

Линейная алгебра

Sokolnikov Alex

2025-2026

Содержание

1. Оценка	3
2. Система линейных уравнений	4
2.1. Как выглядит	4
2.2. Как решать	5
2.3. Алгоритм Гаусса	5
3. Матрицы	6
3.1. Дефекты матричных операций	8
3.2. Деление	8
3.3. Элементарные матрицы	10
3.4. Блочные умножения	11
3.5. Единственность УСВ для ОСЛУ	12
3.6. Полиномиальное исчисление	14
3.7. Спектр	15
4. Перестановки	18
4.1. Что это вообще такое	18
4.1.1. Способы задания	18
4.1.2. Операция	18
4.1.3. Свойства	18
4.1.4. Переименование	19
4.1.5. Циклы	19
4.2. Знак перестановки	19
5. Определители	22
5.1. Миноры	28
5.2. Формула Крамера	29

5.3. Характеристический многочлен	30
6. Комплексные числа	33
6.1. Определение	33
6.2. Алгебраическая замкнутость	33
7. Векторные пространства	36
7.1. Определение	36
7.2. Подпространство	37
7.3. Линейные комбинации	37
7.4. Базис	40
7.5. Координаты	42
7.6. Ранг матрицы	44
7.7. Линейные отображения	47
7.7.1. Определение	47
7.7.2. Матрица линейного отображения	48
7.7.3. Смена координат	49
7.8. Ядро и образ	49
7.9. Неравенства на ранги	50
7.9.1. Сумма	50
7.9.2. Произведение	51
7.10. Суммы и пересечения	52

1. Оценка

$$O_{\text{линал}} = 0.7 \cdot O_{\text{накоп}} + 0.3 \cdot O_{\text{экз}}$$

$$O_{\text{накоп}} = 0.36 \cdot O_{\text{коллек}} + 0.25 \cdot O_{\text{кр}} + 0.25 \cdot O_{\text{БДЗ}} + 0.14 \cdot O_{\text{сем}} + 0.1 \cdot O_{\text{листочки}}$$

2. Система линейных уравнений

2.1. Как выглядит

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Система линейных уравнений называется однородной, если $\forall i \ b_i = 0$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} - \text{решение}$$

Решение - какой-то столбец из \mathbb{R}^n

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Пример:

$$\begin{cases} 1x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases}$$

Будем записывать СЛУ так:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Может иметь:

- 1 решение:

$$x = 1$$

- 0 решений:

$$0 \cdot x = 1$$

- ∞ решений:

$$0 \cdot x = 0$$

2.2. Как решать

$\Sigma \rightarrow \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2 \rightarrow \dots \rightarrow \Sigma_k$ — хорошая

Какие преобразования можно делать?

- Умножить строчку на ненулевое число

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{i1} & \lambda \cdot a_{i2} & \dots & \lambda \cdot a_{in} & \lambda \cdot b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right), \lambda \neq 0$$

- Поменять две строки местами

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} & b_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} & b_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right)$$

- Прибавить строчку к другой

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} & b_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} + a_{j1} & a_{i2} + a_{j2} & \dots & a_{in} + a_{jn} & b_i + b_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} & b_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right)$$

Очевидно, что такие преобразования не уменьшают множество решений. Так как можем сделать обратные преобразования, СЛУ равносильны.

2.3. Алгоритм Гаусса

- Прямой ход:

Приводим матрицу к ступенчатому виду с помощью преобразований

- Обратный ход:

Сделать все лидеры равными 1

Поднимаемся снизу вверх, зануляя все над лидером

3. Матрицы

Матрица - это таблица с числами:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

В данном случае $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ — множество матриц $m \times n$ с числами из \mathbb{R}
 $M_n(\mathbb{R})$ — множество квадратных матриц $n \times n$ с числами из \mathbb{R}

Операции, которые можно делать с матрицами:

- Сложение / вычитание:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

- Умножение на число

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \dots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Транспонирование

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Иными словами, отражаем относительно главной диагонали:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

- Умножение на матрицу Пусть $A \in M_{nm}(\mathbb{R}), B \in M_{mk}(\mathbb{R})$.

Тогда $AB \in M_{nk}(\mathbb{R})$, причем $AB_{ij} = \sum_{r=1}^m A_{ir}B_{rj}$

Некоторые матрицы:

- Нулевая матрица

A – нулевая матрица, если $\forall i, j \ A_{ij} = 0$

Если известны размеры, то можно просто написать $A = 0$

- Единичная матрица

Матрица, в которой на диагонали стоят 1, а остальные числа равны 0

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ — единичная матрица } n \times n$$

Называется так, потому что $AE = EA = A$

Тогда с точки зрения матриц, СЛУ можно записать так:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$Ax = b$$

Если СЛУ однородная, то $Ax = 0$

Полезные свойства операций над матрицами:

- Ассоциативность

$$(AB)C = A(BC)$$

- Дистрибутивность относительно сложения

$$(A + B)C = AC + BC$$

Связь СЛУ и ОСЛУ:

$$A \in M_{mn}(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n, x_0 \in \mathbb{R}^n : Ax_0 = b$$

Тогда:

$$E_b = \{z \in \mathbb{R}^n \mid Az = b\}, E_0 = \{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0\} \Rightarrow E_b = x_0 + E_0$$

Если в A нулевая строка, то в AB та же строка будет нулевой. Аналогично, если в B есть нулевой столбец.

Замечание 3.1

$$(AB)^T = B^T A^T$$

3.1. Дефекты матричных операций

1. Произведение не коммутативно.

Если матрицы не квадратные, то произведение BA либо не существует, либо имеет отличные от AB размеры.

В случае квадратных, например:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Есть делители нуля.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Диагональные матрицы ведут себя как функции на конечном множестве, поэтому если что-то можно получить с такими функциями, то и с матрицами скорее всего тоже.

Благодаря этому у ОСЛУ могут быть ненулевые решения.

3. Нильпотенты.

$A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ — нильпотентна, если $\exists N : A^N = 0$

Например:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.2. Деление

В силу некоммутативности нам нужно деление слева и деление справа. Но тогда придется доказывать совместимость со всеми остальными операциями. Поэтому вместо деления принято говорить про обратимые матрицы.

Определение 3.2

$$A \in M_{mn}(\mathbb{R}), B \in M_{nm}(\mathbb{R})$$

1. Правая обратная, если $AB = E_m$
2. Левая обратная, если $BA = E_n$

3. Обратная, если верны (1) и (2)

Определение 3.3: След матрицы

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

1. $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr}(A)$
2. $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$
3. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^m (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{ij} B_{ji} \\ \operatorname{tr}(BA) &= \sum_{i=1}^n (BA)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m B_{ij} A_{ji}\end{aligned}$$

Лемма 3.4

$$A \in M_{mn}(\mathbb{R})$$

$\exists L$ — любой левый обратный

$\exists R$ — любой правый обратный

Тогда:

1. $n = m$
2. $L = R \Rightarrow$ существует единственный обратный.

Докажем второе:

$$\begin{aligned}LA &= E \\ AR &= E \\ (LA)R &= L(AR) \\ ER &= LE \\ R &= L\end{aligned}$$

Теперь первое:

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(AB) &= \operatorname{tr}(E_m) = m \\ \operatorname{tr}(BA) &= \operatorname{tr}(E_n) = n \\ \operatorname{tr}(AB) &= \operatorname{tr}(BA) \Rightarrow m = n\end{aligned}$$

Определение 3.5: Обратная матрица

$$A \in M_n(\mathbb{R}), B - \text{обратный} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = E \\ BA = E \end{cases}$$

Тогда $B = A^{-1}$.

Примеры:

1. Матрица с нулевой строчкой или столбцом необратима.
2. Диагональная матрица с ненулевыми элементами обратима:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} = E_n$$

3.3. Элементарные матрицы

1. Как прибавить строчку j , умноженную на λ , к строчке i ?

Нужно умножить слева на матрицу:

$$S_{ij}(\lambda) = \begin{cases} (S_{ij}(\lambda))_{xy} = \lambda, (x, y) = (i, j) \\ (S_{ij}(\lambda))_{xy} = (E_n)_{xy}, \text{ иначе} \end{cases}$$

Если умножить на такую матрицу справа, то к j столбцу прибавится столбец i , умноженный на λ

2. Как поменять две строчки местами?

Умножить слева на матрицу:

$$U_{ij} = \begin{cases} (U_{ij})_{xy} = 1, (x = y \neq i, j) \vee ((x, y) \in \{(i, j), (j, i)\}) \\ (U_{ij})_{xy} = 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Если умножить справа, то поменяются местами столбцы.

3. Как умножить строчку i на λ ?

Умножить слева на матрицу:

$$D_{ij}(\lambda) = \begin{cases} (D_{ij})_{xy} = \lambda, x = y = i \\ (D_{ij})_{xy} = (E_n)_{xy}, \text{ иначе} \end{cases}$$

Если умножить справа, то умножится i -й столбец.

Очевидно, все элементарные матрицы обратимы.

Замечание 3.6

$$A, B \in M_n(\mathbb{R}), \exists A^{-1}, B^{-1} \Rightarrow \exists (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Теорема 3.7

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$

Следующие утверждения эквивалентны:

1. $Ax = 0 \Rightarrow !x$
2. $A^T y = 0 \Rightarrow !y$
3. $A = U_1 \cdot U_2 \cdot \dots \cdot U_k$, U_i — элементарная
4. $\exists A^{-1}$
5. $\exists L \in M_n(\mathbb{R}) : LA = E$
6. $\exists R \in M_n(\mathbb{R}) : AR = E$

Будем доказывать через два цикла:

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 1, \quad 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 2$$

$$3 \rightarrow 4, \quad 4 \rightarrow 5, \quad 5 \rightarrow 1 \text{ очевидны.}$$

$$1 \rightarrow 3:$$

Приведем Гауссом к улучшенному ступенчатому виду. Одно решение, значит у нас n ступенек. Так как матрица квадратная, значит у нас в каждом столбце и каждой строчке есть лидер, то есть улучшенный ступенчатый вид — это E_n . Все преобразования — умножения на элементарную матрицу. Возьмем обратные матрицы (тоже элементарные), умножим на них обратно. Получим A .

Второй цикл аналогично.

Тогда как искать обратную матрицу? Нужно решить $AX = E$.

3.4. Блочные умножения

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX + BZ & AY + BW \\ CX + DZ & CY + DW \end{pmatrix}$$

Примеры:

1.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} A \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c|c} B_1 & \cdots & B_n \end{array} \right) = \\ = (A) (B_1 \cdots B_n) = \\ = (AB_1 \ AB_2 \ \cdots \ AB_n) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c|c} Y_1 & \cdots & Y_n \end{array} \right) = \\ = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} (Y_1 \ \cdots \ Y_n) = \\ = X_1 Y_1 + \cdots + X_n Y_n \end{aligned}$$

3.5. Единственность УСВ для ОСЛУ

Теорема 3.8

Для $Ax = 0$ существует только один улучшенный ступенчатый вид.

Пусть

$$P_k(A) = (\forall x : Ax = 0 \wedge (x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = 0) \Rightarrow x_k = 0)$$

Лемма 3.9

Дана ступенчатая матрица A

$$P_k(A) = true \Leftrightarrow x_k - \text{главная}$$

Доказательство:

• \Rightarrow

Пусть x_k не является главной. Но тогда мы можем назначить ей абсолютно любое значение и $P_k(A)$ не будет верно.

• \Leftarrow

x_k главная \Rightarrow однозначно восстанавливается по x_{k+1}, \dots, x_n . Нетрудно убедиться, что если $x_{k+1} = \dots = x_n$, то $x_k = 0$.

Лемма 3.10

Пусть $Ax = 0 \Leftrightarrow Bx = 0$

Приведём их к ступенчатым видам S_A, S_B

Тогда (главные для S_A) \Leftrightarrow (главные для S_B)

Доказательство Очевидно, что у ступенчатого вида такие же решения, как и у изначальной матрицы. Но тогда

$$P_k(S_A) = P_k(A) = P_k(B) = P_k(S_B)$$

Так как верно 3.9, это доказывает лемму.

Из 3.10 следует, что ступенчатый вид матрицы всегда выглядит одинаково.

Осталось показать, что совпадают УСВ.

Единственная проблема может возникнуть в каком-то столбце, где нет лидера.

Сделаем решение A , где у всех свободных переменных кроме одной значение 0, а у оставшейся 1. Тогда главные примут значений столбца этой переменной с минусом. Подставим в B . Поскольку системы эквивалентны, а главные переменные совпадают, главные в B должны совпадать с столбцом той свободной переменной, умноженному на -1 . Но это значит, что столбцы этой переменной в A и B равны. Прделаем такое для всех переменных \Rightarrow УСВ A и B совпадают.

Теорема 3.11

Пусть $A, B \in M_{mn}(\mathbb{R})$

Следующие утверждения равносильны:

1. $Ax = 0 \Leftrightarrow Bx = 0$
2. A можно элементарными операциями превратить в B
3. \exists обратимая $C \in M_m(\mathbb{R}) : B = CA$
4. $УСВ_A = УСВ_B$

Доказательство:

- $2 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3$ очевидны
- $1 \rightarrow 4$ доказано выше
- $3 \rightarrow 2$ следует из 3.7
- $4 \rightarrow 2$

Приведем A к $УСВ_A$, B к $УСВ_B$. Они равны. Сделаем обратные элементарные преобразования.

3.6. Полиномиальное исчисление

Пусть есть

$$f = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m, A \in M_n(\mathbb{R})$$

Подставим туда A

$$f(A) = a_0 + a_1A + \dots + a_mA^m$$

Имеется проблема a_0 — число, а все остальные слагаемые — матрицы. На самом деле при a_0 стоит x^0 . Поэтому на самом деле все будет так

$$f = a_0E + a_1A + \dots + a_mA^m$$

Лемма 3.12

$$A \in M_n(\mathbb{R}), f, g \in \mathbb{R}[x]$$

Тогда:

1.

$$(f + g)(A) = f(A) + g(A)$$

2.

$$(f \cdot g)(A) = f(A) \cdot g(A)$$

3.

$$f(\lambda E) = f(\lambda)E$$

4.

$$C \in M_n(\mathbb{R}) : \exists C^{-1} \\ f(C^{-1}AC) = C^{-1}f(A)C$$

Лемма 3.13

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$

\Downarrow

$$\exists f \in \mathbb{R}[x] : \deg f \leq n^2 \text{ (} \deg f \leq n \text{)}, f(A) = 0$$

Доказательство:

Рассмотрим

$$f = a_0 + a_1x + \dots + a_{n^2}x^{n^2}$$

Подставим туда A

$$f(A) = a_0E + a_1A + \dots + a_{n^2}A^{n^2} = 0$$

Напишем равенство для каждого элемента. Получится ОСЛУ на $n^2 + 1$ и n^2 уравнений. А значит существует ненулевое решение \Rightarrow есть подходящий многочлен.

Пример 3.14

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Зануляющий многочлен:

$$f = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$$

Интересный факт:

Числа над диагональю могут быть любыми, но многочлен все еще будет занулять.

3.7. Спектр**Определение 3.15**

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$

$$\text{spec}_{\mathbb{R}} A = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid A - \lambda E - \text{необратима}\}$$

Пример 3.16

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\text{spec}_{\mathbb{R}} A = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

Пример 3.17

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\text{spec}_{\mathbb{R}} A = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

Доказательство:

Если после сдвига на λE на диагонали нет нулевого элемента, то у нее, очевидно, n лидеров \Rightarrow она обратима. А если есть, то у нее $< n$ лидеров \Rightarrow элементарными преобразованиями можно получить нулевую строку, поэтому матрица необратима.

Лемма 3.18

$$A \in M_n(\mathbb{R}), g \in \mathbb{R}[x] : g(A) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\text{spec}_{\mathbb{R}} A \subseteq \text{корни } g \text{ в } \mathbb{R}$$

Аналогично $\text{spec}_{\mathbb{C}}(A) \subseteq \text{корни } g \text{ в } \mathbb{C}$

Доказательство:

Будем доказывать $\lambda \neq 0, g(\lambda) \neq 0 \Rightarrow \lambda \notin \text{spec}_{\mathbb{R}} A$.

Покажем, что $A - \lambda E$ обратима.

$$x = \lambda \Rightarrow g = q \cdot (x - \lambda) + r$$

$$g = q \cdot (x - \lambda) + g(\lambda)$$

Подставим сюда A

$$0 = g(A) = q(A)(A - \lambda E) + g(\lambda)E$$

$$-g(\lambda)E = q(A)(A - \lambda E)$$

$$E = (A - \lambda E) \frac{q(A)}{-g(\lambda)}$$

Определение 3.19: Минимальный многочлен

$$A \in M_n(\mathbb{R}), 0 \neq h \in \mathbb{R}[x]$$

h называется минимальным, если

- $h(A) = 0$
- $\deg h \rightarrow \min$
- Старший коэффициент h равен 1

Лемма 3.20

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$

1. Минимальный многочлен h единственный.

2. $\forall g \in \mathbb{R}[x] : g(A) = 0$ верно $f_{\min} | g$
3. $\text{спес}_{\mathbb{R}} A = \text{корни } f_{\min} \text{ в } \mathbb{R}$

Доказательство:

1. Пусть есть h_1, h_2 . Тогда $h_1 - h_2$ тоже зануляющий многочлен, причем степени меньше n (так как старшие члены равны 1). Получается, что этот многочлен должен быть нулевым, а значит $h_1 = h_2$.
- 2.

$$\begin{aligned}
 g &= q \cdot f_{\min} + r \\
 \deg r &< \deg f_{\min} \\
 g(A) &= q(A) \cdot f_{\min}(A) + r(A) \\
 0 &= 0 + r(A) \\
 r(A) &= 0
 \end{aligned}$$

3. Будем доказывать, что $\text{спес}_{\mathbb{R}} A \supseteq \text{корни } f_{\min} \text{ в } \mathbb{R}$
Докажем от противного.

$$\begin{aligned}
 f_{\min}(\lambda) &= 0 \\
 f_{\min}(\lambda) &= (x - \lambda)h(x) \\
 0 &= f_{\min}(A) = (A - \lambda E)h(A)
 \end{aligned}$$

Если $A - \lambda E$ обратима, то $h(A)$ тоже является зануляющим, причем степени на 1 меньше — противоречие. Значит $A - \lambda E$ необратима $\Rightarrow \lambda \in \text{спес}_{\mathbb{R}} A$.

Пример 3.21

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 A^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E
 \end{aligned}$$

В таком случае $h(x) = x^2 + 1$ является зануляющим. У него нет вещественных корней, а значит $\text{спес}_{\mathbb{R}} A = \emptyset$.

4. Перестановки

4.1. Что это вообще такое

Определение 4.1

$$\sigma : \{1, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} \{1, \dots, n\}$$
$$S_n = \{\sigma - \text{перестановка на } \{1, \dots, n\}\}$$

4.1.1. Способы задания

- Явно задать отображения
- Нарисовать табличкой
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
- Нарисовать стрелки между точками на плоскости

4.1.2. Операция

Перестановки можно перемножать.

4.1.3. Свойства

1. Ассоциативность

$$\sigma, \tau, p \in S_n$$

$$\sigma \circ (\tau \circ p) = (\sigma \circ \tau) \circ p$$

2. $id : \{1, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} \{1, \dots, n\}$

$$k \mapsto k$$

$$\sigma \circ id = id \circ \sigma = \sigma$$

3. $\sigma \circ \sigma^{-1} = id = \sigma^{-1} \circ \sigma$

4.1.4. Переименование

Переименуем $i \mapsto \tau_i$
 $\sigma_{\text{нов}} = \tau \sigma \tau^{-1}$

4.1.5. Циклы

Определение 4.2: Цикл

$$\{1, \dots, n\} = \{i_1, \dots, i_k\} \sqcup \{j_1, \dots, j_{n-k}\}, \quad |i| \geq 2$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_{k-1} & i_k & j_1 & j_2 & \cdots & j_{n-k} \\ i_2 & i_3 & i_4 & \cdots & i_k & i_1 & j_1 & j_2 & \cdots & j_{n-k} \end{pmatrix}$$

Краткая запись: $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_k) = (i_2, i_3, \dots, i_k, i_1)$

Определение 4.3: Транспозиция

$\sigma = (i, j)$ — транспозиция

Определение 4.4: Независимые циклы

Циклы $\{i_1, \dots, i_k\}, \{j_1, \dots, j_l\}$ являются независимыми, если $\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{j_1, \dots, j_l\} = \emptyset$

Замечание 4.5

p_1, p_2 — независимые циклы $\Rightarrow p_1 p_2 = p_2 p_1$

По сути композиция двух независимых циклов просто делает перестановку, в которой у нас два “цикла”, если рисовать стрелочками.

Лемма 4.6

1. $\sigma = p_1 \cdot \dots \cdot p_k$ — независимые циклы, причем разложение единственно с точностью до порядка
2. p — цикл $p = \tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_{k-1}$, где τ_i — транспозиция.

4.2. Знак перестановки

Хотим чтобы было так:

$$\begin{cases} \text{Ч} \cdot \text{Ч} = \text{Ч} \\ \text{Ч} \cdot \text{Н} = \text{Н} \\ \text{Н} \cdot \text{Ч} = \text{Н} \\ \text{Н} \cdot \text{Н} = \text{Ч} \end{cases}$$

$$\phi : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$$

$$\begin{cases} \phi(\sigma\tau) = \phi(\sigma)\phi(\tau) \\ \phi \neq 1 \end{cases}$$

Теорема 4.7

$$\exists! \phi : S_n \rightarrow \{\pm 1\} :$$

$$\begin{cases} \phi(\sigma\tau) = \phi(\sigma)\phi(\tau) \\ \phi \neq 1 \end{cases}$$

Доказательство:

Сначала покажем существование:

$d_{ij}(\sigma)$ — правда ли, что (i, j) — инверсия.

Пусть $d(\sigma)$ — количество инверсий $(i < j : \sigma(i) > \sigma(j))$ σ .

Возьмем $\phi = (-1)^{d(\sigma)}$

Нужно показать, что $d(\sigma\tau) = d(\sigma) + d(\tau) \pmod 2$.

Нетрудно убедиться, что $d_{ij}(\tau) + d_{\tau(i)\tau(j)} = d_{ij}(\sigma\tau)$

Теорема 4.8: Единственность знака

$$\phi : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$$

$$\begin{cases} \phi(\sigma\tau) = \phi(\sigma)\phi(\tau) & \text{Тогда} \\ \phi \neq 1 \end{cases}$$

1. $\phi(id) = 1$
2. $\phi(\sigma^{-1}) = \phi(\sigma)^{-1} = \phi(\sigma)$
3. $\phi(\tau\sigma\tau^{-1}) = \phi(\sigma)$
4. $\phi((i, j)) = -1, \forall i, j$
5. $\phi!$

Доказательство:

1.
 $id \circ id = id$
 $\phi(id \circ id) = \phi(id)$
 $\phi(id)^2 = \phi(id)$
 $\phi(id) = 1$
2.
 $\sigma \circ \sigma^{-1} = id$
 $\phi(\sigma)\phi(\sigma^{-1}) = \phi(\sigma\sigma^{-1}) = \phi(id) = 1$
 $\phi(\sigma^{-1}) = \phi(\sigma)^{-1} = \phi(\sigma)$
3. $\phi(\tau\sigma\tau^{-1}) = \phi(\tau)\phi(\sigma)\phi(\tau^{-1}) = \phi(\tau)\phi(\sigma)\phi(\tau)^{-1} = \phi(\sigma)$
4. $(i, j) = \tau(1, 2)\tau^{-1} = (\tau(1), \tau(2))$

Значит все транспозиции имеют один и тот же знак.

Перестановка раскладывается в произведение циклов, а цикл в произведение транспозиций. Значит перестановка — это произведение транспозиций. Если знак всех транспозиций равен 1, то знак всех перестановок равен 1 — противоречие. Значит знак всех перестановок равен -1 .

5. Пусть есть ϕ, ϕ' .

$$\begin{aligned}\phi(\sigma) &= \phi(\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \dots \cdot \tau_k) = \phi(\tau_1)\phi(\tau_2) \dots \phi(\tau_k) = \\ &= (-1)^k = \\ &= \phi'(\tau_1)\phi'(\tau_2) \dots \phi'(\tau_k) = \phi'(\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \dots \cdot \tau_k) = \phi'(\sigma)\end{aligned}$$

5. Определители

Идея: считать ориентированный объем (длину / площадь)

Существует несколько способов задать определитель. Мы приведем 3 и докажем их равносильность. Будем доказывать равносильность так: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1$

Определение 5.1: Определитель

Опишем 3 способа задания:

1. Явная формула

$$A \in M_n(\mathbb{R}), \det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

2. Полилинейная кососимметрическая функция (можно и по строкам)

$$\phi : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A = (A_1 | \dots | A_n)$$

$$\phi(A) = \phi(A_1, \dots, A_n)$$

- Полилинейность

$$\begin{aligned} \phi(A_1, \dots, A_i + A'_i, \dots, A_n) &= \\ &= \phi(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n) + \phi(A_1, \dots, A'_i, \dots, A_n) \\ \phi(A_1, \dots, \lambda A_i, \dots, A_n) &= \lambda \phi(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n) \end{aligned}$$

- Кососимметричность

$$\phi(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) = -\phi(A_1, \dots, A_j, \dots, A_i, \dots, A_n)$$

- $\phi(E) = 1$

3. Мультипликативная функция

$$\Psi : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

- $\Psi(AB) = \Psi(A)\Psi(B)$

- $\Psi \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & d \end{pmatrix} = d$

Пример 5.2

Из первого определения:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Пример 5.3

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$$

Лемма 5.4

$$A \in M_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \det A^T = \det A$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \det A^T &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) (A^T)_{1\sigma(1)} \dots (A^T)_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} \dots a_{n\sigma^{-1}(n)} = \sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho^{-1}) a_{1\rho(1)} \dots a_{n\rho(n)} = \det A \end{aligned}$$

Лемма 5.5

Определитель — полилинейный кососимметрический по строкам (столбцам)

Доказательство:

Полилинейность:

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \dots \cdot (a_{i\sigma(i)} + a'_{i\sigma(i)}) \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} \\ &= \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \dots \cdot a_{i\sigma(i)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \dots \cdot a'_{i\sigma(i)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} \end{aligned}$$

Кососимметричность:

Вместо суммы по σ , будет сумма по $\sigma(i, j)$. Но $\operatorname{sgn}(\sigma(i, j)) = -\operatorname{sgn}(\sigma)$
 $\det E = 1$ (очевидно)

Лемма 5.6

$\phi : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

ϕ — полилинейная + кососимметрическая по строкам

Тогда

1. Прибавление строки к другой не меняет ϕ
2. Если поменять две строки местами, ϕ меняет знак
3. Можно выносить коэффициент строки за ϕ

Последние два следуют из полилинейности и кососимметричности. Покажем выполнение первого:

$$\phi(A') = \phi \left(\begin{array}{c} \hline A_i \\ \hline \\ \hline A_j + \lambda A_i \\ \hline \end{array} \right) = \phi \left(\begin{array}{c} \hline A_i \\ \hline \\ \hline A_i \\ \hline \end{array} \right) + \lambda \phi \left(\begin{array}{c} \hline A_i \\ \hline \\ \hline A_i \\ \hline \end{array} \right) = \phi(A)$$

По кососимметричности у матрицы с двумя равными строками $\phi = 0$, так как при их смене должен поменяться знак ϕ , но сама матрица не меняется, а значит и ϕ тоже.

