Теория вероятностей и математическая статистика ¶

Урок 5. Проверка статистических гипотез. P-значения. Доверительные интервалы. A/B-тестирование

Урок 5.

1. Известно, что генеральная совокупность распределена нормально со средним квадратическим отклонением, равным 16. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания с надежностью 0.95, если выборочная средняя M = 80, а объем выборки n = 256.
2. В результате 10 независимых измерений некоторой величины X, выполненных с одинаковой точностью, получены опытные данные:

   6.9, 6.1, 6.2, 6.8, 7.5, 6.3, 6.4, 6.9, 6.7, 6.1

   Предполагая, что результаты измерений подчинены нормальному закону распределения вероятностей, оценить истинное значение величины X при помощи доверительного интервала, покрывающего это значение с доверительной вероятностью 0,95.

3,4 задачи решать через тестирование гипотезы

3. Утверждается, что шарики для подшипников, изготовленные автоматическим станком, имеют средний диаметр 17 мм. Используя односторонний критерий с ?=0,05, проверить эту гипотезу, если в выборке из n=100 шариков средний диаметр оказался равным 17.5 мм, а дисперсия известна и равна 4 кв.мм.
4. Продавец утверждает, что средний вес пачки печенья составляет 200 г. Из партии извлечена выборка из 10 пачек. Вес каждой пачки составляет: 202, 203, 199, 197, 195, 201, 200, 204, 194, 190. Известно, что их веса распределены нормально. Верно ли утверждение продавца, если учитывать, что доверительная вероятность равна 99%?

В [1]:
```
import numpy as np
from statsmodels.stats.weightstats import _tconfint_generic as t_stat  # Доверительный интервал
```

Задача 1

Известно, что генеральная совокупность распределена нормально со средним квадратическим отклонением, равным 16.

Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания с надежностью 0.95, если выборочная средняя M = 80, а объем выборки n = 256.

$\sigma = 16$ - используем z-критерий

В [2]:
```
M = 80  # выборочная средняя
n = 256  # обьем выборки
sigma=16  # средним квадратическим отклонением
alpha=0.05  # статистический уровень значимости α=0.05
```

z табличное для $\alpha/2 = 0.025$

$$z_{\alpha/2} = 1.96$$

В [3]:
```
z_alpfa_2=1.96  # z табличное для  α/2
```

Доверительный интервал $[78.04; 81.96]$ с вероятностью 95%

$$\overline{X} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 80 \pm 1.96 \cdot \frac{16}{\sqrt{256}} = 80 \pm 1.96$$

В [4]:
```
se=sigma/np.sqrt(n)
se
```

Out[4]:
```
1.0
```

В [5]:
```
# Доверительный интервал  [78.04;81.96] с вероятностью  95%
t_stat(M, se, n, alpha, 'two-sided')
```

Out[5]:
```
(78.03072611034499, 81.96927388965501)
```

Ответ: Доверительный интервал [78.04 ; 81.96] с вероятностью 95%

Задача 2

В результате 10 независимых измерений некоторой величины X, выполненных с одинаковой точностью, получены опытные данные:

6.9, 6.1, 6.2, 6.8, 7.5, 6.3, 6.4, 6.9, 6.7, 6.1

Предполагая, что результаты измерений подчинены нормальному закону распределения вероятностей, оценить истинное значение величины X при помощи доверительного интервала, покрывающего это значение с доверительной вероятностью 0,95.

σ неизвестно. Используем t-критерий.

В [6]:
```
X = np.array([6.9, 6.1, 6.2, 6.8, 7.5, 6.3, 6.4, 6.9, 6.7, 6.1])
n = len(X)  # Объём выборки
# X_cp = np.sum(X)/n  # Среднее арифмитическое для данной выборки
X_cp = X.mean()  # Среднее арифмитическое для данной выборки
alpha = 0.05  # Статистический уровень значимости
nu = n-1  # Число степеней свободы
t_975_9 = 2.262  # Коэффициент Стьюдента табличный t(p=0.975, nu=9)
# sigma = X.var(ddof=1)**(1/2)  # Несмещённое среднеквадратичное отклонение
sigma = X.std(ddof=1)  # Несмещённое среднеквадратичное отклонение
print(f'Объём выборки n = {n}')
print(f'Число степеней свободы nu = {nu}')
print(f'Среднее выборочное X_cp = {X_cp}')
print(f'Статистический уровень значимости alpha = {alpha}')
print(f'Коэффициент Стьюдента табличный t(p=0.975, nu=9) = {t_975_9}')
print(f'Несмещённое среднеквадратичное отклонение sigma = {sigma}')
X
```

```
Объём выборки n = 10
Число степеней свободы nu = 9
Среднее выборочное X_cp = 6.590000000000001
Статистический уровень значимости alpha = 0.05
Коэффициент Стьюдента табличный t(p=0.975, nu=9) = 2.262
Несмещённое среднеквадратичное отклонение sigma = 0.4508017549014448
```

Out[6]:
```
array([6.9, 6.1, 6.2, 6.8, 7.5, 6.3, 6.4, 6.9, 6.7, 6.1])
```

Доверительный интервал $[6.2675; 6.9124]$ с вероятностью 95%

$$\overline{X} \pm t_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 6.59 \pm 2.262 \cdot \frac{0.451}{\sqrt{10}} = 6.59 \pm 0.3225$$

В [7]:
```
t_975_9*sigma/np.sqrt(10)
```

Out[7]:
```
0.32246174408757394
```

В [8]:
```
X_cp + t_975_9*sigma/np.sqrt(10)
```

Out[8]:
```
6.912461744087575
```

В [9]:
```
X_cp - t_975_9*sigma/np.sqrt(10)
```

Out[9]:
```
6.267538255912426
```

Ответ: Доверительный интервал [6.27 ; 6.91] с вероятностью 95%

Задача 3

Утверждается, что шарики для подшипников, изготовленные автоматическим станком, имеют средний диаметр 17 мм.

Используя односторонний критерий α=0,05, проверить эту гипотезу, если в выборке из n=100 шариков средний диаметр оказался равным 17.5 мм, а дисперсия известна и равна 4 кв.мм.

σ известно. Используем z-критерий.

В [10]:
```
n = 100  # Объём выборки
X_0 = 17  # Среднее арифмитическое генеральной совокупности
X_cp = 17.5  # Среднее арифмитическое для данной выборки
alpha = 0.05  # Статистический уровень значимости
z_t = 1.645  # z табличное
# sigma = X.var(ddof=1)**(1/2)  # Несмещённое среднеквадратичное отклонение
D = 4  # Дисперсия
sigma = np.sqrt(D)  # Среднеквадратичное отклонение
z_n = (X_cp - X_0)/(sigma/np.sqrt(n))
print(f'Объём выборки n = {n}')
print(f'Степень свободы nu = {nu}')
print(f'Среднее выборочное X_cp = {X_cp}')
print(f'Статистический уровень значимости alpha = {alpha}')
print(f'Дисперсия D = {D}')
print(f'Среднеквадратичное отклонение sigma = {sigma}')
print(f'z табличное при alpha=5% z_t = {z_t}')
print(f'z расчётное при alpha=5% z_n = {z_n}')
```

```
Объём выборки n = 100
Степень свободы nu = 9
Среднее выборочное X_cp = 17.5
Статистический уровень значимости alpha = 0.05
Дисперсия D = 4
Среднеквадратичное отклонение sigma = 2.0
z табличное при alpha=5% z_t = 1.645
z расчётное при alpha=5% z_n = 2.5
```

Ответ: Так как $z_n > z_t$ (z расчётное > z табличное), следовательно верна альтернативная гипотиза H1 ($\mu \neq \mu_0$) на уровне значимости $\alpha = 5\%$

$\approx$ - [https://www.stevesque.com/symbols/ (https://www.stevesque.com/symbols/)](https://www.stevesque.com/symbols/) (Symbols in LaTeX and HTML)

Задача 4

Продавец утверждает, что средний вес пачки печенья составляет 200 г. Из партии извлечена выборка из 10 пачек.

Вес каждой пачки составляет: 202, 203, 199, 197, 195, 201, 200, 204, 194, 190.

Известно, что их веса распределены нормально. Верно ли утверждение продавца, если учитывать, что доверительная вероятность равна 99%?

σ неизвестно. Используем t-критерий.

В [11]:
```
X = np.array([202, 203, 199, 197, 195, 201, 200, 204, 194, 190])
n = len(X)  # Объём выборки
X_0 = 200  # Среднее арифмитическое генеральной совокупности
# X_cp = np.sum(X)/n  # Среднее арифмитическое для данной выборки
X_cp = X.mean()  # Среднее арифмитическое для данной выборки
alpha = 0.01  # Статистический уровень значимости
nu = n-1  # Число степеней свободы
t_t = 3.25  # Коэффициент Стьюдента табличный t(p=0.995, nu=9)
# sigma = X.var(ddof=1)**(1/2)  # Несмещённое среднеквадратичное отклонение
sigma = X.std(ddof=1)  # Несмещённое среднеквадратичное отклонение
t_n = (X_cp - X_0)/(sigma/np.sqrt(n))
print(f'Объём выборки n = {n}')
print(f'Число степеней свободы nu = {nu}')
print(f'Среднее арифмитическое генеральной совокупности X_0 = {X_0}')
print(f'Среднее выборочное X_cp = {X_cp}')
print(f'Статистический уровень значимости alpha = {alpha}')
# print(f'Коэффициент Стьюдента табличный t(p=0.995, nu=9) = {t_995_9}')
print(f'Несмещённое среднеквадратичное отклонение sigma = {sigma}')
print(f't табличное при alpha=5% t_t = {t_t}')
print(f't расчётное при alpha=5% t_n = {t_n}')
X
```

```
Объём выборки n = 10
Число степеней свободы nu = 9
Среднее арифмитическое генеральной совокупности X_0 = 200
Среднее выборочное X_cp = 198.5
Статистический уровень значимости alpha = 0.01
Несмещённое среднеквадратичное отклонение sigma = 4.453463071962462
t табличное при alpha=5% t_t = 3.25
t расчётное при alpha=5% t_n = -1.0651074037450896
```

Out[11]:
```
array([202, 203, 199, 197, 195, 201, 200, 204, 194, 190])
```

Ответ: Так как $t_n < t_t$ (t расчётное < t табличное), следовательно верна нулевая гипотиза H0 ($\mu = \mu_0$) на уровне значимости $\alpha =$ 1%

В [ ]: