Линейная алгебра

Урок 1. Линейное пространство. Основные понятия. Часть 2

1. Найти скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}$:
а) $x = (0, -3, 6),\ \ y = (-4, 7, 9);$
б) $x = (7, -4, 0, 1),\ \ y = (-3, 1, 11, 2).$

2. Найти нормы векторов $(4, 2, 4)$ и $(12, 3, 4)$ и угол между ними.

3. Будет ли линейное пространство евклидовым, если за скалярное произведение принять:
а) произведение длин векторов;
б) утроенное обычное скалярное произведение векторов?

4. Какие из нижеперечисленных векторов образуют ортонормированный базис в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$:
а) $(1, 0, 0), (0, 0, 1);$
б) $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0, 0, 1);$
в) $(1/2, -1/2, 0), (0, 1/2, 1/2), (0, 0, 1);$
г) $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)?$

В [1]:
```
import numpy as np
```

Задача 1

Найти скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}$:
а) $x = (0, -3, 6),\ \ y = (-4, 7, 9);$
б) $x = (7, -4, 0, 1),\ \ y = (-3, 1, 11, 2).$

В [2]:
```
# a)
x = np.array([0, -3, 6])
y = np.array([-4, 7, 9])
print(f'Вектор x: {x}')
print(f'Вектор y: {y}')
```

```
Вектор x: [ 0 -3  6]
Вектор y: [-4  7  9]
```

В [3]:
```
print(f'Скалярное произведение x и y:\n{x @ y}')
```

```
Скалярное произведение x и y:
33
```

Ответ: Скалярное произведение x и y

$$x \cdot y = 0 \cdot (-4) + (-3) \cdot 7 + 6 \cdot 9 = 0 - 21 + 54 = 33$$

В [4]:
```python
# b)
x = np.array([7, -4, 0, 1])
y = np.array([-3, 1, 12, 2])
print(f'Вектор x: {x}')
print(f'Вектор y: {y}')
print(f'Скалярное произведение x и y:\n{x @ y}')
```

```
Вектор x: [ 7 -4  0  1]
Вектор y: [-3  1 12  2]
Скалярное произведение x и y:
-23
```

Ответ: Скалярное произведение x и y

$$x \cdot y = 7 \cdot (-3) + (-4) \cdot 1 + 0 \cdot 12 + 1 \cdot 2 = -21 - 4 + 0 + 1 = -23$$

Задача 2

Найти нормы векторов $(4, 2, 4)$ и $(12, 3, 4)$ и угол между ними.

В [5]:
```python
from numpy.linalg import norm
```

В [6]:
```python
x = np.array([4, 2, 4])
y = np.array([12, 3, 4])
print(f'Вектор x: {x}')
print(f'Вектор y: {y}')
print(f'\nМанхетовская норма (длина) вектора x: {norm(x, ord=1)}')
print(f'Манхетовская норма (длина) вектора y: {norm(y, ord=1)}')
# print(f'\nЕвклидова норма (длина) вектора x: {norm(x, ord=2)}')
# print(f'Евклидова норма (длина) вектора y: {norm(y, ord=2)}')
print(f'\nЕвклидова норма (длина) вектора x: {np.sqrt(x @ x)}')
print(f'Евклидова норма (длина) вектора y: {np.sqrt(y @ y)}')

print(f'\nСкалярное произведение векторов x и y: {x @ y}')

print(f'\nУгол между векторами x и y: {(x @ y) / (np.sqrt(x @ x) * np.sqrt(y @ y))}')
# print(f'Угол между векторами x и y: {(x @ y) / (norm(x) * norm(y))}')
```

```
Вектор x: [4 2 4]
Вектор y: [12  3  4]

Манхетовская норма (длина) вектора x: 10.0
Манхетовская норма (длина) вектора y: 19.0

Евклидова норма (длина) вектора x: 6.0
Евклидова норма (длина) вектора y: 13.0

Скалярное произведение векторов x и y: 70

Угол между векторами x и y: 0.8974358974358975
```

Задача 3

Будет ли линейное пространство евклидовым, если за скалярное произведение принять:
а) произведение длин векторов;
б) утроенное обычное скалярное произведение векторов?

В [7]:
```
# а) произведение длин векторов;
x = np.array([7, -4, 0, 1])
x_1 = np.array([5, 1, -3, 3])
y = np.array([-3, 1, 12, 2])
print(f'Вектор x: {x}')
print(f'Вектор y: {y}')
print(f'\nСкалярное произведение x и y:\n{norm(x) * norm(y)}')
```

```
Вектор x: [ 7 -4  0  1]
Вектор y: [-3  1 12  2]

Скалярное произведение x и y:
102.11757928975796
```

В [8]:
```
# Проверяем выполнение аксиом:
print(f'\n1. (x, y) = (y, x) ?:\n{norm(x) * norm(y)} = {norm(y) * norm(x)}')
lambd = 10
print(f'\n2. (lambda*x, y) = lambda*(y, x) ?:\n{norm(lambd*x) * norm(y)} = {lambd * (nor
print(f'\nВектор x_1: {x_1}')
print(f'\n3. (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y) ?:\n{norm(x + x_1) * norm(y)} = {(norm
```

```
1. (x, y) = (y, x) ?:
102.11757928975796 = 102.11757928975796

2. (lambda*x, y) = lambda*(y, x) ?:
1021.1757928975795 = 1021.1757928975795

Вектор x_1: [ 5  1 -3  3]

3. (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y) ?:
167.70211686201222 = 185.49623363246127
```

Не выполняется 3-я аксиома для евклидова пространства.

Вывод: а) если за скалярное произведение принять произведение длин векторов, то линейное пространство **не является евклидовым**.

В [9]:
```
# б) утроенное обычное скалярное произведение векторов
x = np.array([7, -4, 0, 1])
x_1 = np.array([5, 1, -3, 3])
y = np.array([-3, 1, 12, 2])
print(f'Вектор x: {x}')
print(f'Вектор y: {y}')

print(f'\nСкалярное произведение x и y:\n{3*(x @ y)}')
```

```
Вектор x: [ 7 -4  0  1]
Вектор y: [-3  1 12  2]

Скалярное произведение x и y:
-69
```

В [10]:
```
# Проверяем выполнение аксиом
print(f'\n1. (x, y) = (y, x) ?:\n{3*(x @ y)} = {3*(y @ x)}')
lambd = 10
print(f'\n2. (lambda*x, y) = lambda*(y, x) ?:\n{3*((lambd*x) @ y)} = {lambd*3*(x @ y)}')
print(f'\nВектор x_1: {x_1}')
print(f'\n3. (x_1 + x_2, y) = (y, x_1) + (y, x_2) ?:\n{3*((x + x_1) @ y)} = {(3*(x @ y))
print(f'\n4. (x, x) >= 0 ?:\n{3*(x @ x)} > 0')
```

```
1. (x, y) = (y, x) ?:
-69 = -69

2. (lambda*x, y) = lambda*(y, x) ?:
-690 = -690

Вектор x_1: [ 5  1 -3  3]

3. (x_1 + x_2, y) = (y, x_1) + (y, x_2) ?:
-201 = -201

4. (x, x) >= 0 ?:
198 > 0
```

Выполняются все 4 аксиомы для евклидова пространства.

Вывод: б) если за скалярное произведение принять утроенное обычное скалярное произведение векторов, то линейное пространство **является евклидовым**.

Задача 4

Какие из нижеперечисленных векторов образуют ортонормированный базис в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$:
а) $(1, 0, 0), (0, 0, 1)$;
б) $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0, 0, 1)$;
в) $(1/2, -1/2, 0), (0, 1/2, 1/2), (0, 0, 1)$;
г) $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$?

Определение. В конечномерном евклидовом пространстве базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ называется ортонормированным, если

$(e_i, e_j) = 0 \ \forall \ i \neq j$ и $(e_i, e_i) = 1 \ \forall \ i \in [1, n]$.

__а) (1,0,0),(0,0,1); __

In [11]:
```
e_1 = np.array([1, 0, 0])
e_2 = np.array([0, 0, 1])

print(f'Вектор e_1: {e_1}')
print(f'Вектор e_2: {e_2}')

print(f'\nСкалярное произведение e_1 и e_2:\n{e_1 @ e_2}')
print(f'Евклидова норма (длина) вектора e_1: {norm(e_1)}')
print(f'Евклидова норма (длина) вектора e_2: {norm(e_2)}')
```

```
Вектор e_1: [1 0 0]
Вектор e_2: [0 0 1]

Скалярное произведение e_1 и e_2:
0
Евклидова норма (длина) вектора e_1: 1.0
Евклидова норма (длина) вектора e_2: 1.0
```

Вывод: Для **образования** ортонормированный базис в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$ необходимо три вектора.
Вектора (1,0,0) и (0,0,1) **образуют** ортонормированный базис в линейном 2-мерном подпространстве $\mathbb{R}^2$ пространства $\mathbb{R}^3$.

б) $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0, 0, 1)$;

In [12]:
```
e_1 = np.array([1/(2**(1/2)), -1/(2**(1/2)), 0])
e_2 = np.array([1/(2**(1/2)), 1/(2**(1/2)), 0])
e_3 = np.array([0, 0, 1])

print(f'Вектор e_1: {e_1}')
print(f'Вектор e_2: {e_2}')
print(f'Вектор e_3: {e_2}')

print(f'\nСкалярное произведение e_1 и e_2:\n{e_1 @ e_2}')
print(f'Скалярное произведение e_1 и e_3:\n{e_1 @ e_3}')
print(f'Скалярное произведение e_2 и e_3:\n{e_2 @ e_3}')
print(f'\nЕвклидова норма (длина) вектора e_1: {norm(e_1)}')
print(f'Евклидова норма (длина) вектора e_2: {norm(e_2)}')
print(f'Евклидова норма (длина) вектора e_3: {norm(e_3)}')
```

```
Вектор e_1: [ 0.70710678 -0.70710678  0.        ]
Вектор e_2: [0.70710678 0.70710678 0.        ]
Вектор e_3: [0.70710678 0.70710678 0.        ]

Скалярное произведение e_1 и e_2:
0.0
Скалярное произведение e_1 и e_3:
0.0
Скалярное произведение e_2 и e_3:
0.0

Евклидова норма (длина) вектора e_1: 0.9999999999999999
Евклидова норма (длина) вектора e_2: 0.9999999999999999
Евклидова норма (длина) вектора e_3: 1.0
```

Вывод: вектора $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0, 0, 1)$ **образуют** ортонормированный базис в линейном пространстве ℝ3.

в) $(1/2, -1/2, 0), (0, 1/2, 1/2), (0, 0, 1)$;

В [13]:
```
e_1 = np.array([1/2, -1/2, 0])
e_2 = np.array([0, 1/2, 1/2])
e_3 = np.array([0, 0, 1])

print(f'Вектор e_1: {e_1}')
print(f'Вектор e_2: {e_2}')
print(f'Вектор e_3: {e_2}')

print(f'\nСкалярное произведение e_1 и e_2:\n{e_1 @ e_2}')
print(f'Скалярное произведение e_1 и e_3:\n{e_1 @ e_3}')
print(f'Скалярное произведение e_2 и e_3:\n{e_2 @ e_3}')
print(f'\nЕвклидова норма (длина) вектора e_1: {norm(e_1)}')
print(f'Евклидова норма (длина) вектора e_2: {norm(e_2)}')
print(f'Евклидова норма (длина) вектора e_3: {norm(e_3)}')
```

```
Вектор e_1: [ 0.5 -0.5  0. ]
Вектор e_2: [0.  0.5 0.5]
Вектор e_3: [0.  0.5 0.5]

Скалярное произведение e_1 и e_2:
-0.25
Скалярное произведение e_1 и e_3:
0.0
Скалярное произведение e_2 и e_3:
0.5

Евклидова норма (длина) вектора e_1: 0.7071067811865476
Евклидова норма (длина) вектора e_2: 0.7071067811865476
Евклидова норма (длина) вектора e_3: 1.0
```

Вывод: вектора $(1/2, -1/2, 0), (0, 1/2, 1/2), (0, 0, 1)$ **не образуют** ортонормированный базис в линейном пространстве $\mathbb{R}3$.

г) $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$

В [14]:
```
e_1 = np.array([1, 0, 0])
e_2 = np.array([0, 1, 0])
e_3 = np.array([0, 0, 1])

print(f'Вектор e_1: {e_1}')
print(f'Вектор e_2: {e_2}')
print(f'Вектор e_3: {e_2}')

print(f'\nСкалярное произведение e_1 и e_2:\n{e_1 @ e_2}')
print(f'Скалярное произведение e_1 и e_3:\n{e_1 @ e_3}')
print(f'Скалярное произведение e_2 и e_3:\n{e_2 @ e_3}')
print(f'\nЕвклидова норма (длина) вектора e_1: {norm(e_1)}')
print(f'Евклидова норма (длина) вектора e_2: {norm(e_2)}')
print(f'Евклидова норма (длина) вектора e_3: {norm(e_3)}')
```

```
Вектор e_1: [1 0 0]
Вектор e_2: [0 1 0]
Вектор e_3: [0 1 0]

Скалярное произведение e_1 и e_2:
0
Скалярное произведение e_1 и e_3:
0
Скалярное произведение e_2 и e_3:
0

Евклидова норма (длина) вектора e_1: 1.0
Евклидова норма (длина) вектора e_2: 1.0
Евклидова норма (длина) вектора e_3: 1.0
```

Вывод: вектора $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ **образуют** ортонормированный базис в линейном пространстве $\mathbb{R}3$.

```
В [ ]:
```