Соковнин Игорь Леонидович

Линейная алгебра

Урок 4. Системы линейных уравнений. Часть 2

Практическое задание

1. Решить систему уравнений методом Крамера:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 = 7 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

2*. Найти L-матрицу LU-разложения для матрицы коэффициентов:

а)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 12 \\ 3 & 26 & 30 \end{pmatrix}$$

б)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 18 & 29 & 18 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix}$$

3*. Решить систему линейных уравнений методом LU-разложения

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 11x_1 + 7x_2 + 5x_3 = -6 \\ 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 = -5 \end{cases}$$

4*. Решить систему линейных уравнений методом Холецкого

$$\begin{cases} 81x_1 - 45x_2 + 45x_3 = 531 \\ -45x_1 + 50x_2 - 15x_3 = -460 \\ 45x_1 - 15x_2 + 38x_3 = 193 \end{cases}$$

5*. Написать на Python программу с реализацией одного из изученных алгоритмов решения СЛАУ.

В [1]:
```
import numpy as np
```

Задача 1

Решить систему уравнений методом Крамера:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 = 7 \end{cases}$

Решение

Составим определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - 3 \cdot (-2) = 2.$$
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{21} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - 7 \cdot (-2) = 10.$$
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - 3 \cdot 1 = 4.$$

Решение будет иметь вид

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4}{2} = 2$$

В [ ]:
```
```

Решить систему уравнений методом Крамера:

б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

В [ ]:

Составим матрицы и найдём их определители

В [7]:
```
D = np.array([[2, -1, 5], [1, 1, -3], [2, 4, 1]])
det_D = np.linalg.det(D)
print(f'Матрица D:\n{D}')
print(f'Определитель:\n{det_D:.0f}')
```

```
Матрица D:
[[ 2 -1  5]
 [ 1  1 -3]
 [ 2  4  1]]
Определитель:
43
```

В [9]:
```
D_1 = np.array([[10, -2, 1], [1, 1, -3], [2, 4, 1]])
det_D1 = np.linalg.det(D_1)
print(f'Матрица D_1:\n{D_1}')
print(f'Определитель:\n{det_D1:.0f}')
```

```
Матрица D_1:
[[10 -2  1]
 [ 1  1 -3]
 [ 2  4  1]]
Определитель:
146
```

В [10]:
```
D_2 = np.array([[2, -1, 5], [10, -2, 1], [2, 4, 1]])
det_D2 = np.linalg.det(D_2)
print(f'Матрица D_1:\n{D_2}')
print(f'Определитель:\n{det_D2:.0f}')
```

```
Матрица D_1:
[[ 2 -1  5]
 [10 -2  1]
 [ 2  4  1]]
Определитель:
216
```

В [17]:
```
D_3 = np.array([[2, -1, 5], [1, 1, -3], [10, -2, 1]])
det_D3 = np.linalg.det(D_3)
print(f'Матрица D:\n{D_3}')
print(f'Определитель:\n{det_D3:.0f}')
```

```
Матрица D:
[[ 2 -1  5]
 [ 1  1 -3]
 [10 -2  1]]
Определитель:
-39
```

Решение системы имеет вид:

В [15]:
```
x_1=det_D1/det_D
x_2=det_D2/det_D
x_3=det_D3/det_D
print(f'X_1 = {x_1}')
print(f'X_2 = {x_2}')
print(f'X_3 = {x_3}')
```

```
X_1 = 3.395348837209304
X_2 = 5.023255813953492
X_3 = -0.9069767441860468
```

Задача 2*

Найти L-матрицу LU-разложения для матрицы коэффициентов:

а)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 12 \\ 3 & 26 & 30 \end{pmatrix}$$

Начнем прямой ход метода Гаусса. Для этого домножим первую строку на 2 и вычтем ее из второго уравнения. При этом запишем в матрицу L на место элемента l_{21} значение 2. Затем вычтем из третьего уравнения первое, домноженное на (3). В матрицу L запишем $l_{31} = 3$.

Матрица коэффициентов будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 20 & 18 \end{pmatrix},$$

а матрица L —

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & l_{32} & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее умножим вторую строку на (4) и вычтем ее из третьей. При этом в матрицу L на место l_{32} запишем 4.

В итоге получим

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

В [ ]:

б)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 18 & 29 & 18 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix}$$

Начнем прямой ход метода Гаусса. Для этого домножим первую строку на 2 и вычтем ее из второго уравнения. При этом запишем в матрицу L на место элемента l_{21} значение 2. Затем вычтем из третьего уравнения первое, домноженное на (3). В матрицу L запишем $l_{31} = 3$. Затем вычтем из четвёртого уравнения первое, домноженное на (4). В матрицу L запишем $l_{31} = 4$.

Матрица коэффициентов будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 15 & 23 & 6 \\ 0 & 18 & 45 & 27 \end{pmatrix},$$

а матрица L —

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & l_{32} & 1 & 0 \\ 4 & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее умножим вторую строку на (5) и вычтем ее из третьей. При этом в матрицу L на место l_{32} запишем 5. Затем вычтем из четвёртой строки вторую, домноженную на (6). В матрицу L запишем $l_{41} = 6$.

В итоге получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 27 & 21 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & l_{43} & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее умножим третью строку на (9) и вычтем ее из четвёртой. При этом в матрицу L на место l_{43} запишем 9.

В итоге получим

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 3*

Решить систему линейных уравнений методом LU-разложения

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 11x_1 + 7x_2 + 5x_3 = -6 \\ 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 = -5 \end{cases}$$

Матрица коэффициентов A будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 11 & 7 & 5 \\ 9 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Начнем прямой ход метода Гаусса. Для этого домножим первую строку на $11/2$ и вычтем ее из второго уравнения. При этом запишем в матрицу L на место элемента l_{21} значение $11/2$. Затем вычтем из третьего уравнения первое, домноженное на $(9/2)$. В матрицу L запишем $l_{31} = 9/2$.

Матрица коэффициентов будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 7-11/2 & 5-33/2 \\ 0 & 8-9/2 & 4-27/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3/2 & -23/2 \\ 0 & 7/2 & -19/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1.5 & -11.5 \\ 0 & 3.5 & -9.5 \end{pmatrix},$$

а матрица L —

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 11/2 & 1 & 0 \\ 9/2 & l_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5.5 & 1 & 0 \\ 4.5 & l_{32} & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее умножим вторую строку на $(7/3)$ и вычтем ее из третьей. При этом в матрицу L на место l_{32} запишем $7/3$.

В итоге получим

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3/2 & -23/2 \\ 0 & 0 & -19/2+23/2\cdot 7/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3/2 & -23/2 \\ 0 & 0 & 52/3 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1.5 & -11.5 \\ 0 & 3.5 & 17.333333333333332 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 11/2 & 1 & 0 \\ 9/2 & 7/3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5.5 & 1 & 0 \\ 4.5 & 2.3333333333333335 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решим теперь систему

$$Ly = b:$$

$$\begin{cases} y_1 = 1, \\ 11/2\cdot y_1 + y_2 = -6, \\ 9/2\cdot y_1 + 7/3\cdot y_2 + y_3 = -5. \end{cases}$$

$$y_1 = 1,\\ y_2 = -23/2,\\ y_3 = 52/3.$$

И затем систему

$$Ux = y:$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ -3/2x_2 - 23/2x_3 = -23/2, \\ 52/3x_3 = 52/3. \end{cases} = \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ -3x_2 - 23x_3 = -23, \\ 52x_3 = 52. \end{cases} = \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_2 = 23\cdot(1-x_3)/3, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

$$x_3 = 1\\ x_2 = 0,\\ x_1 = -1.$$

Произведем проверку, подставив полученные значения переменных в исходную систему:

$$\begin{cases} 2\cdot(-1) + 1\cdot 0 + 3\cdot 1 = 1, \\ 11\cdot(-1) + 7\cdot 0 + 5\cdot 1 = -6, \\ 9\cdot(-1) + 8\cdot 0 + 4\cdot 1 = -5. \end{cases}$$

Таким образом, найденное решение верно.

Задача 4*

Решить систему линейных уравнений методом Холецкого

$$\begin{cases} 81x_1 - 45x_2 + 45x_3 = 531 \\ -45x_1 + 50x_2 - 15x_3 = -460 \\ 45x_1 - 15x_2 + 38x_3 = 193 \end{cases}$$

Произведем разложение на LL^T:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{81} = 9,\\ l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{-45}{9} = -5,\\ l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{45}{9} = 5,$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{50-25} = 5,\\ l_{32} = \frac{1}{l_{22}}(a_{32} - l_{21}l_{31}) = \frac{(-15-(-5)\cdot 5)}{5} = 2,\\ l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{38-(5)^2-2^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Получили матрицу

$$L = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad L^T = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решим систему $Ly = b$:

$$\begin{cases} 9y_1 = 531, \\ -5y_1 + 5y_2 = -460, \\ 5y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 193. \end{cases}$$

$$y_1 = 59,$$

$$y_2 = -460/5 + y_1 = -92 + 59 = -33,$$

$$y_3 = \frac{1}{3}(193 - 5y_1 - 2y_2) = \frac{(193 - 5 \cdot 59 - 2 \cdot (-33))}{3} = -12.$$

И решим систему $L^T x = y$:

$$\begin{cases} 9x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 59, \\ 5x_2 + 2x_3 = -33, \\ 3x_3 = -12. \end{cases}$$

$$x_3 = -4,$$

$$x_2 = \frac{-33 - 2x_3}{5} = \frac{-33 + 8}{5} = -5,$$

$$x_1 = \frac{59 + 5x_2 - 5x_3}{9} = \frac{59 - 25 + 20}{9} = 6.$$

Осуществим проверку, подставив полученные значения в исходную систему:

$$\begin{cases} 81 \cdot 6 - 45(-5) + 45(-4) = 531 \\ -45x_1 + 50x_2 - 15x_3 = -460 \\ 45x_1 - 15x_2 + 38x_3 = 193 \end{cases}$$

Таким образом, найденное решение верно.

```
В [ ]:
```