Теория вероятностей и математическая статистика

Урок 7. Многомерный статистический анализ. Линейная регрессия

Урок 7

1. Даны значения величины заработной платы заемщиков банка (zp) и значения их поведенческого кредитного скоринга (ks):
   - zp = [35, 45, 190, 200, 40, 70, 54, 150, 120, 110],
   - ks = [401, 574, 874, 919, 459, 739, 653, 902, 746, 832].

   Используя математические операции, посчитать коэффициенты линейной регрессии, приняв за X заработную плату (то есть, zp - признак), а за y - значения скорингового балла (то есть, ks - целевая переменная). Произвести расчет как с использованием intercept, так и без.
2. Посчитать коэффициент линейной регрессии при заработной плате (zp), используя градиентный спуск (без intercept).
3. $*$ Произвести вычисления как в пункте 2, но с вычислением intercept. Учесть, что изменение коэффициентов должно производиться на каждом шаге одновременно (то есть изменение одного коэффициента не должно влиять на изменение другого во время одной итерации).

В [1]:
```
import numpy as np
```

Задача 1

Даны значения величины заработной платы заемщиков банка (zp) и значения их поведенческого кредитного скоринга (ks):

zp = [35, 45, 190, 200, 40, 70, 54, 150, 120, 110],

ks = [401, 574, 874, 919, 459, 739, 653, 902, 746, 832].

Используя математические операции, посчитать коэффициенты линейной регрессии, приняв за X заработную плату (то есть, zp - признак), а за y - значения скорингового балла (то есть, ks - целевая переменная).

Произвести расчет как с использованием intercept, так и без.

$zp \equiv X, ks \equiv y$

В [2]:
```
# s
X = np.array([35, 45, 190, 200, 40, 70, 54, 150, 120, 110])
X
```

Out[2]:
```
array([ 35,  45, 190, 200,  40,  70,  54, 150, 120, 110])
```

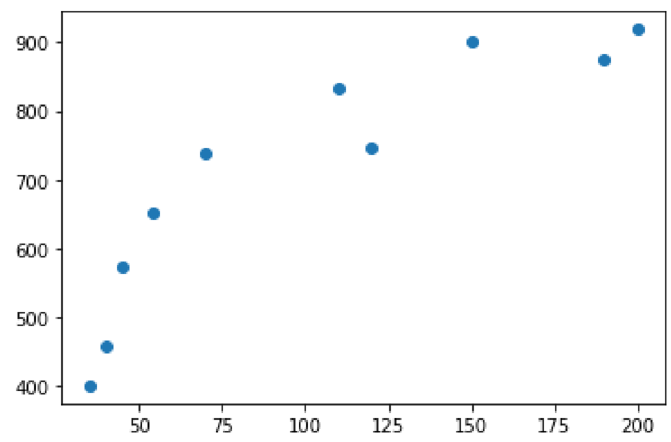
В [3]:
```
# p
y = np.array([401, 574, 874, 919, 459, 739, 653, 902, 746, 832])
y
```

Out[3]:
```
array([401, 574, 874, 919, 459, 739, 653, 902, 746, 832])
```

```
1. Сбор данных. Анализируем сстатистические данные.
2. Предполагаем линейную связь между x и y
3. Считаем коэффициенты $\beta_0$ и $\beta_1$, так, что линия проходит максимально близко к значениям (x, y)
4. Получаем линейную модель
5. Оценка статистической значимости модели
```

В [4]:
```
# Построим на графике исходные данные

import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
plt.scatter(X, y)
plt.show()
```



Считаем что зависимость линейная.

Посчитаем коэффициенты линейной регрессии β_0 и β_1 $(zp \equiv X, sp \equiv y)$

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 * x$$

Коэффициенты уравнения линейной регрессии можно найти следующим образом:

$$b = \frac{\overline{yx} - \overline{y} \cdot \overline{x}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2};$$

$$a = \overline{y} - b \cdot \overline{x}.$$

$$b \equiv \beta_1, a \equiv \beta_0$$

1.1 Посчитаем коэффициенты линейной регрессии с использованием intercept β_0

В [5]:
```
beta_1=(np.mean(X*y) - np.mean(X)*np.mean(y))/(np.mean(X**2) - np.mean(X)**2)
beta_1
```

Out[5]:
```
2.620538882402765
```

В [6]:
```
beta_0=np.mean(y)-beta_1*np.mean(X)
beta_0
```

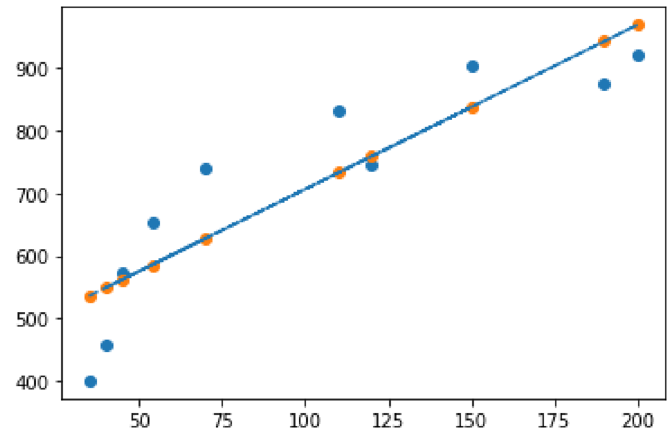
Out[6]:
```
444.1773573243596
```

В [7]:
```
# y_hat = 444.18 + 2.62054*X
y_hat = beta_0 + beta_1*X
y_hat
```

Out[7]:
```
array([535.89621821, 562.10160703, 942.07974498, 968.2851338 ,
       548.99891262, 627.61507909, 585.68645697, 837.25818968,
       758.64202321, 732.43663439])
```

В [8]:
```
# matplotlib.markers: https://matplotlib.org/stable/api/markers_api.html#module-matplotlib.markers
# matplotlib.pyplot.plot: https://matplotlib.org/2.1.1/api/_as_gen/matplotlib.pyplot.plot.html
```

В [9]:
```
# Построим на одном графике исходные данные и теоретическую прямую, построенную по уравнению регрессии:
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
plt.scatter(X, y)
plt.scatter(X, y_hat, marker='o')
plt.plot(X, 444.2 + 2.62*X, '--')
plt.show()
```



В [10]:
```
n = len(X)
# Функция потерь
mse = ((y-y_hat)**2).sum()/n
mse
```

Out[10]:
```
6470.414201176658
```

1.2 Посчитаем коэффициенты линейной регрессии без использования intercept β_0 (считаем $\beta_0 = 0$)

Для нахождения коэффициента β_1 используем матричный метод

В [11]:
```
# zp = zp.reshape(1, len(zp))
X = X.reshape(len(X), 1)
X
```

Out[11]:
```
array([[ 35],
       [ 45],
       [190],
       [200],
       [ 40],
       [ 70],
       [ 54],
       [150],
       [120],
       [110]])
```

В [12]:
```
# ks = ks.reshape(1, len(ks))
y = y.reshape(len(y), 1)
y
```

Out[12]:
```
array([[401],
       [574],
       [874],
       [919],
       [459],
       [739],
       [653],
       [902],
       [746],
       [832]])
```

В [13]:
```
# np.dot(np.dot(np.linalg.inv(np.dot(X, X.T)), X), y.T)
np.dot(np.linalg.inv(np.dot(X.T, X)), X.T@y)
```

Out[13]:
```
array([[5.88982042]])
```

В [14]:
```
beta_0 = 0
beta_1 = 5.88982042
beta_1
```

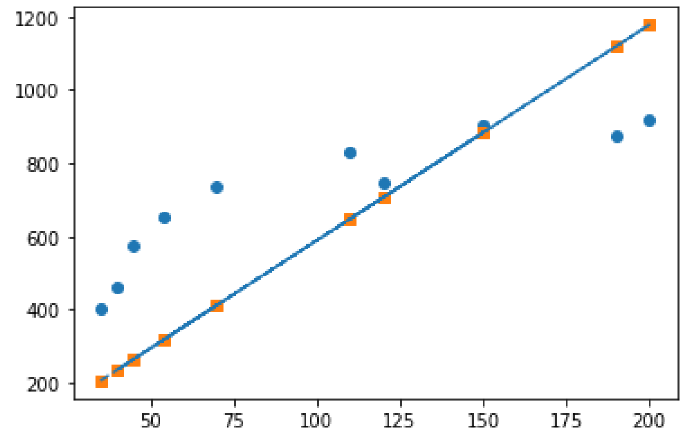
Out[14]:
```
5.88982042
```

$$y = \beta_1 * X$$

В [15]:
```
y_hat = beta_1*X
y_hat
```

Out[15]:
```
array([[ 206.1437147 ],
       [ 265.0419189 ],
       [1119.0658798 ],
       [1177.964084  ],
       [ 235.5928168 ],
       [ 412.2874294 ],
       [ 318.05030268],
       [ 883.473063  ],
       [ 706.7784504 ],
       [ 647.8802462 ]])
```

В [16]:
```
plt.scatter(X, y)
plt.scatter(X, y_hat, marker='s')
plt.plot(X, beta_1*X, '--')
plt.show()
```



В [17]:
```
# Функция потерь (mse - среднеквадратичная ошибка)
mse_ = np.sum((y_hat - y) ** 2 / 10)
mse_
```

Out[17]:
```
56516.85841571942
```

В [18]:
```
def mse_(w1, y=y, X=X, n=10):
    return np.sum((w1 * X - y) ** 2) / n
```

В [19]:
```
mse_(beta_1)
```

Out[19]:
```
56516.85841571943
```

Значение среднеквадратичной ошибки с использованием $\beta_0: mse_o = 6470.414201176658$.

Значение среднеквадратичной ошибки без использованием $\beta_0: mse = 56516.858415719428$.

Функция потерь выросла почти в 9 раз.

В [20]:
```
56516.858415719428/6470.414201176658
```

Out[20]:
```
8.734658502301402
```

Задача 2

Посчитать коэффициент линейной регрессии при заработной плате (zp), используя градиентный спуск (без intercept).

В [21]:
```
zp = np.array([35, 45, 190, 200, 40, 70, 54, 150, 120, 110])
ks = np.array([401, 574, 874, 919, 459, 739, 653, 902, 746, 832])
X = zp
y = ks
```

В [22]:
```
alpha = 1e-6  # Скорость обучения a = 0.000001
alpha
```

Out[22]:
```
1e-06
```

В [23]:
```
B1 = 0.1  # Стартовое значение коэффициента beta_1 из N(0, 1) из диапазона (-3, 3)
```

В [24]:
```
n = len(X)  # Длина массива
```

В [25]:
```
def mse_(B1, y=y, X=X, n=n):
    return np.sum((B1*X-y)**2)/n
```

В [26]:
```
# mse = (1/n)*np.sum((B1*X-y)**2)
```

В [27]:
```
# mse_p = (2/n)*np.sum((B1*X-y)*X)  # Производная от mse
```

В [28]:
```
for i in range (10):
    B1 -= alpha*(2/n)*np.sum((B1*X-y)*X)
    if i%1 == 0:
        print(f'B1= {B1}')
```

```
B1= 0.25952808
B1= 0.414660650906144
B1= 0.5655188230595969
B1= 0.7122203698240712
B1= 0.8548798195302346
B1= 0.9936085448867542
B1= 1.1285148499277806
B1= 1.2597040545647504
B1= 1.387278576808517
B1= 1.5113380127259965
```

В [29]:
```
for i in range(1500):
    B1 -= alpha*(2/n)*np.sum((B1*X-y)*X)
    if i%100 == 0:
        print(f'iteration: {i}, B1={B1}, mse={mse_(B1)}')
```

```
iteration: 0, B1=1.6319792141937546, mse=306275.7568040035
iteration: 100, B1=5.629340281237233, mse=57451.59938606899
iteration: 200, B1=5.873885137561711, mse=56520.35675226433
iteration: 300, B1=5.888845554134484, mse=56516.87150850017
iteration: 400, B1=5.889760781170516, mse=56516.85846472009
iteration: 500, B1=5.889816771625289, mse=56516.8584159028
iteration: 600, B1=5.889820196929507, mse=56516.85841572009
iteration: 700, B1=5.8898204064778845, mse=56516.85841571941
iteration: 800, B1=5.889820419297334, mse=56516.85841571941
iteration: 900, B1=5.889820420081584, mse=56516.85841571941
iteration: 1000, B1=5.8898204201295625, mse=56516.85841571941
iteration: 1100, B1=5.889820420132498, mse=56516.85841571941
iteration: 1200, B1=5.889820420132673, mse=56516.85841571943
iteration: 1300, B1=5.889820420132673, mse=56516.85841571943
iteration: 1400, B1=5.889820420132673, mse=56516.85841571943
```

В [30]:
```
mse_(5.889820420081584)
```

Out[30]:
```
56516.85841571941
```

$\beta_1 = 5.889820420081584$

В [36]:
```
np.corrcoef(X, y)  # Коэффициент корреляции
```

Out[36]:
```
array([[1.        , 0.88749009],
       [0.88749009, 1.        ]])
```

Примерно 89% изменчивости переменной y описала наша регрессионная модель $y = 5.89 * X$.

В [ ]:

В [ ]:

PS: Common Math Symbols in HTML, TeX, and Unicode - https://www.johndcook.com/blog/math_symbols/ (https://www.johndcook.com/blog/math_symbols/)

В [31]:
```
# Примеры:
# plt.scatter(X, y_hat, marker='^', color='red')
# plt.scatter(X, y_hat, marker='s', color='black')
# plt.plot(X, 444.2 + 2.62*X, 'r--', color='blue')
# plt.plot(X, 444.2 + 2.62*X, 'c--')
```

В [32]:
```
# Презентации и данные. Знакомство с R - https://varmara.github.io/mathmethr/lectures.html
```