Замечание 5.7

- $\det S_{ij} = 1$
- $\det U_{ij} = -1$
- $\det D_i(\lambda) = \lambda$

Лемма 5.8

$\phi : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

Тогда:

1. $\phi(UX) = \det(U)\phi(X)$
 $\forall X \in M_n(\mathbb{R}), \forall U$ — элементарная
2. $\phi(AX) = \det(A)\phi(X)$
 $\forall X \in M_n(\mathbb{R}), \forall A \in M_n(\mathbb{R})$ — элементарная

Доказательство:

Первое очевидно.

Второе:

Пусть A — невырожденная.

Тогда $A = U_1 \dots U_k$.

\det тоже кососимметрическая и полилинейная функция, поэтому:

$$\det(A) = \det(AE) = \det(U_1) \dots \det(U_k) \det(E) = \det(U_1) \dots \det(U_k)$$

Но тогда:

$$\phi(AX) = \det(U_1) \dots \det(U_k) \phi(X) = \det(A) \phi(X)$$

A — вырожденная $\Rightarrow AX$ — вырожденная. Просто приведем к улучшенному ступенчатому виду, там будет нулевая строка $\Rightarrow \det = \phi = 0$.

Следствия:

1. $B = E \quad \phi(A) = \det(A) \phi(E) \quad \phi(A) = C \det(A)$
2. $\phi(E) = 1 \Rightarrow \phi(A) = \det(a)$
3. $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ — полилинейная кососимметрическая функция

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & d \end{pmatrix} = d$$

Значит доказали $2 \rightarrow 3$

Покажем, что определитель блочной верхнетреугольной матрицы — произведение определителей диагональных блоков.

$$D = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$
$$\det D = \det A \cdot \det C$$

$$\begin{aligned}\phi_1 : M_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ X &\rightarrow \det \begin{pmatrix} X & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ϕ_1 — полилинейная кососимметрическая функция по столбцам, так как можно спокойно менять местами и складывать любые два столбца X . Также несложно доказать, что можно выносить константу из столбца.

$$\begin{aligned}\phi_1(X) &= \det(X) \phi_1(E) \\ \phi_1(A) &= \det(A) \det \begin{pmatrix} E & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Аналогично рассмотрим

$$\begin{aligned}\phi_2 : M_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\rightarrow \det \begin{pmatrix} E & B \\ 0 & y \end{pmatrix} \\ \phi_2(C) &= \det C \det \begin{pmatrix} E & B \\ 0 & E \end{pmatrix} = \det C\end{aligned}$$

$$\det D = \phi_1(A) = \det(A) \phi_2(C) = \det(A) \det(C)$$

Давайте теперь доказывать $3 \rightarrow 1$ $\Psi : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$1. \Psi(AB) = \Psi(A)\Psi(B)$$

$$2. \Psi \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & d \end{pmatrix} = d, \forall d \in \mathbb{R}, d \neq 0$$

Замечание 5.9

$$1. \Psi(E) = 1$$

$$2. A \in M_n(\mathbb{R}) \text{ — обратима} \Rightarrow \Psi(A^{-1}) = \Psi(A)^{-1}$$

Давайте докажем, что

$$1. \Psi(S_{ij}(\lambda)) = 1$$

$$2. \Psi(D_i(\lambda)) = \lambda$$

$$3. \Psi(U_{ij}) = -1$$

1. Давайте попытаемся представить $S_{ij}(\lambda)$ в виде $S_{ij} = ABA^{-1}B$.

$$\text{Тогда } \Psi(S_{ij}(\lambda)) = \Psi(A)\Psi(B)\Psi(A^{-1})\Psi(B^{-1}) = 1$$

Покажем на примере 2×2

$$\begin{aligned} S_{12}(\lambda) &= \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

В общем случае $S_{ij}(\lambda) = D_i(\lambda) \cdot S_{12}(\lambda) \cdot D_i^{-1}(\lambda) \cdot S_{ij}^{-1}(\lambda)$

2. $\Psi(D_n(\lambda)) = \lambda$. Постараемся найти разложение $D_i(\lambda) = A \cdot D_n(\lambda) \cdot A^{-1}$.

$$\text{Так совпало, что } D_i(\lambda) = U_{in} D_n(\lambda) U_{in}^{-1}.$$

$$\text{Тогда } \Psi(D_i(\lambda)) = \Psi(U_{in})\Psi(D_n(\lambda))\Psi(U_{in}^{-1}) = \Psi(D_n(\lambda)) = \lambda$$

3. Опять разберем на примере 2×2

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ U_{12} &= D_1(-1) \cdot S_{21}(1) \cdot S_{12}(-1) \cdot S_{21}(1) \\ U_{ij} &= D_i(-1) \cdot S_{ji}(1) \cdot S_{ij}(-1) \cdot S_{ji}(1) \end{aligned}$$

Теорема 5.10

$$1. \Psi(E) = 1$$

$$2. A \in M_n(\mathbb{R}) \text{ — обратима} \Rightarrow \Psi(A^{-1}) = \Psi(A)^{-1}$$

$$\text{Тогда } \Psi(A) = \det(A)$$

- A — невырожденная

Поскольку Ψ уважает умножение, а так же совпадает с определителем на элементарных функциях:

$$\Psi(A) = \Psi(U_1) \dots \Psi(U_k) = \det(U_1) \dots \det(U_k) = \det A$$

- A — вырожденная

Надо показать, что $\Psi(A) = 0$.

Пусть A' — ступенчатый вид A

$$\Psi(A) = \Psi(U_1) \dots \Psi(U_2) \Psi(A')$$

Покажем, что $\Psi(A') = 0$

В ней мы можем умножить последнюю строчку на 2, и матрица не поменяется, поэтому

$$\begin{aligned} A' &= D_n(2) \cdot A' \Rightarrow \Psi(A') = \Psi(D_n(2))\Psi(A') \\ \Psi(A') &= 2\Psi(A') \\ \Psi(A') &= 0 \end{aligned}$$

5.1. Миноры

M_{ij} — определитель матрицы, если в ней выкинуть i -й столбец и j -ю строку
 $\mathcal{A}_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ — алгебраическое дополнение.

Лемма 5.11

$$\begin{aligned} A &\in M_n(\mathbb{R}) \\ \det A &= a_{i1}\mathcal{A}_{i1} + a_{i2}\mathcal{A}_{i2} + \dots + a_{in}\mathcal{A}_{in} \\ \det A &= a_{1i}\mathcal{A}_{1i} + a_{2i}\mathcal{A}_{2i} + \dots + a_{ni}\mathcal{A}_{ni} \end{aligned}$$

Называется разложению по строке (столбцу)

Для доказательства через полилинейность сделаем кучу матриц, где в i -й строке есть только a_{ij} . Потом свапами загоним a_{ij} на позицию 1, 1. Получится блочная нижнетреугольная матрица. Теперь определитель этой матрицы — $\det(a_{ij}) \det M_{ij}$. Но свапы дали знак $(-1)^{(i-1)+(j-1)} = (-1)^{i+j}$. Значит суммируем $(-1)^{i+j} \cdot \det(a_{ij}) \det M_{ij} = a_{ij}\mathcal{A}_{ij}$.

Пусть есть $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Заменим элементы $A : a_{ij} \rightarrow \mathcal{A}_{ij}$. Назовем полученную матрицу A^* .

$\hat{A} = (A^*)^T$ — присоединенная матрица ($\hat{A}_{ij} = \mathcal{A}_{ji}$)

Лемма 5.12

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$

$$\text{Тогда } A\hat{A} = \hat{A}A = \det(A) \cdot E$$

Следствие 5.13

Если A невырожденная, то $A^{-1} = \frac{\hat{A}}{\det(A)}$

Покажем, что $A\hat{A} = \det(A)E$

$$(A\hat{A})_{ii} = \sum_{j=1}^n A_{ij}\hat{A}_{ji} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} = \det(A)$$

$$i \neq j : (A\hat{A})_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik}\hat{A}_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk}$$

Давайте заметим, что это определитель матрицы (разложили по j -й строке):

$$A' = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \end{pmatrix}$$

Но он равен 0, так как в A' есть две равные строки.

5.2. Формула Крамера

$$A \in M_n(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n$$

$$\exists A^{-1} \Rightarrow x = A^{-1}b = \frac{\hat{A}}{\det A}b$$

Лемма 5.14: Формула Крамера

$$A \in M_n(\mathbb{R}) \quad x, b \in \mathbb{R}^n \quad Ax = b \Rightarrow \Delta \cdot x_i = \Delta_i$$

Где $\Delta = \det A$, а Δ_i — определитель A , если в ней поменять i -й столбец на b

Доказательство:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_nA_n = b$$

Тогда

$$\Delta_i = \det \left(\begin{array}{c|c} & \sum_{j=1}^n x_j A_j \end{array} \right) = \sum_{j=1}^n x_j \det \left(\begin{array}{c|c} & A_j \end{array} \right) =$$

При $i \neq j$ A_j так же будет стоять в другом месте, поэтому определитель равен 0, значит все кроме одного слагаемых равно 0. Итого:

$$\Delta_i = x_i \det \begin{pmatrix} & & \\ & A_i & \\ & & \end{pmatrix} = x_i \det A = x_i \Delta$$

5.3. Характеристический многочлен

Определение 5.15: Характеристический многочлен

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$

$$\det(\lambda E - A) = \mathcal{X}_A$$

Замечание 5.16

$$\mathcal{X}_A = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$$

Fun fact: $a_0 = \det(0 \cdot E - A) = \det(-A) = (-1)^n \det A$

Степень $n - 1$ можно достать только из $(\lambda - a_{11}) \dots (\lambda - a_{nn})$

Поэтому $a_{n-1} = -\operatorname{tr} A$

Замечание 5.17

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$

$$\lambda \in \operatorname{spec}_{\mathbb{R}} A \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R} \quad A - \lambda E - \text{необратима} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R} \quad \det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda - \text{корень } \mathcal{X}_A \text{ в } \mathbb{R}$$

Лемма 5.18

R_{i_1, \dots, i_k} — матрица A , если из нее вычеркнуть столбцы и строки i_1, \dots, i_k
Тогда

$$a_k = (-1)^{n-k} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \det R_{i_1, \dots, i_k}$$

$$a_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \det(-R_{i_1, \dots, i_k})$$

Доказываем:

Надо раскрыть скобки. Тогда получим матрицу со столбцами либо λE_i , либо $-A_i$. Разложим по очереди по столбцам, где находятся λE_i . Получим $\lambda^k \det(-R_{i_1, \dots, i_k})$. Остается сложить такое по всем слагаемым.

Теорема 5.19

\mathcal{X}_A — зануляющий для A

Для это выйдем из $\mathbb{R}[\lambda]$ в $M_n(\mathbb{R})[\lambda]$. Произведение/сумму там определим как и в обычном умножении.

Fun fuct:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[t] &\subseteq M_n(\mathbb{R})[t] \\ \sum_k a_k t^k &\mapsto \sum_k a_k E t^k \end{aligned}$$

Определим левую и правую подстановку:

$$D \in M_n(\mathbb{R}) f(D) = \sum_{k=0}^n A_k D^k (D) f = \sum_{k=0}^n D^k A_n$$

Свойства:

$$f, g \in M_n(\mathbb{R})[t] D \in M_n(\mathbb{R})$$

1. $(f + g)(D) = f(D) + g(D)$
2. Чаще всего $(f \cdot g)(D) \neq f(D) \cdot g(D)$
 $BD \neq DB, f = t, g = B$
 $(f \cdot g)(B) = B \cdot D \neq D \cdot B = f(D) \cdot g(D)$
3. D коммутирует с коэффициентами $g \Rightarrow (f \cdot g)(D) = f(D) \cdot g(D)$

Лемма 5.20

$$\mathcal{X}_A(A) = 0 \text{ в } M_n(\mathbb{R})$$

План:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_A &\in M_n(\mathbb{R})[t] \\ \mathcal{X}_A &= f(t) \cdot g(t) \end{aligned}$$

1. A коммутирует с коэффициентами g
2. $g(A) = 0$

$\widehat{tE - A} = R(t)$. Нетрудно понять, что $R(t) \in M_n(\mathbb{R}[t])$. Тогда

$$R(t) = R_k t^k + \dots + R_0$$

$$(tE - A)(\widehat{tE - A}) = \det(tE - A) \cdot E$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{X}_A(t) \cdot E = R(t)(tE - A)$$

Нетрудно видеть, что такое разбиение на множители подходит.

6. Комплексные числа

6.1. Определение

[TODO] 05.11 Lektion

6.2. Алгебраическая замкнутость

Теорема 6.1

\mathbb{C} алгебраически замкнуто.

$$(\forall f \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C} \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C} : f(\alpha) = 0)$$

Доказательство:

Шаг 1:

$$\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$z \rightarrow |f(z)|$$

Хотим $\exists z_0 \in \mathbb{C} : \forall z \in \mathbb{C} \varphi(z_0) \leq \varphi(z)$.

Лемма 6.2

$$f \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C}$$

$$\forall C > 0 \exists R > 0 : (|z| > R \Rightarrow |f(z)| > C)$$

Зафиксируем $C > 0$ и f .

$$f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = a_nx^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n} \right) = a_nx^n(1 + \omega(x))$$

$$|f(z)| = |a_n||z^n||1 + \omega(z)| \geq |a_n|R^n(1 - |\omega(z)|)$$

$$|\omega(z)| = \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{z} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{z^n} \right| \leq \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \cdot \frac{1}{|z|} + \dots + \left| \frac{a_0}{a_n} \right| \cdot \frac{1}{|z|^n}$$

Будем считать, что $|z| > 1$. Тогда

$$|\omega(z)| \leq \left(\left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \dots + \left| \frac{a_0}{a_n} \right| \right) \cdot \frac{1}{|z|} \leq \left(\left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \dots + \left| \frac{a_0}{a_n} \right| \right) \cdot \frac{1}{R}$$

Последнее можно оценить как $\frac{1}{2}$ при достаточно большом R .

Вернемся к оценке $|f(z)|$:

$$|f(z)| \geq |a_n|R^n(1 - |\omega(z)|) \geq |a_n|\frac{R^n}{2}$$

Получили несколько ограничений снизу на R , выберем максимальное.

Вернемся к шагу 1.

Покажем, что если мы нашли минимум внутри диска для $C = |f(0)|$, то он будет минимумом на всей плоскости.

И правда, пусть минимум в z_0 . Тогда $f(z_0) \leq f(0) = C \leq f(z)$ для любого числа z вне диска.

Остается найти минимум внутри диска (обозначим диск $D(R)$).

Заметим, что $|f(z)| \geq 0$, поэтому у $|f(z)|$ есть инфимум внутри диска. $a = \inf_{z \in D(R)} |f(z)|$ Он является предельной точкой, поэтому $\exists \{z_n\} : \lim_{n \rightarrow \infty} |f(z_n)| = a$.

Если последовательность комплексных чисел ограничена диском, то у нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность: $z_n = a_n + b_n \cdot i$ — давайте проредим так, чтобы a_n сходились, а потом полученную последовательность проредим еще раз, чтобы теперь и b_n сходились. Мы можем так сделать, потому что $a_n, b_n \in [-R, R]$.

Давайте проредим нашу $\{z_n\}$ так, чтобы она сходилась к какому-то z_0 .

Получим $\{z'_n\}$

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} |f(z'_n)| = |f(\lim_{n \rightarrow \infty} z'_n)| = |f(z_0)|$$

Шаг 2:

Есть $f \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C}$ Уже знаем, что $\exists z_0 \in \mathbb{C} : \forall z \in \mathbb{C} \quad |f(z_0)| \leq |f(z)|$.

Если $|f(z_0)| = 0$, то мы нашли корень — это z_0 .

Иначе $|f(z_0)| > 0$. Покажем, что такое невозможно.

Сделаем замену $f(z) \rightarrow f(z + z_0)$. Теперь минимальный модуль достигается в точке 0, поэтому можно считать, что $z_0 = 0$.

$$f(z_0) = f(0) = a_0 \neq 0.$$

Поделим многочлен на $a_0 : f \rightarrow \frac{f}{a_0}$.

Тогда $f = 1 + a_k z^k + \dots + a_n z^n$, где a_k — первая ненулевой коэффициент после

1. $|f(z)| \geq |f(z_0)| = |f(0)| = 1$.

Сделаем замену $z \rightarrow \alpha z$, где α — какое-то комплексное число.

$$\text{Теперь } f = 1 + a_k \alpha^k z^k + \dots + a_n \alpha^n z^n.$$

Хотим, чтобы $a_k \alpha^k = -1$.

Но мы точно можем такое сделать, потому что $\alpha^k = -\frac{1}{a_k}$, очевидно, решается (корень можно найти через тригонометрическую форму).

Теперь $f(z) = 1 - z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \dots + a_n z^n$ ($\{a_n\}$ — это уже новые коэффициенты).

Заметим, что последняя замена не сдвигает 0 и является биективной, поэтому все еще $|f(z)| \geq |f(0)| = 1$.

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 - z^k + z^{k+1}(a_{k+1} + \dots + a_n z^{n-k-1}) = 1 - z^k + z^{k+1} \omega(z) \\ f(z) &= 1 - z^k (1 - 2\omega(z)) \end{aligned}$$

Если бы не последнее слагаемое, то мы бы смогли получить $|f(z)| < 1$ с помощью любого $z \in \mathbb{R} : 0 < |z| < 1$.

Покажем, что мы можем сделать последнюю скобку $< \varepsilon$ с помощью таких z .

$$|z\omega(z)| = |z(a_{k+1} + \dots + a_n z^{n-k+1})| \leq |z|(|a_{k+1}| + \dots + |a_n z^{n-k+1}|) \leq |z|(|a_{k+1}| + \dots + |a_n|)$$

Последнее может быть сколь угодно малым при $0 < |z| < 1$.

Но тогда $f(z) = 1 - z^k(1 - z\omega(z))$ может быть меньше 1 — противоречие.

7. Векторные пространства

7.1. Определение

F — поле.

- Структура:

1. V — множество
2. $+: V \times V \rightarrow V$
3. $\cdot: F \times V \rightarrow V$

- Аксиомы:

4. $(v + u) + w = v + (u + w)$
5. $\exists! 0 \in V : v + 0 = 0 + v = v$
6. $\forall v \in V \exists! -v : v + (-v) = (-v) + v = 0$
7. $v + u = u + v$
8. $\lambda \cdot (v + u) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot u$
9. $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$
10. $(\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$
11. $1 \cdot v = v$

Пример 7.1

- \mathbb{R}^n (на самом деле F^n)
- $M_{mn}(F)$
- $F[x]$
- $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$

Замечание 7.2

1. $0 \in F, v \in V \Rightarrow 0 \cdot v = 0 \in V$
2. $\alpha \in F, 0 \in V \Rightarrow \alpha \cdot 0 = 0 \in V$
3. $-1 \in F, v \in V \Rightarrow (-1) \cdot v = -v$

7.2. Подпространство

V — векторное пространство над F

Если выполнено:

- $U \subseteq V$
- $\forall u_1, u_2 \in U \quad u_1 + u_2 \in U$
- $\begin{cases} \lambda \in F \\ u \in U \end{cases} \Rightarrow \lambda \cdot u \in U$

Пример 7.3

1. $V = F^n$ и $A \in M_m n(F)$
 $U = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$
2. $U = 0$
 $U = V$
 (тривиальные подпространства)
3. $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$
 $U = R[x]$

7.3. Линейные комбинации

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \in V$ — линейная комбинация.

Если $\alpha_1 = \dots = \alpha_k$, комбинация называется тривиальной.

Определение 7.4

$v_1, v_2, \dots, v_k \in V$

1. Если $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \neq 0 : \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$, то вектора называют линейно зависимыми.
2. Вектора называют линейно независимыми (ЛНЗ), если $(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$

Определение 7.5

$$E \subseteq V$$

1. E — линейно зависимо, если существует конечный набор линейно зависимых векторов из E .
2. E — ЛНЗ, если любой конечный набор векторов из E — ЛНЗ.

Пример 7.6

$$V = \mathbb{R}[x]$$

$$E = \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\} \text{ — ЛНЗ}$$

Определение 7.7

- $v_1, \dots, v_k \in V$ порождают V , если $\forall v \in V \exists \alpha_1, \dots, \alpha_k : v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$
- $E \subseteq V$ — порождающее, если $\forall v \in V \exists v_1, \dots, v_k \in E : \exists \alpha_1, \dots, \alpha_k : v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$

Определение 7.8

- $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$
Линейная оболочка $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$
- $E \subseteq V$
Линейная оболочка $\langle E \rangle = \{ \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \mid \forall v_1, \dots, v_k \in E, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in F \}$

Замечание 7.9

Линейная оболочка является векторным подпространством

Теорема 7.10

V — векторное пространство над F

$$E \subseteq V$$

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. E — максимальное ЛНЗ (нельзя добавить еще вектор с сохранением ЛНЗ).
2. E — минимальное порождающее (нельзя убрать вектора).
3. E — ЛНЗ и порождающее.

Определение 7.11: Базис

Если E удовлетворяет свойствам выше, его называют базисом V .

- (1) \Rightarrow (3)

Рассмотрим $v \in V$

1. $v \in E \Rightarrow$ можем получить v линейной комбинацией из E
2. $v \notin E \Rightarrow E \cup \{v\}$ — линейно зависимо. Тогда существует конечная линейная комбинация векторов из E , равная 0, где участвует v :

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha v = 0$$

Если $\alpha = 0$, то E было линейно зависимым — противоречие.

$$\text{Значит } v = \frac{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k}{-\alpha}.$$

Значит E — порождающее, что и требовалось доказать.

- (3) \Rightarrow (1)

V — порождающее \Rightarrow существует конечная линейная комбинация, равная $v \in V$. Поэтому $E \cup \{v\}$ — линейно зависимо.

- (2) \Rightarrow (3)

Пусть E — линейно зависимо. Тогда $\exists v_1, \dots, v_k \in E, (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \neq 0$.

Не умаляя общности, $\alpha_1 \neq 0$. Тогда $v_1 = \frac{\alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k}{-\alpha_1}$

Давайте заменим v_1 во всех комбинациях на линейную комбинацию выше. Тогда $E \setminus \{v_1\}$ — тоже порождающее — противоречие.

Значит E — ЛНЗ, что и требовалось доказать.

- (3) \Rightarrow (2)

Пусть E — не минимальное порождающее.

Значит $\exists v \in V : E \setminus \{v\}$ — тоже порождающее.

Тогда v можно представить линейной комбинацией из $E \setminus \{v\}$.

Но тогда $E = (E \setminus \{v\}) \cup \{v\}$ — линейно зависимо — противоречие.

Замечание 7.12

Как быстро записывать линейные комбинации:

$$v = (v_1, \dots, v_k) \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = v \cdot \alpha$$

7.4. Базис

V — векторное пространство.

Вопросы:

1. Существует ли базис?
2. Существует ли конечный базис?
3. e и f — базисы.

Правда ли, что $|e| = |f|$?

Ответы:

1. Если вы верите в аксиому выбора, то можно показать существование базиса в любом векторном пространстве. Если же нет, то в некоторых пространствах нельзя ни доказать, ни опровергнуть существование базиса:

$$V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$$

2. Если V имеет конечный базис, то и $U \subseteq V$ тоже имеет конечный базис.
3. Это правда, но докажем только для конечных базисов.

Доказательство последнего:

1. Пусть v_1, \dots, v_k — порождающее V . Тогда $u_1, \dots, u_{k+1} \in V$ — линейно зависимые.
2. Пусть e_1, \dots, e_n — базис.

Тогда $E \subseteq V$ базис $\Rightarrow |E| < \infty, |E| = n$

$$u_i = (v_1, \dots, v_k) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1, \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$$

$$(u_1, \dots, u_{k+1}) = (v_1, \dots, v_k) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k1} & \dots & \alpha_{kk+1} \end{pmatrix}$$

Назовем матрицу A . Давайте найдем ненулевое решение $Ax = 0$ (такое есть, потому A — широкая).

Умножим последнее равенство на x справа. Тогда справа получится 0, а слева ux .

Но это значит, что u — линейно зависимое.

Теперь пусть у нас есть базисы e и f , причем e конечный. По предыдущему утверждению $|f| \leq |e|$, то есть f тоже конечный. Но тогда аналогично $|e| \leq |f|$. Значит $|e| = |f|$.

Определение 7.13

V — векторное пространство над F .
 $\dim V = |E|$, где E — базис.

Лемма 7.14

V — векторное пространство над F , причем $\dim V < \infty$.
 $U \subseteq V$ — подпространство.
Тогда

1. $\dim U < \dim V$
2. $U = V \Leftrightarrow \dim U = \dim V$

Рассмотрим E — базис U . E — ЛНЗ в $V \Rightarrow |E| \leq \dim V$. Но $\dim U = |E|$.

Докажем вторую часть утверждения.

Слева направо очевидно.

Пусть $\dim U = \dim V = n$. Теперь рассмотрим e_1, \dots, e_n — базис U . Тогда $U = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$. Но с другой стороны E — максимальное ЛНЗ в V , поэтому E является и базисом V . Но тогда $V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle = U$.

7.5. Координаты

V — векторное пространство над F .

e_1, \dots, e_n — базис (фиксированный)

Пусть $v \in V$

$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, тогда x_1, \dots, x_n определяются однозначно.

Иначе $y_1 e_1 + \dots + y_n e_n = v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \Rightarrow (x_1 - y_1) e_1 + \dots + (x_n - y_n) e_n = 0$ откуда по линейной независимости базиса получаем, что $x_i = y_i$.

Тогда x_1, \dots, x_n — координаты v в базисе e_1, \dots, e_n .

Теперь можно заменить V на F^n

Пусть есть базисы e_1, \dots, e_n и f_1, \dots, f_n

$(e_1, \dots, e_n)x = v = (f_1, \dots, f_n)y$, $x, y \in F^n$.

Для того, чтобы понять, как меняются координаты, нужно понять как связаны два базиса. В этом поможет матрица перехода:

$$f_1 = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix} \quad \dots \quad f_n = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} c_{1n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{pmatrix}$$

Теперь объединим это все в одну матрицу:

$$(f_1, \dots, f_n) = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

$$(f_1, \dots, f_n) = (e_1, \dots, e_n) C$$

Покажем, что C — невырожденная.

Аналогично можем получить $(e_1, \dots, e_n) = (f_1, \dots, f_n) D$

Значит $(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_n) CD \Rightarrow (e_1, \dots, e_n) (E - CD) = 0$

В силу линейной независимости e_1, \dots, e_n , каждый столбец $E - CD$ является нулевым. Значит C имеет обратную справа, а значит является обратимой.

Отсюда можно получить, что при умножении базиса на обратимую матрицу получается другой базис.

Пусть $(e_1, \dots, e_n) C = (f_1, \dots, f_n)$

Покажем, что f_1, \dots, f_n — ЛНЗ.

Пусть $(f_1, \dots, f_n) x = 0 \Rightarrow (e_1, \dots, e_n) Cx = 0$

По аналогичным рассуждениям (как с $E - CD$), $Cx = 0$. Но C — обратимая, значит $x = 0$.

Теперь наконец-то научимся менять координаты:

$$(e_1, \dots, e_n) C = (f_1, \dots, f_n)$$

$$(e_1, \dots, e_n) x = v = (f_1, \dots, f_n) y = (e_1, \dots, e_n) Cy$$

Поскольку координаты определяются однозначно, $x = Cy$.

Определение 7.15

Фундаментальная система решений — максимальный набор ЛНЗ решений системы $Ay = 0$

Иначе говоря, базис $u = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$

Как искать ФСР?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = 0$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 &= -4 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 &= 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_4 &= 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что такие решения линейно-независимы (потому что для каждой свободной переменной только одно решение имеет ненулевое коэффициент).

Почему оно порождающее?

Очевидно, что в силу построения такого решения мы можем получить решение с любым набором свободных коэффициентов. А если у решений совпадают все свободные, то и все главные тоже равны.

7.6. Ранг матрицы

Определение 7.16: Столбцовый ранг

$$rk_{\text{столб}} A = \dim \langle A_1, \dots, A_n \rangle$$

Определение 7.17: Строчной ранг

$$rk_{\text{строч}} A = \dim \left(\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \right)$$

Определение 7.18: Факториальный ранг

Пусть A — матрица $m \times n$.

Рассмотрим все возможные разбиения A на множители размерами $m \times k$, $k \times n$. Среди всех таких выберем наименьшее k — это rk_{Φ} .

Для нулевой матрицы: $rk_{\Phi} 0 = 0$

Определение 7.19: Тензорный ранг

Пусть A — матрица $m \times n$.

$$rk_T A = \{k \mid A = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n, x_i \in F^m, y_i^T \in F^n\}$$

Для нулевой матрицы: $rk_T 0 = 0$

Определение 7.20: Минорный ранг

Квадратная подматрица — элементы на пересечении k столбцов и k строк.

$rk_M A$ = размер максимальной (именно максимальной, а не наибольшей) невырожденной квадратной подматрицы.

Замечание 7.21

В силу блочного умножения $rk_{\Phi} = rk_T$.

Лемма 7.22

$$A \in M_{mn}(F)$$

$C \in M_m(F)$ — невырожденная

$D \in M_n(F)$ — невырожденная

Покажем, что $rk_* A = rk_*(CAD)$ для $*$ = столб, строк, Φ , T

Поскольку $rk_{\text{столб}} A = rk_{\text{строк}} A^T$, можем доказывать только для столбцового.

$$\bullet A \mapsto CA = B$$

$$A = (A_1, \dots, A_n) \quad B = (B_1, \dots, B_n)$$

Столбцы — координаты в базисе, умножение на C — смена координат.

$$\text{Поэтому } \dim \langle A_1, \dots, A_n \rangle = \dim \langle B_1, \dots, B_n \rangle$$

$$\bullet A \mapsto AD = B$$

$$A = (A_1, \dots, A_n) \quad B = (B_1, \dots, B_n)$$

Заметим, что B_i — линейная комбинация A_1, \dots, A_n .

$$\text{Поэтому } \langle B_1, \dots, B_n \rangle \subseteq \langle A_1, \dots, A_n \rangle.$$

С другой стороны $A = D^{-1}B \Rightarrow$ включение верно в другую сторону, а значит линейные оболочки равны, откуда и следует нужное.

Теперь докажем для факториального.

Пусть $A = B_1 \cdot B_2$ и на этом достигается ранг.

Но тогда $B = CAD = (CB_1) \cdot (B_2D)$, а значит $rk_{\Phi} A \geq rk_{\Phi} B$.

Но $A = C^{-1}BD^{-1}$, а значит равенство верно и в другую сторону. Значит $rk_{\Phi} A = rk_{\Phi} CAD$

Лемма 7.23

$$A \in M_{mn}(F)$$

Тогда $rk_{\text{столб}} A = rk_{\text{строк}} A = rk_{\Phi} A = rk_T A$

Давайте элементарными преобразованиями приведем A к виду $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

В силу предыдущей леммы можно доказывать равенство рангов на этой матрице. Пусть размеры $E = r \times r$.

Очевидно, что $rk_{\text{столб}} A = rk_{\text{строк}} A = r$

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} (E \ 0)$$

Причем размеры множителей $n \times r$ и $r \times m$

Значит $rk_{\Phi} \leq rk_{\text{столб}}$

Теперь покажем, что $rk_{\Phi} \geq rk_{\text{столб}}$.

Рассмотрим разбиения на множители, где достигается факториальный ранг $A = BC$, и размер $B = m \times k$, а $C = k \times n$

$$(A_1 \ \dots \ A_n) = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} C$$

A_i — линейная комбинация $B_1, \dots, B_k \Rightarrow \langle A_1, \dots, A_n \rangle \subseteq \langle B_1, \dots, B_k \rangle$.

Но тогда $rk_{\text{столб}} \dim \langle A_1, \dots, A_n \rangle \leq k = rk_{\Phi}$.

Выше показали, что неравенство верно и в другую сторону, поэтому $rk_{\Phi} = rk_{\text{столб}}$

Лемма 7.24

Пусть B максимальная по включению невырожденная квадратная подматрица размера r .

Тогда $r = rk_{\text{столб}} A = rk_{\text{строч}} A = rk_{\Phi} A = rk_T A$

Для начала приведем матрицу A к виду $\begin{pmatrix} B & * \\ * & * \end{pmatrix}$

Заметим, что элементарные преобразования над первыми r строками оставляют B максимальной невырожденной подматрицей:

- Невырожденность B не меняется (так как элементарные преобразования сохраняют ее)
- Если при расширении матрицы мы нашли большую невырожденную, то обратными элементарными преобразованиями получим, что B была не максимальной.

Теперь приведем матрицу B к виду $\begin{pmatrix} E & * \\ * & * \end{pmatrix}$

По аналогичным причинам мы можем прибавлять первые r строк к любым, сохраняя условие леммы. Значит мы можем занулить в первом столбце все кроме первых r строк. Точно так же мы можем занулить и все в первых r строках, кроме первых r столбцов.

Привели B к виду $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$

Теперь будем доказывать для такой матрицы. Предположим, что в $*$ есть ненулевой элемент. Но тогда мы можем расширить E до другой невырожденной квадратной подматрицы — противоречие.

Но тогда на самом деле у B такой вид: $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Но это значит, что r совпал со всеми рангами.

7.7. Линейные отображения

7.7.1. Определение

Определение 7.25: Линейное отображение

V, U — векторные пространства над F

$$\varphi : V \rightarrow U$$

$$1. \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$$

$$2. \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$$

В случае выполнения этих свойств φ — линейное отображение.

Если верно еще и

$$3. \varphi \text{ — биективное}$$

тогда φ — изоморфизм.

Пример 7.26

- $\varphi : F^n \rightarrow F^m$
 $\varphi(x) = Ax$
- $\varphi = 0$
- $id(x) = x$
- $D[0, 1] = \{f[0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists f'\}$
 $F[0, 1] = \{f[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}$
 $\varphi : D[0, 1] \rightarrow F[0, 1]$
 $\varphi(f) = f'$
- $\varphi : C[0, 1] \rightarrow D[0, 1]$
 $\varphi(f) = \hat{f}(x) = \int_0^x f(t)dt$
- $\varphi : M_n(F) \rightarrow M_n(F)$
 $\varphi(X) = X^T$

$$\text{hom}_F(v, u) = \{\varphi \mid \varphi \text{ — } F\text{-линейно}\}$$

Замечание 7.27

$(\text{hom}_F(v, u), +, \cdot)$ — векторное пространство.

Очевидно, что для задания линейного отображения нужно задать его на базисных векторах, причем если у двух отображения совпадают значения на базисе, то они совпадают везде.

7.7.2. Матрица линейного отображения

Сделаем аналог координат.

Идея:

$$\Phi_{\text{коорд}} F^n \rightarrow F^m$$

$$\Phi(x) = Ax$$

$$\Phi : V \rightarrow U$$

e_1, \dots, e_n — базис V

f_1, \dots, f_m — базис U

Сделаем

$$\begin{cases} \Phi(e_1) = u_1 \in U \\ \vdots \\ \Phi(e_n) = u_n \in U \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \dots + a_{m1}f_m \\ \vdots \\ u_n = a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \dots + a_{mn}f_m \end{cases}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{matrix} \end{array} \right)$$

Получаем $\Phi(e_1, \dots, e_n) = (f_1, \dots, f_m)A$ (чтобы нормально определить такое равенство, считаем, что Φ — матрица 1×1 с элементом равным линейному отображению)

Остается понять, как с помощью матрицы задать линейное отображение для любого вектора:

$$v = (e_1, \dots, e_n)x \quad x \in F^n$$

$$\begin{aligned} \Phi(v) &= \Phi((e_1, \dots, e_n)x) = \Phi(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = x_1\Phi(e_1) + \dots + x_n\Phi(e_n) = \\ &= (\Phi(e_1, \dots, e_n))x = (f_1, \dots, f_n)Ax \end{aligned}$$

7.7.3. Смена координат

Что такое смена координат?

$$\begin{aligned}
 \Phi(e_1, \dots, e_n) &= (f_1, \dots, f_m)A \\
 \Phi(e'_1, \dots, e'_n) &= (f'_1, \dots, f'_m)A' \\
 (e'_1, \dots, e'_n) &= (e_1, \dots, e_n)C \\
 (f'_1, \dots, f'_m) &= (f_1, \dots, f_m)D \\
 \Phi(e_1, \dots, e_n)C &= (f_1, \dots, f_m)DA' \\
 \Phi(e_1, \dots, e_n) &= (f_1, \dots, f_m)DA'C^{-1} \\
 A &= DA'C^{-1} \\
 A' &= D^{-1}AC
 \end{aligned}$$

