Линейная алгебра

Урок 1. Линейное пространство. Основные понятия. Часть 1

Урок 1

1. Исследовать на линейную зависимость:

$$f_1(x) = e^x, f_2(x) = 1, f_3(x) = x + 1, f_4(x) = x - e^x.$$

2. Исследовать на линейную зависимость:

$$f_1(x) = 2, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2, f_4(x) = (x + 1)^2$$

3. Найти координаты вектора $x = (2, 3, 5) \in \mathbb{R}^3$ в базисе $b_1 = (0, 0, 10)$, $b_2 = (2, 0, 0)$, $b_3 = (0, 1, 0)$.

##**4.** Найти координаты вектора $3x^2 - 2x + 2 \in \mathbb{R}^3[x]$:

а) в базисе $1, x, x^2$;

б) в базисе $x^2, x - 1, 1$.

В [1]:
```
import numpy as np
```

Задача 1

Исследовать на линейную зависимость:

$$f_1(x) = e^x, f_2(x) = 1, f_3(x) = x + 1, f_4(x) = x - e^x.$$

Решение

Заметим, что

$$f_4(x) = x - e^x = (x + 1) - 1 - e^x = f_3(x) - f_2(x) - f_1(x)$$

Следовательно вектор $f_4(x) = f_3(x) - f_2(x) - f_1(x)$, есть линейная комбинация векторов $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$, из чего можно сделать вывод, что $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = 1$, $f_3(x) = x + 1$ и $f_4(x) = x - e^x$ **линейно зависимы**

Задача 2

Исследовать на линейную зависимость:

$$f_1(x) = 2, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2, f_4(x) = (x + 1)^2$$

Решение

Заметим, что

$$f_4(x) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 = \frac{1}{2}f_1(x) + 2f_2(x) + f_3(x)$$

Следовательно вектор $f_4(x) = \frac{1}{2} f_1(x) + 2f_2(x) + f_3(x)$, есть линейная комбинация векторов $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$, из чего можно сделать вывод, что $f_1(x) = 2,\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = x^2$ и $f_4(x) = (x+1)^2$ **линейно зависимы.**

Задача 3

Найти координаты вектора $x = (2, 3, 5) \in \mathbb{R}^3$ в базисе $b_1 = (0, 0, 10)$, $b_2 = (2, 0, 0)$, $b_3 = (0, 1, 0)$.

В [2]:
```
b_1 = np.array([0, 0 , 10])
b_2 = np.array([2, 0, 0])
b_3 = np.array([0, 1, 0])
print(f'Вектор b_1: {b_1}')
print(f'Вектор b_2: {b_2}')
print(f'Вектор b_3: {b_3}')
```

```
Вектор b_1: [ 0  0 10]
Вектор b_2: [2 0 0]
Вектор b_3: [0 1 0]
```

В [3]:
```
x = (1/2)*b_1 + 1*b_2 + 3*b_3
print(f'Вектор x: {x}')
```

```
Вектор x: [2. 3. 5.]
```

Решение

Новый базис

$$\begin{aligned} b_1 &= (0, 0, 10) \\ b_2 &= (2, 0, 0) \\ b_3 &= (0, 1, 0) \end{aligned}$$

Вектор

$$x = (2, 3, 5) = (2, 0, 0) + (0, 3, 0) + (0, 0, 5) = \frac{1}{2} b_1 + b_2 + 3b_3$$

Ответ: координаты вектора $x = (2, 3, 5) \in \mathbb{R}^3$ в базисе $b_1 = (0, 0, 10)$, $b_2 = (2, 0, 0)$, $b_3 = (0, 1, 0)$ равны $(1/2, 1, 3)$.

Задача 4

##**4.** Найти координаты вектора $S = 3x^2 - 2x + 2 \in \mathbb{R}^3[x]$:

а) в базисе $1,\ x,\ x^2$;

б) в базисе $x^2,\ x-1,\ 1$.

а) зададим базис из 3-х векторов:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0) \\ e_2 &= (0, x, 0) \\ e_3 &= (0, 0, x^2) \end{aligned}$$

Тогда вектор в этом базисе $S = 2 - 2x + 3x^2$ будет иметь вил:

$$S = 2e_1 - 2e_2 + 3e_3 = (2, -2, 3)$$

Ответ: координаты вектора $S = (2, -2, 3)$

b) зададим базис из 3-х векторов:

$$\begin{aligned} e_1 &= (x^2, 0, 0) \\ e_2 &= (0, x-1, 0) \\ e_3 &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

Тогда в этом базисе вектор $S = 3x^2 - 2x + 2$ будет иметь вил:

$$S = 3e_1 - 2e_2 + 0 \cdot e_3 = (3, -2, 0)$$

Ответ: координаты вектора $S = (3, -2, 0)$

В [ ]: