Теория вероятностей и математическая статистика

Урок 4. Непрерывные случайные величины. Функция распределения и плотность распределения вероятностей. Равномерное и нормальное распределение. Центральная предельная теорема

Урок 4.

1. Случайная непрерывная величина A имеет равномерное распределение на промежутке (200, 800]. Найдите ее среднее значение и дисперсию.
2. О случайной непрерывной равномерно распределенной величине B известно, что ее дисперсия равна 0.2. Можно ли найти правую границу величины B и ее среднее значение зная, что левая граница равна 0.5? Если да, найдите ее.
3. Непрерывная случайная величина X распределена нормально и задана плотностью распределения f(x) = (1 / (4 * sqrt(2*pi))) * (exp(-((x+2)**2) / 32))*

Найдите:

- а). M(X)
- б). D(X)
- в). std(X) (среднее квадратичное отклонение)

4. Рост взрослого населения города X имеет нормальное распределение. Причем, средний рост равен 174 см, а среднее квадратичное отклонение равно 8 см. Какова вероятность того, что случайным образом выбранный взрослый человек имеет рост:

- а). больше 182 см
- б). больше 190 см
- в). от 166 см до 190 см
- г). от 166 см до 182 см
- д). от 158 см до 190 см
- е). не выше 150 см или не ниже 190 см
- ё). не выше 150 см или не ниже 198 см
- ж). ниже 166 см.

5. На сколько сигм (средних квадратичных отклонений) отклоняется рост человека, равный 190 см, от математического ожидания роста в популяции, в которой M(X) = 178 см и D(X) = 25 кв.см?

В [14]:
```python
import numpy as np
```

Задача 1

```
Случайная непрерывная величина A имеет равномерное распределение на промежутке (200, 800].
Найдите ее среднее значение и дисперсию.
```

```
Математическое ожидание $M(X)$ равномерно распределенной непрерывной случайной величины можно вычислить по формуле:
```

$$M(X) = \frac{a+b}{2}$$

По следующей формуле можно рассчитать дисперсию $D(X)$:

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Так как $a = 200, b = 800$, получаем

$$M(X) = \frac{(200+800)}{2} = 500, D(X) = \frac{(800-200)^2}{12} = 30000$$

В [4]:
```python
MX = (200 + 800)/2
MX
```

Out[4]: 500.0

В [5]:
```python
DX = (800-200)**2/12
DX
```

Out[5]: 30000.0

Задача 2

```
О случайной непрерывной равномерно распределенной величине B известно, что ее дисперсия равна 0.2.
Можно ли найти правую границу величины B и ее среднее значение зная, что левая граница равна 0.5?
Если да, найдите ее.
```

По условию задачи дисперсия $D(X) = 0.2$, левая граница $a = 0.5$

Из формул для дисперсии $D(X)$ непрерывной равномерно распределенной величины находим, что правая b граница

$$b = \sqrt{12D(X)} + a = 2.05,$$

а математическое ожидание $M(X)$

$$M(X) = \frac{a+b}{2} = 1.28$$

В [15]:
```
DX=0.2
a=0.5
b = 0.5 + np.sqrt(12 * 0.2)
b
```

Out[15]:
```
2.049193338482967
```

В [16]:
```
MX = (a + b)/2
MX
```

Out[16]:
```
1.2745966692414834
```

Задача 3

```
Непрерывная случайная величина X распределена нормально и задана плотностью распределения
f(x) = (1 / (4 * sqrt(2*pi))) * (exp(-((x+2)**2) / 32))
```

$$f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+2)^2}{32}}$$

Найдите:

- а). M(X)
- б). D(X)
- в). std(X) (σ - среднее квадратичное отклонение)

где $a = M(X),\ \sigma^2 = D(X)$.

Таким образом, из формулы для $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

находим, что

$$a = M(X) = -2,$$
$$D(X) = \sigma^2 = 16,$$
$$\sigma = 4$$

Задача 4

В [20]:
```
import scipy.stats as st
```

Правило трёх σ:

$[-\sigma, \sigma] = 68\%$

$[-2\sigma, 2\sigma] = 95.4\%$

$[-3\sigma, 3\sigma] = 99.72\%$

```
4. Рост взрослого населения города X имеет нормальное распределение. Причем, средний рост равен $\mu = 174$ см, а среднее квадратичное
отклонение равно $\sigma = 8$ см. Какова вероятность того, что случайным образом выбранный взрослый человек имеет рост:
```

- а). больше 182 см => интервал $[\mu + \sigma, +oo]$

$$P(>182) = \frac{(100-68)}{2}\% = \frac{32}{2}\% = 16\%$$

В [25]:
```
hight = st.norm(loc=174, scale=8)
```

В [26]:
```
1 - hight.cdf(182)
```

Out[26]:
```
0.15865525393145707
```

- б). больше 190 см => интервал $[\mu + 2\sigma, +oo]$

$$P(>190) = \frac{(100-95.4)}{2}\% = \frac{4.6}{2}\% = 2.3\%$$

В [27]:
```
1 - hight.cdf(190)
```

Out[27]:
```
0.02275013194817921
```

- в). от 166 см до 190 см => интервал $[-\sigma, 2\sigma]$

$$P = \frac{1}{2}(68 + 95.4)\% = 34\% + 47.7\% = 81.7\%$$

В [28]:
```
hight.cdf(190) - hight.cdf(166)
```

Out[28]:
```
0.8185946141203637
```

- г). от 166 см до 182 см => интервал $[-\sigma, \sigma]$

$$P = 68\%$$

В [29]:
```
hight.cdf(182) - hight.cdf(166)
```

Out[29]:
```
0.6826894921370859
```

```
- д). от 158 см до 190 см => интервал $[-2\sigma, 2\sigma]$

$$P = 95.4\%$$
```

```
- е). не выше 150 см или не ниже 190 см => интервал $(-oo, -3\sigma] и [2\sigma, +oo]$

$$P = \frac{1}{2}(100 - 99.72) + \frac{1}{2}(100 + 95.4) = (0.14 + 2.3)\% = 2.44\%$$
```

В [30]:
```
hight.cdf(150) + (1 - hight.cdf(190))
```

Out[30]:
```
0.0241000299798093
```

```
- ё). не выше 150 см или не ниже 198 см => интервал $(-oo, -3\sigma] и [3\sigma, +oo]$

$$P = (100 - 99.72)\% = 0.28\%$$
```

В [31]:
```
hight.cdf(150) + (1 - hight.cdf(198))
```

Out[31]:
```
0.0026997960632601965
```

- ж). ниже 166 см. => интервал $(-oo, -sigma]

$$P = \frac{1}{2}(100 - 68)\% = 16\%$$

В [32]:
```
hight.cdf(166)
```

Out[32]:
```
0.15865525393145707
```

Задача 5

На сколько сигм (средних квадратичных отклонений) отклоняется рост человека, равный 190 см, от математического ожидания роста в популяции, в которой M(X) = 178 см и D(X) = 25 кв.см?

$(190 - 178)\text{см} = 12\text{см}$

$D(X) = \sigma^2 = 25\text{см}$

$\sigma = 5\text{см}$

В [33]:
```
(190 - 178) / np.sqrt(25)
```

Out[33]:
```
2.4
```

Ответ: 12/5 = $\frac{12}{5} = 2.4$ раза

В [ ]:

В [ ]:

В [ ]: