Введение в высшую математику

Урок 4. Вебинар “Введение в аналитическую геометрию. Графики на плоскости”

Задание выполнил Соковнин ИЛ

Практическое задание

Практическое задание к 4 уроку (1)

Тема "Аналитическая геометрия" и "Графики на плоскости"

1 задание Решить уравнение $\frac{\sin x}{x} = 0$.

$\Rightarrow x \neq 0$, $\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi \cdot n$

где n любое целое число кроме 0.

2 задание Даны три прямые $y = k_1 x + b_1$, $y = k_2 x + b_2$, $y = k_3 x + b_3$. Как узнать пересекаются они в одной точке или нет

Пусть первые две прямые пересекаются в точке (x, y)

$$\begin{cases} y = k_1 x + b_1 \\ y = k_2 x + b_2 \end{cases} \Rightarrow k_1 x + b_1 = k_2 x + b_2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2}} \quad (1)$$

Подставляя (1) в уравнение первой прямой находим координату y:

$$\boxed{y = \frac{k_1 (b_2 - b_1)}{k_1 - k_2} + b_1} \quad (2)$$

Подставляем (1) и (2) в уравнение 3й кривой

$$\boxed{k_3 \frac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2} + b_3 = \frac{k_1 (b_2 - b_1)}{k_1 - k_2} + b_1} \quad (3)$$

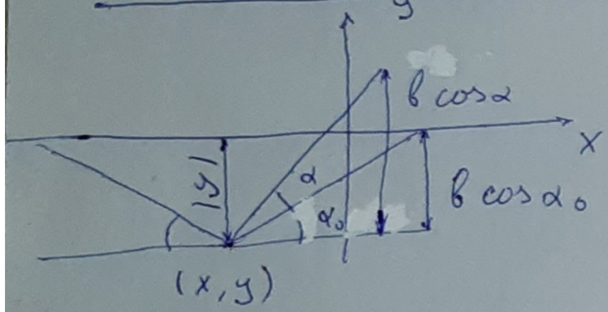
ответ: если выполняется равенство (3) то 3 прямые пересекаются в одной точке. если равенство (3) не выполняется то прямые не пересекаются в одной точке.

3. Задание　　　Урок 4　　　(2)

На листе бумаги (в линейку) (расстояние между линейками $= a$) лежит игла (длиной b). Координаты нижней точки иглы (x, y), игла лежит под углом α. Пересекает ли игла линию или нет?

Решение

Пусть $b < a$ и координата у нижней точки иглы < 0. Пусть также линия совпадает с осью X! (для простоты).



min угол при котором игла касается линии $= \alpha_0$. Необходимо найти этот угол.

При $\alpha < \alpha_0$ - игла не пересекает линию

$|y| = -y$

$b \sin \alpha_0 = |y|$, т.к. $y < 0 \Rightarrow b \sin\alpha_0 = -y$

$\Rightarrow \boxed{\alpha_0 = \arcsin\left(\frac{-y}{b}\right)}$ (1)

Ответ:
Игла пересекает линию, е! угол α лежит в диапазоне $\alpha \in (\pi - \alpha_0, \alpha_0)$, где α_0 определяется формулой (1).

{Линия совпадает с осью X}

В этом случае расстояние от точки $M(x, y)$ до линии $= |y|$. В противном случае, нужно будет отыскать это расстояние и использовать его в уравнении (1) вместо $|y|$. т.е нужно будет также найти уравнение прямой.

17.6.2 Найти угол α между прямыми

$4y-3x+12=0$ | $Ax+By+C=0$

$7y+x-14=0$

Угол между прямыми определяется как угол между нормальными векторами к этим прямым

$$\cos\alpha = \cos(\vec{n_1};\vec{n_2}) = \frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|} =$$

$$= \frac{A_1\cdot A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{-3\cdot 1 + 4\cdot 7}{\sqrt{3^2+4^2}\sqrt{1^2+7^2}} = \frac{25}{\sqrt{25}\sqrt{50}} =$$

$$= \frac{25}{\sqrt{25}\sqrt{25\cdot 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{2}}$$

Ответ: $\alpha = \frac{\pi}{2}$ - угол м/д прямыми

17.6.4 Найти угол α между прямыми $x=\sqrt{2}$ и $x=-\sqrt{3}$.

Решение

Обе прямые параллельны оси ординат y следовательно они параллельны друг другу т. е угол между ними $\alpha = 0$

4

Выяснить тип кривых второго порядка, порождённых следующими уравнениями.

17.6.5

$$y^2 - 2x - 2y - 5 = 0$$

$$(y^2 - 2y) = 2x + 5$$

$$(y^2 - 2y + 1) = 2x + 5 + 1 = 2x + 6$$

$$(y-1)^2 = 2x + 6$$

$\tilde{y}^2 = 2x + 6$ — это каноническое уравнение параболы

17.6.6

$$3x^2 + 5y^2 + 12x - 30y + 42 = 0$$

$$(3x^2 + 12x) + (5y^2 - 30y) = -42$$

$$3(x^2 + 2\cdot 2x + 4) - 3\cdot 4 + 5(y^2 - 2\cdot 3y + 9) - 5\cdot 9 = -42$$

$$3(\underbrace{x+2}_{\tilde{x}})^2 + 5(\underbrace{y-3}_{\tilde{y}})^2 = -42 + 12 + 45$$

$$3\tilde{x}^2 + 5\tilde{y}^2 = 15 \Rightarrow \boxed{\frac{\tilde{x}^2}{5} + \frac{\tilde{y}^2}{3} = 1}$$

- это эллипс с полуосями $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{3}$

центр которого находится в точке $O(-2; 3)$

17.6.7

$$2x^2 - y^2 + 6y - 7 = 0$$

$$2x^2 - (y^2 + 2\cdot 3y + 9) - 9 - 7 = 0$$

$$2x^2 - \underbrace{(y+3)}_{\equiv \tilde{y}}{}^2 = 16 \quad \Big| : 16$$

$$\frac{x^2}{8} - \frac{\tilde{y}^2}{16} = 1 \qquad \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

это гипербола с ексцентриситетом

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{16}{8}} = \sqrt{3}$$

17.6.8

$$2x^2 - 3y^2 - 28x - 42y - 55 = 0$$

$$(2x^2 - 28x) - (3y^2 + 42y) = 55$$

$$2(x^2 - 2\cdot 7x + 49) - 2\cdot 49 - 3(y^2 + 2\cdot 7y + 49) + 3\cdot 49 = 55$$

$$2\underbrace{(x-7)}_{\tilde{x}}{}^2 - 3\underbrace{(y+7)}_{\tilde{y}}{}^2 = 55 - 49(3-2) = 6 \quad \Big| : 6$$

$$\boxed{\frac{\tilde{x}^2}{3} - \frac{\tilde{y}^2}{2} = 1}$$

это гипербола с $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$