Соковнин Игорь Леонидович

Линейная алгебра

Урок 4. Системы линейных уравнений. Часть 1

1. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

2. Проверить на совместность и выяснить, сколько решений будет иметь система линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = -2. \end{cases}$

3. Проверить на совместность и выяснить, сколько решений будет иметь система линейных уравнений, заданная расширенной матрицей

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

4. Дана система линейных уравнений, заданная расширенной матрицей

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right).$$

Найти соотношение между параметрами a, b и c, при которых система является несовместной.

В [1]:
```python
import numpy as np
```

Задача 1

Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

Решение

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Приведём матрицу к ступенчатому виду

Вычтем из второй строки первую, умноженную на 2:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Вычтем из третьей строке первую:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

В итоге после преобразований мы получили матрицу треугльного вида, которая представляет следующую систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ \quad - x_2 + x_3 + 5x_4 = -2, \\ \qquad\quad - 2x_3 + 3x_4 = 4, \end{cases}$$

Необходимо переменную x4 принять в качестве свободной переменной и через нее выразить остальные переменные.

$$x_4 = c$$

Из 3-ой строки выражаем x_3

$$x_3 = \frac{3}{2}c - 2$$

Подставим x_3 во второе уравнение:

$$-x_2 + \frac{3}{2} \cdot c - 2 + 5 \cdot c = -2 \Rightarrow x_2 = \frac{13}{2} \cdot c,$$

а затем полученные x_2 и x_3 — в первое уравнение:

$$x_1 + \frac{13}{2} \cdot c + 2 - \frac{3}{2} \cdot c + 2 \cdot c = 0 \Rightarrow x_1 = -2 - 3 \cdot c.$$

Получаем решение

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 - 3 \cdot c. \\ x_2 &= \frac{13}{2} \cdot c, \\ x_3 &= \frac{3}{2}c - 2, \\ x_4 &= c. \end{aligned}$$

Для получения **частного решения**, приравняем переменную x_4 к 0:

$$\begin{aligned} x_4 &= 0 \\ x_3 &= -2 \\ x_2 &= 0 \\ x_1 &= -2 \end{aligned}$$

В [ ]:

В [ ]:

Теорема Кронекера — Капелли¶

Вернемся к матричному виду систем линейных уравнений

$$Ax = b.$$

Теорема

Необходимым и достаточным условием совместности системы из m уравнений с n неизвестными является равенство между собой рангов матрицы коэффициентов A и расширенной матрицы $\tilde{A}$

$$rank A = rank \tilde{A}.$$

Причем:

1) если $rank A = rank \tilde{A} = n$, где n — число неизвестных, то система определена, т. е. имеет единственное решение;
2) если $rank A = rank \tilde{A} < n$, то система имеет бесконечное количество решений;
3) если $rank A < rank \tilde{A}$, то система несовместна.

В [ ]:

Задача 2

Проверить на совместность и выяснить, сколько решений будет иметь система линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$

Запишем матрицу A в виде

В [2]:
```
a = np.array([[2, -5, -3], [1, 1, -1], [3, -1, 1] ])
print(f'Матрица A:\n{a}')
r = np.linalg.matrix_rank(a)
print(f'Ранг матрицы A: {r}')
```

```
Матрица A:
[[ 2 -5 -3]
 [ 1  1 -1]
 [ 3 -1  1]]
Ранг матрицы A: 3
```

В [3]:
```
# Вектор свободный членов
b = np.array([4, -17, 0])
print(f'Вектор b: {b}')
```

```
Вектор b: [  4 -17   0]
```

Расширенная матрицы A_t

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & -3 & -17 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

В [4]:
```
A_t = np.array([[1, 1, -1, 0], [3, -1, 1, 4], [2, -5, -3, -17]])
print(f'Расширенная матрица A_t:\n{A_t}')
r = np.linalg.matrix_rank(A_t)
print(f'Ранг матрицы A_t: {r}')
```

```
Расширенная матрица A_t:
[[  1   1  -1   0]
 [  3  -1   1   4]
 [  2  -5  -3 -17]]
Ранг матрицы A_t: 3
```

Число неизвестных **n=3**

Из теоремы Кронекера — Капелли следует, что то **система а) определена**, т. е. имеет единственное решение так как $rank A = rank \tilde{A} = n, (rank A = 3, rank \tilde{A} = 3, n = 3)$

В [ ]:

В [ ]:

б) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 5; \end{cases}$

В [5]:
```
a = np.array([[2, -4, 6], [1, -2, 3], [3, -6, 9] ])
print(f'Матрица A:\n{a}')
r = np.linalg.matrix_rank(a)
print(f'Ранг матрицы A: {r}')
```

```
Матрица A:
[[ 2 -4  6]
 [ 1 -2  3]
 [ 3 -6  9]]
Ранг матрицы A: 1
```

В [6]:
```
# Вектор свободный членов
b = np.array([1, -2, 5])
print(f'Вектор b: {b}')
```

```
Вектор b: [ 1 -2  5]
```

Расширенная матрицы A_t

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 9 & 5 \end{array}\right).$$

В [7]:
```
A_t = np.array([[2, -4, 6, 1], [1, -2, 3, -2], [3, -6, 9, 5]])
print(f'Расширенная матрица A_t:\n{A_t}')
r = np.linalg.matrix_rank(A_t)
print(f'Ранг матрицы A_t: {r}')
```

```
Расширенная матрица A_t:
[[ 2 -4  6  1]
 [ 1 -2  3 -2]
 [ 3 -6  9  5]]
Ранг матрицы A_t: 2
```

Число неизвестных **n=3**

Из теоремы Кронекера — Капелли следует, что **система (б) несовместна**, так как $rank A < rank \tilde{A}, (rank A = 1, rank \tilde{A} = 2)$

В [ ]:

В [ ]:

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = -2. \end{cases}$

В [8]:
```
a = np.array([[1, 2, 5], [3, 1, -8]])
print(f'Матрица A:\n{a}')
r = np.linalg.matrix_rank(a)
print(f'Ранг матрицы A: {r}')
```

```
Матрица A:
[[ 1  2  5]
 [ 3  1 -8]]
Ранг матрицы A: 2
```

В [9]:
```
# Вектор свободный членов
b = np.array([4, -2])
print(f'Вектор b: {b}')
```

```
Вектор b: [ 4 -2]
```

В [10]:
```
A_t = np.array([[1, 2, 5, 4], [3, 1, -8, -2]])
print(f'Расширенная матрица A_t:\n{A_t}')
r = np.linalg.matrix_rank(A_t)
print(f'Ранг матрицы A_t: {r}')
```

```
Расширенная матрица A_t:
[[ 1  2  5  4]
 [ 3  1 -8 -2]]
Ранг матрицы A_t: 2
```

Число неизвестных **n=3**

Из теоремы Кронекера — Капелли следует, что то **система (в) имеет бесконечное количество решений**, так как $rank A = rank \tilde{A} < n, (rank A = 2, rank \tilde{A} = 2, n = 3)$

Задача 3

Проверить на совместность и выяснить, сколько решений будет иметь система линейных уравнений, заданная расширенной матрицей

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

В [11]:
```
a = np.array([[1, 3, -2, 4], [0, 5, 0, 0], [0, 0, 3, 0], [0, 0, 0, 2]])
print(f'Матрица A:\n{a}')
r = np.linalg.matrix_rank(a)
print(f'Ранг матрицы A: {r}')
```

```
Матрица A:
[[ 1  3 -2  4]
 [ 0  5  0  0]
 [ 0  0  3  0]
 [ 0  0  0  2]]
Ранг матрицы A: 4
```

В [12]:
```
A_t = np.array([[1, 3, -2, 4, 3], [0, 5, 0, 0, 2], [0, 0, 3, 0, 4], [0, 0, 0, 2, 1]])

print(f'Расширенная матрица A_t:\n{A_t}')
r = np.linalg.matrix_rank(A_t)
print(f'Ранг матрицы A_t: {r}')
```

```
Расширенная матрица A_t:
[[ 1  3 -2  4  3]
 [ 0  5  0  0  2]
 [ 0  0  3  0  4]
 [ 0  0  0  2  1]]
Ранг матрицы A_t: 4
```

Число неизвестных **n=4**

Система линейных уравнений, соответствующая расширенной матрицу $\tilde{A}$ будет иметь вид:

а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 5x_2 + x_4 = 2, \\ 3x_3 = 4, \\ 2x_4 = 1; \end{cases}$

Из теоремы Кронекера — Капелли следует, что то система а) определена, т. е. имеет единственное решение так как $rank A = rank \tilde{A} = n, (rank A = 4, rank \tilde{A} = 4, n = 4)$

Решение системы имеет вид

$$x_1 = 2\frac{11}{30},$$
$$x_2 = \frac{1}{10},$$
$$x_3 = \frac{4}{3},$$
$$x_4 = \frac{1}{2}.$$

Задача 4

Дана система линейных уравнений, заданная расширенной матрицей

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right).$$

Найти соотношение между параметрами a, b и c, при которых система является несовместной.

Из теоремы Кронекера — Капелли следует, что **система (б) несовместна** тогда, когда $rank A < rank\tilde{A}$.

В [13]:
```
A = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]])
print(f'Матрица A:\n{A}')
r = np.linalg.matrix_rank(A)
print(f'Ранг матрицы A: {r}')
```

```
Матрица A:
[[1 2 3]
 [4 5 6]
 [7 8 9]]
Ранг матрицы A: 2
```

Следовательно, для того чтобы система была несовместной, требуется, чтобы ранг матрицы $\tilde{A}$ был равен 3.

Преобразуем расширенную матрицу к ступенчатой форме

1. Умножим 1-ю строку на 2 и вычием из 2-й строки.
2. Умножим 1-ю строку на 3 и вычием из 3-й строки.

В результату получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 1 & 0 & b-2a \\ 4 & 2 & 0 & c-3a \end{array}\right).$$

3. Умножим 2-ю строку на 2 и вычием из 3-й строки.

В результату получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 1 & 0 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & c+a-2b \end{array}\right).$$

Если , $c+a-2b \neq 0$ то система является несовместной. В противном случае одна из неизвестных является свободной переменной и, следовательно, система имеет бесконечное множество решений.

В [ ]: