Введение в высшую математику

Урок 6. Вебинар “Элементы теории вероятностей”

Задание выполнил **Соковнин ИЛ**

Практическое задание к уроку 6

1. Задание (теорема сложения)
   Найти вероятность выпадения 2 или 5 очков при подбрасывании игральной кости, на гранях которой имеются соответственно 1,2,3,4,5 и 6 очков.
2. Задание (теорема умножения)
   Найти вероятность того, что при двух подбрасываниях той же самой игральной кости сначала выпадет 2, а затем 5.
3. Задание
   Найти вероятность выпадения 2 и 5 очков при двух подбрасываниях той же самой игральной игральной кости. Обратите внимание на порядок выпадения костей!
4. Задание (Геометрическая вероятность +интервалы)
   На отрезке АВ длиной 20 см наугад отметили точку С. Какова вероятность, что она находится на расстоянии не более 9 см от точки А и не более 15 см от точки В?
5. Задание.
   Телефонный номер состоит из 7 цифр. Какова вероятность, что это номер 8882227?
6. Задание.
   Набирая номер телефона, абонент забыл 2 последние цифры, и, помня только то, что эти цифры различны и среди них нет нуля, стал набирать их наудачу. Сколько вариантов ему надо перебрать, чтобы наверняка найти нужный номер? Какова вероятность того, что он угадает номер с первого раза?
7. Задание** (необязательное)
   Чёрный куб покрасили снаружи белой краской, затем разрезали на 27 одинаковых маленьких кубиков и как попало сложили из них большой куб. С какой вероятностью все грани этого куба будут белыми?

1. Задание (теорема сложения)

Найти вероятность выпадения 2 или 5 очков при подбрасывании игральной кости, на гранях которой имеются соответственно 1,2,3,4,5 и 6 очков.

Ответ:

- Вероятность выпадения 2 очков: $P(2) = 1/6$
- Вероятность выпадения 5 очков: $P(5) = 1/6$

События независимые, поэтому применяем теорему сложения вероятностей:

- Вероятность выпадения 2 или 5 очков $P(2,5) = P(2) + P(5) = 1/3$

2. Задание (теорема умножения)

Найти вероятность того, что при двух подбрасываниях той же самой игральной кости сначала выпадет 2, а затем 5.

Решение:

(порядок важен)

- Событие А: выпадения 2 очков;
- Событие В: выпадения 5 очков;
- Вероятность события А: $P(\mathrm{A}) = 1/6$
- События независимые, поэтому вероятность события В: $P(B) = 1/6$

События А и В не зависимые, поэтому применяем теорему умножения вероятностей для не зависимых событий:

- Вероятность наступления события А и В: $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{36}$

Ответ: Вероятность наступления события В при наступлении события А: $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{36}$

3. Задание

Найти вероятность выпадения 2 и 5 очков при двух подбрасываниях той же самой игральной игральной кости. Обратите внимание на порядок выпадения костей!

Решение:

(порядок не важен)

- Событие А: выпадения 2 и затем 5 очков;
- Событие В: выпадения 5 и затем 2;

- Вероятность выпадения 2 и 5 очков: $P(A) = 1/36$
- Вероятность выпадения 5 и 2 очков: $P(B) = 1/36$

- Вероятность наступления события А или В: $P(AB) = P(A) + P(B) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$

Ответ: Вероятность выпадения 2 и 5 очков при двух подбрасываниях той же самой игральной игральной кости

$$P(AB) = P(A) + P(B) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$$

4. Задание (Геометрическая вероятность +интервалы)

На отрезке АВ длиной 20 см наугад отметили точку С. Какова вероятность, что она находится на расстоянии не более 9 см от точки А и не более 15 см от точки В?

На расстоянии не более 9 см от точки А и не более 15 см от точки В, следовательно это интервал длиной 4 см., от 5 до 9 ([5, 9]).

- Вероятность попасть в 1 из 20 интервалов длиной 1 см. равна 1/20
- Следовательно вероятность попасть в интервал от шириной 4 см., равна 4/20

5. Задание.

Телефонный номер состоит из 7 цифр. Какова вероятность, что это номер 8882227?

Всего способов составить номер:

- $9 * 10^6$ - если номер не может начинаться с 0
- 10^7 - если номер может начинаться с 0

Следовательно вероятность равна:

- $\frac{1}{9*10^6}$ - если номер не может начинаться с 0
- $\frac{1}{10^7}$ - если номер может начинаться с 0

6. Задание.

Набирая номер телефона, абонент забыл 2 последние цифры, и, помня только то, что эти цифры различны и среди них нет нуля, стал набирать их наудачу. Сколько вариантов ему надо перебрать, чтобы наверняка найти нужный номер? Какова вероятность того, что он угадает номер с первого раза?

Решение:

Сколько вариантов ему надо перебрать, чтобы наверняка найти нужный номер:

- Количество вариантов которые нужно перебрать равно 9^2, так как нужно набрать 2 цифры, каждая из которых может принимать значения от 1 до 9.