Но сделаем D^{-1} и C элементарными преобразованиями над строками и столбцами. Тогда A можно привести к виду $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

7.8. Ядро и образ

Определение 7.28: Ядро

$$\ker \Phi = \{v \in V \mid \Phi(v) = 0\}$$

Определение 7.29: Образ

$$\text{Im } \Phi = \{\Phi(v) \in U \mid v \in V\} = \Phi(V)$$

Замечание 7.30

$\ker \Phi \subseteq V$ — подпространство

$\text{Im } \Phi \subseteq U$ — подпространство

Пример 7.31

$$\Phi : F^n \rightarrow F^m$$

$$\Phi(x) = Ax$$

$$A \in M_{mn}(F)$$

$$\ker \Phi = \{x \in F^n \mid Ax = 0\}$$

$$\text{Im } \Phi = \{Ax \in F^m \mid x_i \in F\} = \langle A_1, \dots, A_n \rangle$$

(A_i — столбцы A)

Замечание 7.32

$$\dim \operatorname{Im} \Phi = rk A$$

$$\dim \ker \Phi = n - rk A$$

Лемма 7.33

$\Phi : V \rightarrow U$ — линейное отображение

Тогда

1. Φ инъективно $\Leftrightarrow \ker \Phi = 0$
2. Φ сюръективно $\Leftrightarrow \operatorname{Im} \Phi = U$
3. $\dim \ker \Phi + \dim \operatorname{Im} \Phi = \dim V$

Второе очевидно, третье следует из замечания выше.

Докажем первое:

• \Rightarrow

Очевидно

• \Leftarrow

$$\Phi(v_1) = \Phi(v_2) \Rightarrow \Phi(v_1) - \Phi(v_2) = 0 \Rightarrow \Phi(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$$

7.9. Неравенства на ранги

7.9.1. Сумма

Лемма 7.34

$$A, B \in M_{mn}(F)$$

$$\text{Тогда } |rk A - rk B| \leq rk(A + B) \leq rk A + rk B$$

Пусть $rk A = r, rk B = d$.

Заметим, что из тензорного ранга сразу следует, что $A + B$ можно представить в нужной форме из $r + d$ слагаемых, поэтому $rk(A + B) \leq r + d = rk A + rk B$

Для другого неравенства воспользуемся трюком:

$$rk((A + B) - (-B)) \leq rk(A + B) + rk(-B)$$

$$rk A \leq rk(A + B) + rk B$$

$$rk A - rk B \leq rk(A + B)$$

Сделав такое же неравенство на $rk B - rk A$ получим желаемое.

7.9.2. Произведение

Лемма 7.35

$A \in M_{mk}(F)$, $B \in M_{kn}(F)$

Тогда $rk A + rk B - k \leq rk(AB) \leq \min(rk A, rk B)$

$rk A = r$

Тогда $A = A_1 \cdot A_2$ и $A_1 \in M_{mr}(F)$

Значит $AB = A_1 \cdot (A_2 B) \Rightarrow rk AB \leq r = rk A$.

Аналогично можно получить неравенство с $rk B$

Для оценки снизу рассмотрим линейные отображения:

$$1. B : F^n \rightarrow F^k$$

$$x \mapsto Bx$$

$$2. A : F^k \rightarrow F^m$$

$$x \mapsto Ax$$

$$3. AB : F^n \rightarrow F^m$$

$$x \mapsto ABx$$

$Im A = \langle \text{столбцы } A \rangle$

$\ker A = \{x \in F^k \mid x \in F^k\}$

$Im A = \{Ax \in F^m \mid x \in F^k\}$

Поэтому $rk A = \dim Im A$

Хотим доказать:

$$\dim Im A + \dim Im B - k \leq \dim Im AB$$

Рассмотрим $A|_{Im B}$. Оно переводит вектор из $Im B$ в F^m , причем:

$$Im A|_{Im B} = Im AB$$

Из суммы размерностей ядра и образа:

$$\dim Im A|_{Im B} + \dim \ker A|_{Im B} = \dim Im B$$

Из соображений здравого смысла:

$$\ker A|_{Im B} = Im B \cap \ker A \subseteq \ker A$$

$$\Downarrow$$

$$\dim \ker A|_{Im B} \leq \dim \ker A$$

Тогда:

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Im} A|_{\operatorname{Im} B} + \dim \ker A|_{\operatorname{Im} B} &= \dim \operatorname{Im} B \\ \dim \operatorname{Im} AB + \dim \ker A|_{\operatorname{Im} B} &= \dim \operatorname{Im} B \\ \dim \operatorname{Im} AB &= \dim \operatorname{Im} B - \dim \ker A|_{\operatorname{Im} B} \leq \dim \operatorname{Im} B - \dim \ker A = \\ &= \dim \operatorname{Im} B - (k - \dim \operatorname{Im} A) = \dim \operatorname{Im} A + \dim \operatorname{Im} B - k\end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

7.10. Суммы и пересечения

V — векторное пространство над F

$U, W \subseteq V$ — подпространства.

Очевидно, что $U \cap W$ — тоже подпространство.

К сожалению про $U \cup W$ такого мы сказать не можем, поэтому определим сумму: $U + W$ — наименьшее векторное подпространство V , содержащие U , и W . Иными словами:

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

Отсюда следует, что такие штуки тоже векторные подпространства:

$$\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$$

$$\sum_{\alpha \in A} U_\alpha = \{u_{\alpha_1} + \dots + u_{\alpha_k} \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in A\}$$

Лемма 7.36

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$$

Рассмотрим $e_1, \dots, e_k \in U \cap W$ — базис. Его можно дополнить до базиса U векторами f_1, \dots, f_s

Аналогично можно дополнить до базиса W векторами g_1, \dots, g_t

Если мы докажем, что $e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_t$ — базис $U + W$, то докажем и равенство. В силу определения $U + W$, такой набор векторов является порождающим. Значит нужно показать линейную независимость:

$$\begin{aligned}\sum \alpha_i e_i + \sum \beta_i f_i + \sum \gamma_i g_i &= 0 \\ \sum \alpha_i e_i + \sum \beta_i f_i &= -\sum \gamma_i g_i = z \in U \cap W\end{aligned}$$

Значит $z = \sum \delta_i e_i$

$$\begin{aligned}-\sum \gamma_i g_i &= \sum \delta_i e_i \\ \sum \delta_i e_i + \sum \gamma_i g_i &= 0\end{aligned}$$

Но это базис W , поэтому $\gamma_i = 0$, вернемся к изначальному равенству:

$$\sum \alpha_i e_i + \sum \beta_i f_i = 0$$

Но это базис U , поэтому $e_i = 0$ и $f_i = 0$. Что и требовалось доказать.

Определение 7.37

V — векторное пространство над F .

$U_1, \dots, U_k \subseteq V$ — подпространства.

U_1, \dots, U_k — ЛНЗ, если $\forall u_1 \in U_1, \dots, u_k \in U_k$ выполнено:

$$u_1 + \dots + u_k = 0 \Leftrightarrow u_1 = \dots = u_k = 0$$

Пример 7.38

Если в \mathbb{R}^3 взять базис e_1, e_2, e_3 , то $\langle e_1, e_2 \rangle$ и $\langle e_3 \rangle$ — ЛНЗ.

Теорема 7.39

V — векторное пространство над F

$U_1, \dots, U_k \subseteq V$

Тогда эквивалентны:

1. U_1, \dots, U_k — ЛНЗ
2. $\forall v \in U_1 + \dots + U_k \exists! v = u_1 + \dots + u_k$
3. $U_i = \langle e_i \rangle$ (базис) $\Rightarrow e_i \cap e_j = \emptyset$ и $\bigcup e_i$ — базис $U_1 + \dots + U_k$
4. $\sum_{i=1}^k \dim U_i = \dim(U_1 + \dots + U_k)$
5. $\forall i : U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j = 0$
6. $U_1 \times \dots \times U_k \rightarrow U_1 + \dots + U_k$
 $(u_1, \dots, u_k) \mapsto u_1 + \dots + u_k$ — изоморфизм
 Иными словами $U_1 \oplus \dots \oplus U_k = U_1 + \dots + U_k$

- (1) \Rightarrow (2)

Очевидно

- (2) \Rightarrow (3)

Если бы в каких-то базисах был общий элемент, то 0 можно было бы получить более чем одним способом — противоречие. Значит осталось доказать

то, что объединение базисов — базис суммы. Понятно, что он порождающий, значит нужно показать что он ЛНЗ. Рассмотрим $e_1\alpha_1 + \dots + e_k\alpha_k = 0$. Так как $e_i\alpha_i$ лежит в U_i , каждое такое слагаемое должно быть нулем из (2). Но также e_i — базис, поэтому $\alpha_i = 0$

- (3) \Rightarrow (4)

Очевидно

- (4) \Rightarrow (5)

- (5) \Rightarrow (1)

$$u_1 + \dots + u_k = 0$$

$$u_2 + \dots + u_k = -u_1 \in U_1$$

$$u_1 \in U_1 \cap (U_2 + \dots + U_k) = 0 \Rightarrow u_1 = 0$$

Аналогично для всех остальных получим $u_i = 0$

- (6)

Такое отображение является сюръективным и линейным по определению. Значит остается доказать инъективность. Но мы знаем, что это равносильно тому, что ядро равно нулю.

Но это просто переформулировка первого пункта.