Сочиненные задачи

Артемий Соколов

Задачи с олимпиад

ФШ – Финал олимпиады им.Шарыгина
ЗШ – Заочный тур олимпиады им.Шарыгина
ММО – Московская Математическая олимпиада
ТГ – Турнир Городов
* – любимые

1. **ФШ, 2013, 9.6 (совместно с Д.Швецовым, Ю.Зайцевой)** Через вершину B правильного треугольника ABC проведена прямая ℓ. Окружность ω_a с центром I_a касается стороны BC в точке A_1 и прямых ℓ и AC. Окружность ω_c с центром I_c касается стороны BA в точке C_1 и прямых ℓ и AC. Докажите, что ортоцентр треугольника A_1BC_1 лежит на прямой I_aI_c.
Ссылка на AoPS

2. * **ФШ, 2014, 10.4 (совместно с А.Гаркавым)** Дан фиксированный треугольник ABC. Пусть D — произвольная точка в плоскости треугольника, не совпадающая с его вершинами. Окружность с центром в D, проходящая через A, пересекает вторично прямые AB и AC в точках A_b и A_c соответственно. Аналогично определяются точки B_a, B_c, C_a и C_b. Точку D назовём *хорошей*, если точки A_b, A_c, B_a, B_c, C_a и C_b лежат на одной окружности. Сколько может оказаться точек, хороших для данного треугольника ABC?
Ссылка на AoPS

3. **ЗШ, 2015, №11** Пусть H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к отрезку BH пересекает стороны BA, BC в точках A_0, C_0 соответственно. Докажите, что периметр треугольника A_0OC_0 (O — центр описанной окружности треугольника ABC) равен AC.
Ссылка на AoPS

4. **ФШ, 2015, 10.6** Пусть H и O — ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC. Описанная окружность треугольника AOH, пересекает серединный перпендикуляр к BC в точке A_1. Аналогично определяются точки B_1 и C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.
Ссылка на AoPS

5. **ФШ, 2017, 8.2** Дан остроугольный треугольник ABC. Точки H и O — его ортоцентр и центр описанной окружности соответственно. Серединный перпендикуляр к BH пересекает стороны AB и BC в точках A_1 и C_1. Докажите, что OB — биссектриса угла A_1OC_1.

Ссылка на AoPS

6. * **ФШ, 2017, 10.3** Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть ω_A, ω_B, ω_C, ω_D — окружности, описанные вокруг треугольников BCD, ACD, ABD, ABC соответственно. Обозначим через X_A произведение степени точки A относительно ω_A на площадь треугольника BCD. Аналогично определим X_B, X_C, X_D. Докажите, что $X_A + X_B + X_C + X_D = 0$.
Ссылка на AoPS

7. **ТГ, 2019/2020, осенний тур, базовый вариант, 8-9, 2** Дана окружность ω с центром O и две её различные точки A и C. Для любой другой точки P на ω отметим середины X и Y отрезков AP и CP и построим точку H пересечения высот треугольника OXY. Докажите, что положение точки H не зависит от выбора точки P.
Ссылка на AoPS

8. **ТГ, 2019/2020, осенний тур, сложный вариант, 8-9, 4** Из центра O описанной окружности треугольника ABC опустили перпендикуляры OP и OQ на биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине B. Докажите, что прямая PQ делит пополам отрезок, соединяющий середины сторон CB и AB.
Ссылка на AoPS

9. * **ММО, 2020, 9.4 и 11.3** В остроугольном треугольнике ABC ($AB < BC$) провели высоту BH. Точка P симметрична точке H относительно прямой, соединяющей середины сторон AC и BC. Докажите, что прямая BP содержит центр описанной окружности треугольника ABC.

10. **ММО, 2020, 10.4** Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к BC пересекает AB и AC в точках X и Y. Прямая AO пересекает прямую BC в точке D, M — середина BC. Описанная окружность треугольника ADM пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке E, отличной от A. Докажите, что прямая OE касается описанной окружности треугольника AXY.

11. **ТГ, 2020/2021, весенний тур, сложный вариант, 10-11 , 2** Существует ли такое натуральное n, что для любых вещественных чисел x и y найдутся вещественные числа $a_1, \ldots, a_n$, удовлетворяющие равенствам

$$x = a_1 + \cdots + a_n \text{ и } y = \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}?$$

Ссылка на AoPS

12. **ММО, 2023, 9, 1 (совместно с А.Головановым)** Саша записывает числа 1, 2, 3, 4, 5 в каком-нибудь порядке, расставляет знаки арифметических операций «+», «-», «×» и скобки и смотрит на результат полученного выражения. Например, он может получить число 8 с помощью выражения $(4 - 3) \times (2 + 5) + 1$. Может ли он получить число 123? Формировать числа из нескольких других нельзя (например, из чисел 1 и 2 нельзя составить число 12).

Невошеднее или неподанное

1. Дан фиксированный треугольник ABC. Пусть D — произвольная точка в плоскости треугольника, не совпадающая с его вершинами. Окружность с центром в A, проходящая через D, пересекает вторично прямые AB и AC в точках A_b и A_c соответственно. Аналогично определяются точки B_a, B_c, C_a и C_b. Точку D назовём *хорошей*, если точки A_b, A_c, B_a, B_c, C_a и C_b лежат на одной -окружности. Сколько может оказаться точек, хороших для данного треугольника ABC?

2. Дан треугольник ABC с центром описанной окружности O, ортоцентром H и точкой пересечения медиан M. Внутри ABC отметили произвольную точку P. Серединный перпендикуляр к AP пересекает стороны AB и AC в точках A_B и A_C. Аналогично определяются точки B_A, B_C, C_A, C_B. Определим точку X_P как радикальный центр окружностей (AB_AC_A), (BC_BA_B), (CA_CB_C).
   a) Докажите, что если $P = H$, то $X_P = M$;
   b) Докажите, что если $P = O$, то $X_P = M$;
   c) Докажите, что если P и Q изогонально сопряжены, то $X_P = X_Q$; [1]

3. * На сторонах AB и BC треугольника ABC выбирается пара точек P и Q, а затем рассматривается окружность ω, касающаяся сторон угла B в этих точки. Если выбрать P и Q с условием $\angle IPB = \angle IQB = 90°$, то ω будет касаться стороны AC, а если с условием $\angle BIP = \angle BIQ = 90°$, – то окружности (ABC). Докажите, что если выбрать в качестве точек P и Q что-то “между” с условием $BP = BI = BQ$, то ω будет касаться окружности с центром в середине дуги ABC, проходящей через вершины A и C.

4. В треугольнике ABC точка P — пересечение касательных к описанной окружности в точках A и C. M — середина AC, а D — такая точка на AC, что $AD = DB$. F — пересечение PD и AB. Доказать, что $\angle FMC = \angle ABC$.

[1] Последний пункт нерешенный.