Какова вероятность того, что он угадает номер с первого раза?:

- $\frac{1}{9^2}$

7. Задание** (необязательное)

Чёрный куб покрасили снаружи белой краской, затем разрезали на 27 одинаковых маленьких кубиков и как попало сложили из них большой куб. С какой вероятностью все грани этого куба будут белыми?

Все маленькие кубики разбиваются на 4 группы по количеству белых граней:

- 8 кубиков с 3 гранями,
- 12 кубиков с 2 гранями,
- 6 кубиков с 1 гранью,
- 1 черный кубик.

Если зафиксировать верхнюю грань, то получим 4 варианта расположения боковых граней.
Существует 6 вариантов зафиксировать верхнюю грань и следовательно $6 * 4 = 24$ варианта расположения боковых граней при каждой фиксации. Таким образом, существует 24 способа повернуть маленький кубик.

```
1. Вероятность того, что 1-й кубик из 8 кубиков с 3 белыми гранями встанет на своё место равна
```

$$P_3^1 = \frac{8}{27} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{27} \cdot \frac{3}{24} = \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{8}$$

```
2. Вероятность того, что 2-й кубик из 8 кубиков с 3 белыми гранями встанет на своё место, при том что 1- кубик уже на своём месте, равна
```

$$P_3^2 = \frac{7}{26} \cdot \frac{1}{8}$$

```
...
8. Вероятность того, что 8-й кубик из 8 кубиков с 3 белыми гранями встанет на своё место (остальные 7 кубиков уже находятся на своих местах) равна
```

$$P_3^8 = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{8}$$

Таким образом, **вероятность того, что все кубики с 3-мя белыми гранями встанут на своё место**

$$P_3 = \frac{1}{8^8} \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20} = \frac{1}{8^8} \frac{8!}{(27! - 19!)}$$

```
9. Вероятность того, что 1-й кубик из 6 кубиков с 1-й белой гранью встанет на своё место, при том что все кубики с тремя белыми гранями находятся на с
воих местах, равна
```

$$P_1^1 = \frac{6}{19} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{19} \cdot \frac{1}{24}$$

```
10. Вероятность того, что 2-й кубик из 6 кубиков с 1-й белой гранью встанет на своё место, при том что все кубики с тремя белыми гранями и первый куби
к с одной белой гранью, находятся на своих местах равна
```

$$P_1^2 = \frac{5}{18} \cdot \frac{1}{24}$$

```
...
14. Вероятность того, что 6-й кубик из 6 кубиков с 1-й белой гранью встанет на своё место равна
```

$$P_1^6 = \frac{1}{14} \cdot \frac{1}{24}$$

Таким образом, **вероятность того, что все кубики с 1-й белой гранью встанут на своё место, при том что все кубики с тремя белыми гранями находятся на своих местах**

$$P_1 = \frac{1}{24^6} \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14} = \frac{1}{24^6} \frac{6!}{(19! - 13!)}$$

```
15. Вероятность того, что 1-й кубик из 12 кубиков с 2-мя белыми гранями встанет на своё место, при том что все кубики с тремя и одной белыми гранями,
 находятся на своих местах, равна
```

$$P_2^1 = \frac{12}{13} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{12}{13} \cdot \frac{1}{12}$$

```
16. Вероятность того, что 2-й кубик из 12 кубиков с 2-мя белыми гранями встанет на своё место равна
```

$$P_2^2 = \frac{11}{12} \cdot \frac{1}{12}$$

```
...
26. Вероятность того, что 12-й кубик из 12 кубиков с 2-мя белыми гранями встанет на своё место равна
```

$$P_2^{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12}$$

Таким образом, **вероятность того, что все кубики с 2-мя белыми гранями встанут на своё место, при том что все кубики с тремя и одной белыми гранями, находятся на своих местах**

$$P_2 = \frac{1}{12^{12}} \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2}{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{12^{12}} \frac{12!}{(13! - 1!)}$$

```
27. Вероятность того, что кубик со всеми чёрными гранями встанет на своё место, при том что все остальные кубики уже
находятся на своих местах, равна
```

$$P_0^1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{24}{24} = 1$$

Полная вероятность того все грани этого куба будут белыми равна произведению всех найденных вероятностей

$$P = P_3 * P_2 * P_1 * P_0 = \frac{1}{8^8} \frac{8!}{(27! - 19!)} \cdot \frac{1}{24^6} \cdot \frac{6!}{(19! - 13!)} \cdot \frac{1}{12^{12}} \cdot \frac{12!}{(13! - 1!)} = \frac{1}{8^8 \cdot 12^{12} \cdot 24^6}$$
$$\cdot \frac{8! \cdot 6! \cdot 12!}{(27! - 19!) \cdot (19! - 13!) \cdot (13! - 1!) \cdot (1!)} = \frac{1}{8^8 \cdot 12^{12} \cdot 24^6} \cdot \frac{8! \cdot 6! \cdot 12!}{27!}$$

Ответ: Вероятность того, что все грани куба будут белыми равна:

$$P = \frac{1}{8^8 \cdot 12^{12} \cdot 24^6} \cdot \frac{6! \cdot 8! \cdot 12!}{27!} = \frac{6! \cdot 8! \cdot 12!}{8^8 \cdot 12^{12} \cdot 24^6 \cdot 27!}$$

В [ ]: