Соковнин Игорь Леонидович

Линейная алгебра

Урок 3. Практическая задание

Урок 3. Линейные преобразования

Линейная алгебра

Урок 3 Линейные преобразования

Практическое задание

1. Найти собственные векторы и собственные значения λ для линейного оператора, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Собственные векторы:

$$\hat{A}\vec{x} = \lambda \vec{x} \qquad (2)$$

Находим собственные значения, составив и решив характеристическое уравнение оператора $\hat{A}$.

$$\det(\hat{A} - \lambda \hat{I}) = 0 \qquad (3)$$

где $\hat{I}$ - единичный оператор $\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(\hat{A} - \lambda \hat{I}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-(1+\lambda)(6-\lambda) - 2\cdot(-6) = -(6 - \lambda + 6\lambda - \lambda^2) + 12 =$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda - 6 + 12 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\boxed{\det(\hat{A} - \lambda \hat{I}) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0} \qquad (4)$$

решим уравнение (4)

$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{5+1}{2} = 3 \qquad (5)$$

$$\lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{5-1}{2} = 2$$

Таким образом $\hat{A}$: $\lambda_1 = 3$, собственные значения $\lambda_2 = 2$ (6)

Найдем собственные вектора оператора $\hat{A}$ используя (2)

$$\hat{A}\vec{x} = \lambda \vec{x}$$

следовательно

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

1 $\lambda_1 = 3$ $\lambda_1 = 3$

$$\begin{cases} -x_1 - 6x_2 = 3 \cdot x_1 \\ 2x_1 + 6x_2 = 3x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x_1 - 6x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}x_2 \\ x_2 = C \end{cases}$$

$\Rightarrow x_2 = C \quad x_1 = -\frac{3}{2}C$, где C – любое число

Вектор $\vec{x_1} = (-\frac{3}{2}C, C)$ – является собственым вектором, соответствующим собственному значению $\lambda_1 = 3$

② $\lambda = 2$ $\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -x_1 - 6x_2 \\ 2x_1 + 6x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -x_1 - 6x_2 = 2x_1 \\ 2x_1 + 6x_2 = 2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_2 = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2C \\ x_2 = C \end{cases}$

$\Rightarrow$ Вектор $\vec{x}_2 = (2C, C)$, где C - любое число, будет являться собственным вектором соответствующим собственному значению $\lambda_2 = 2$

вектора $\vec{x}_1 = \left(-\frac{3}{2}C, C\right)$ и $\vec{x}^2 (2C, C)$ линейно независимы. Так как они двухмерные, то они образуют базис пространства R^2

$\blacksquare$

2 Дан оператор поворота на 180°, задаваемый матрицей

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Показать, что любой вектор является для него собственным

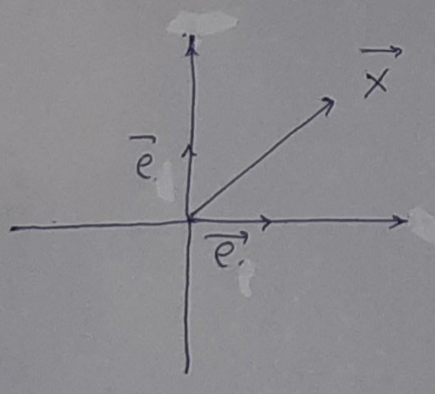
Решение:

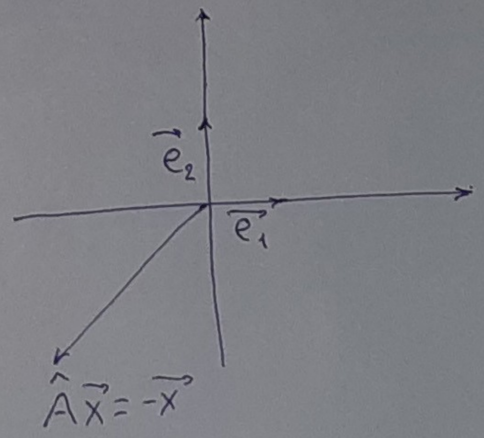
Пусть $\vec{x}$ произвольный вектор.

Тогда $\hat{A}\vec{x} = -\vec{x}$, то есть произвольный вектор умножается на число (-1).

$\Rightarrow$ что $\forall$ вектор является для оператора $\vec{A}$ собственным:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$





3. Пусть линейный оператор задан матрицей

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

установить, является ли вектор $(1, 1) = \vec{x}$ собственным вектором этого линейного оператора

Решение

$$\hat{A}\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ -1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \vec{x} \Rightarrow \lambda = 2$$

$\boxed{\hat{A}\vec{x} = 2\vec{x}}$, следовательно вектор $\vec{x}$ является собственным вектором линейного оператора $\hat{A}$ соответствующего собственному значению $\lambda = 2$.

4. Пусть линейный оператор задан матрицей

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

установить, является ли вектор $x = (3, -3, -4)$ собственным вектором этого линейного оператора.

Решение

$$\hat{A}\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \vec{x}'$$

$\Rightarrow \hat{A}\vec{x} \neq \lambda\vec{x}$, следовательно вектор $\vec{x}$ не является собственным вектором оператора $\hat{A}$ ■

(т.е. не существует $\lambda \neq 0$, такого что $\vec{x}' = \lambda\vec{x}$)