Соковнин Игорь Леонидович

Линейная алгебра

Урок 2. Практическая задание

Матрицы и матричные операции. Часть 1

линейная алгебра

Урок 2. Матрицы и матричные операции. Часть 1.

Практическое задание

1. Установить, какие произведения матриц $A \cdot B$ и BA определены, и найти размерности полученных матриц: $m_A \times n_A$ $m_B \times n_A$

а) A - матрица 4×2, B - матрица 4×2;

Определить оба произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ можно, только в том случае, когда число столбцов A совпадает с числом строк B, а число строк A совпадает с числом столбцов B.

Матрицу A можно умножить на матрицу B, только в случае если n - число столбцов матрицы A $= m$ числу строк матрицы B.

а) Матрица A: $m_A = 4$, $n_A = 2$

Матрица B: $m_B = 4$, $n_B = 2$

$A \cdot B$ не определено т.к. $\underset{2}{n_A} \neq \underset{4}{m_B}$

$B \cdot A$ не определено т.к $\underset{2}{n_B} \neq \underset{4}{m_A}$

б) A - матрица 2×5, B - матрица 5×3

$A \cdot B$ не определено т.к $n_A \neq m_B$

$B \cdot A$ не определено т.к $n_B \neq m_A$

1.1

в) A - матрица $\overset{m_A}{8} \times \overset{n_A}{3}$, B - матрица $\overset{m_B}{3} \times \overset{n_B}{8}$

A · B определено $m_A = n_B$

B · A определено $m_B = n_A$

г) A - квадратная матрица $\overset{m_A}{4} \times \overset{n_A}{4}$, B - квадратная матрица $\overset{m_B}{4} \times \overset{n_B}{4}$

A · B определено $m_A = n_B$

B · A определено $m_B = n_A$

2. Найти сумму и произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{1+4}{5} & \overset{-2-1}{-3} \\ \underset{3+0}{3} & \underset{5+0}{5} \end{pmatrix}, \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$D = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 - 2 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}$$

1.2

3. Из закономерностей сложения и умножения матриц на число можно сделать вывод, что матрицы одного размера образуют линейное пространства. Вычислить линейную комбинацию

$3\hat{A} - 2\hat{B} + 4\hat{C}$ для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{3\hat{A} - 2\hat{B} + 4\hat{C}} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ 9 & -18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3-0+8 & 21-10-16 \\ 9-4+4 & -18+2+4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 11 & -5 \\ 9 & -12 \end{pmatrix}}$$

4. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Вычислит AA^T и A^TA

Транспонированная матрица $A^T = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot4+1\cdot1 & 4\cdot5+1(-2) & 4\cdot2+1\cdot3 \\ 5\cdot4-2\cdot1 & 5\cdot5-2(-2) & 5\cdot2-2\cdot3 \\ 2\cdot4+3\cdot1 & 2\cdot5+3(-2) & 2\cdot2+3\cdot3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 17 & 18 & 11 \\ 18 & 29 & 4 \\ 11 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot4+5\cdot5+2\cdot2 & 4\cdot1+5(-2)+2\cdot3 \\ 1\cdot4-2\cdot5+2\cdot3 & 1\cdot1-2(-2)+3\cdot3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 16+25+4 & 4-10+6 \\ 4-10+6 & 1+4+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$$

1.3

Матрицы и матричные операции. Часть 2

Линейная алгебра

Урок 2. Матрицы и матричные операции.

Часть 2

Практическое задание

1) Вычислить определитель:

а) $\det A$ - ? $A = \begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix}$

$\det A = \begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin x \cdot \sin x - (-\cos x) \cdot \cos x =$

$= \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Ответ: $\det A = 1$

б) $\det A = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 4 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} +$

$+ (-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} =$

$= 4(5 \cdot 9 - 0 \cdot 1) = 4 \cdot 45 = 180$

Ответ: $\det A = 180$

2.1

1.

в) $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} +$

$+ 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = (\underbrace{5 \cdot 9}_{45} - \underbrace{6 \cdot 8}_{48}) - 2(\overbrace{4 \cdot 9}^{36} - \underbrace{7 \cdot 6}_{42}) + 3(\overbrace{4 \cdot 8}^{32} - \underbrace{7 \cdot 5}_{35}) =$

$= -3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot (-3) = -3 + 12 - 9 = 0$

ответ: $\det(A) = 0$

2. Определитель матрицы $A = 4$ найти:

а) $\det(A^2)$ - ?

$\det(A \cdot A) = \det(A) \cdot \det(A) = 16$ - по 9-му свойству по опред-ю определителя, матрица A квадратная!

б) $\det(A^T) = \det(A)$ - по 1-му свойству определителя

в) $\det(2A) = 2^n \det(A) = 2^n \cdot 16$

где n - кол-во столбцов в матрице A

(размерность $A = n \times n$)

по 2-му свойству определителя.

т.к у нас n столбцов $\Rightarrow$ каждый из них умножается на 2.

2. 2

3. Доказать, что матрица A вырожденная.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{pmatrix}$$

Матрица называется <u>сингулярной</u>, или <u>вырожденной</u>, если её определитель равен нулю.

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{vmatrix} = \overbrace{7\cdot 2}^{\text{по 2 св-ву определителя}} \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 13 \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{7\cdot 2\cdot(-1)}_{} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 13 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{1-я и 2-я} \\ \text{строки} \\ \text{равны} \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow \boxed{\det(A) = 0}$ – использовали 5-е свойство определителя

использовали 2-е свойство определителя.

2.3

④ Найти ранг матрицы.

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

3-я строка является суммой 1-й и 2-й строки, следовательно её можно отбросить.

$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Следовательно ранг матрицы $A = 2$.

2.4