\begin{pmatrix}1 & \\ & \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}\end{pmatrix}}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{n}{\sqrt{n^2+m^2}} & \frac{m}{\sqrt{n^2+m^2}} & 0\\ 0 & -\frac{m}{\sqrt{n^2+m^2}} & \frac{n}{\sqrt{n^2+m^2}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{n^2+m^2} & 0 & l & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -l & 0 & \sqrt{n^2+m^2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{n^2+m^2} & 0 & -l & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ l & 0 & \sqrt{n^2+m^2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{n}{\sqrt{n^2+m^2}} & \frac{-m}{\sqrt{n^2+m^2}} & 0\\ 0 & \frac{m}{\sqrt{n^2+m^2}} & \frac{n}{\sqrt{n^2+m^2}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ a & b & c & 1\end{pmatrix} \text{ при } n^2+m^2\neq 0,$$

$$M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -a & -b & -c & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & l & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -l & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -l & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ l & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ a & b & c & 1\end{pmatrix} \text{ при } n^2+m^2=0$$

№8

Первый поворот задаётся кватернионом $q_1=\cos\frac{\pi/2}{2}+\sin\frac{\pi/2}{2}\left((1,0,0)\begin{pmatrix}i\\j\\k\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{\sqrt2}(1+i)$, второй поворот - кватернионом $q_2=\cos\frac{\pi/2}{2}+\sin\frac{\pi/2}{2}\left((0,1,0)\begin{pmatrix}i\\j\\k\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{\sqrt2}(1+j)$, их композиция - кватернион $q=q_2q_1=$
$=\frac{1}{\sqrt2}(1+j)\cdot\frac{1}{\sqrt2}(1+i)=\frac12(1+i+j-k)=\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cdot\left(\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{-1}{\sqrt3}\right)\begin{pmatrix}i\\j\\k\end{pmatrix}\right)\Rightarrow$
$\Rightarrow$ итоговый поворот - поворот на $\frac{2\pi}{3}$ вокруг оси с направляющим вектором $\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{-1}{\sqrt3}\right)$