

# Сочиненные задачи

Артемий Соколов

---

## Задачи с олимпиад

ФШ – Финал олимпиады им.Шарыгина

ЗШ – Заочный тур олимпиады им.Шарыгина

ММО – Московская Математическая олимпиада

ТГ – Турнир Городов

\* – любимые

1. **ФШ, 2013, 9.6 (совместно с Д.Швцовым, Ю.Зайцевой)** Через вершину  $B$  правильного треугольника  $ABC$  проведена прямая  $\ell$ . Окружность  $\omega_a$  с центром  $I_a$  касается стороны  $BC$  в точке  $A_1$  и прямых  $\ell$  и  $AC$ . Окружность  $\omega_c$  с центром  $I_c$  касается стороны  $BA$  в точке  $C_1$  и прямых  $\ell$  и  $AC$ . Докажите, что ортоцентр треугольника  $A_1BC_1$  лежит на прямой  $I_aI_c$ .

[Ссылка на AoPS](#)

2. \* **ФШ, 2014, 10.4 (совместно с А.Гаркавым)** Дан фиксированный треугольник  $ABC$ . Пусть  $D$  — произвольная точка в плоскости треугольника, не совпадающая с его вершинами. Окружность с центром в  $D$ , проходящая через  $A$ , пересекает вторично прямые  $AB$  и  $AC$  в точках  $A_b$  и  $A_c$  соответственно. Аналогично определяются точки  $B_a$ ,  $B_c$ ,  $C_a$  и  $C_b$ . Точку  $D$  назовём *хорошей*, если точки  $A_b$ ,  $A_c$ ,  $B_a$ ,  $B_c$ ,  $C_a$  и  $C_b$  лежат на одной окружности. Сколько может оказаться точек, хороших для данного треугольника  $ABC$ ?

[Ссылка на AoPS](#)

3. **ЗШ, 2015, №11** Пусть  $H$  — ортоцентр остроугольного треугольника  $ABC$ . Серединный перпендикуляр к отрезку  $BH$  пересекает стороны  $BA$ ,  $BC$  в точках  $A_0$ ,  $C_0$  соответственно. Докажите, что периметр треугольника  $A_0OC_0$  ( $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ ) равен  $AC$ .

[Ссылка на AoPS](#)

4. **ФШ, 2015, 10.6** Пусть  $H$  и  $O$  — ортоцентр и центр описанной окружности треугольника  $ABC$ . Описанная окружность треугольника  $AOH$ , пересекает серединный перпендикуляр к  $BC$  в точке  $A_1$ . Аналогично определяются точки  $B_1$  и  $C_1$ . Докажите, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке.

[Ссылка на AoPS](#)

5. **ФШ, 2017, 8.2** Дан остроугольный треугольник  $ABC$ . Точки  $H$  и  $O$  — его ортоцентр и центр описанной окружности соответственно. Серединный перпендикуляр к  $BH$  пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $A_1$  и  $C_1$ . Докажите, что  $OB$  — биссектриса угла  $A_1OC_1$ .

[Ссылка на AoPS](#)

6. \* **ФШ, 2017, 10.3** Дан выпуклый четырехугольник  $ABCD$ . Пусть  $\omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega_D$  — окружности, описанные вокруг треугольников  $BCD, ACD, ABD, ABC$  соответственно. Обозначим через  $X_A$  произведение степени точки  $A$  относительно  $\omega_A$  на площадь треугольника  $BCD$ . Аналогично определим  $X_B, X_C, X_D$ . Докажите, что  $X_A + X_B + X_C + X_D = 0$ .

[Ссылка на AoPS](#)

7. **ТГ, 2019/2020, осенний тур, базовый вариант, 8-9, 2** Дана окружность  $\omega$  с центром  $O$  и две её различные точки  $A$  и  $C$ . Для любой другой точки  $P$  на  $\omega$  отметим середины  $X$  и  $Y$  отрезков  $AP$  и  $CP$  и построим точку  $H$  пересечения высот треугольника  $OXY$ . Докажите, что положение точки  $H$  не зависит от выбора точки  $P$ .

[Ссылка на AoPS](#)

8. **ТГ, 2019/2020, осенний тур, сложный вариант, 8-9, 4** Из центра  $O$  описанной окружности треугольника  $ABC$  опустили перпендикуляры  $OP$  и  $OQ$  на биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине  $B$ . Докажите, что прямая  $PQ$  делит пополам отрезок, соединяющий середины сторон  $CB$  и  $AB$ .

[Ссылка на AoPS](#)

9. \* **ММО, 2020, 9.4 и 11.3** В остроугольном треугольнике  $ABC$  ( $AB < BC$ ) провели высоту  $BH$ . Точка  $P$  симметрична точке  $H$  относительно прямой, соединяющей середины сторон  $AC$  и  $BC$ . Докажите, что прямая  $BP$  содержит центр описанной окружности треугольника  $ABC$ .

10. **ММО, 2020, 10.4** Точка  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ . Серединный перпендикуляр к  $BC$  пересекает  $AB$  и  $AC$  в точках  $X$  и  $Y$ . Прямая  $AO$  пересекает прямую  $BC$  в точке  $D$ ,  $M$  — середина  $BC$ . Описанная окружность треугольника  $ADM$  пересекает описанную окружность треугольника  $ABC$  в точке  $E$ , отличной от  $A$ . Докажите, что прямая  $OE$  касается описанной окружности треугольника  $AXY$ .

11. **ТГ, 2020/2021, весенний тур, сложный вариант, 10-11, 2** Существует ли такое натуральное  $n$ , что для любых вещественных чисел  $x$  и  $y$  найдутся вещественные числа  $a_1, \dots, a_n$ , удовлетворяющие равенствам

$$x = a_1 + \dots + a_n \text{ и } y = \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}?$$

[Ссылка на AoPS](#)

12. **ММО, 2023, 9, 1 (совместно с А.Головановым)** Саша записывает числа 1, 2, 3, 4, 5 в каком-нибудь порядке, расставляет знаки арифметических операций «+», «-», « $\times$ » и скобки и смотрит на результат полученного выражения. Например, он может получить число 8 с помощью выражения  $(4 - 3) \times (2 + 5) + 1$ . Может ли он получить число 123? Формировать числа из нескольких других нельзя (например, из чисел 1 и 2 нельзя составить число 12).

## Невошедшее или неподанное

1. Дан фиксированный треугольник  $ABC$ . Пусть  $D$  — произвольная точка в плоскости треугольника, не совпадающая с его вершинами. Окружность с центром в  $A$ , проходящая через  $D$ , пересекает вторично прямые  $AB$  и  $AC$  в точках  $A_b$  и  $A_c$  соответственно. Аналогично определяются точки  $B_a, B_c, C_a$  и  $C_b$ . Точку  $D$  назовём *хорошей*, если точки  $A_b, A_c, B_a, B_c, C_a$  и  $C_b$  лежат на одной -окружности. Сколько может оказаться точек, хороших для данного треугольника  $ABC$ ?
2. Дан треугольник  $ABC$  с центром описанной окружности  $O$ , ортоцентром  $H$  и точкой пересечения медиан  $M$ . Внутри  $ABC$  отметили произвольную точку  $P$ . Серединный перпендикуляр к  $AP$  пересекает стороны  $AB$  и  $AC$  в точках  $A_B$  и  $A_C$ . Аналогично определяются точки  $B_A, B_C, C_A, C_B$ . Определим точку  $X_P$  как радикальный центр окружностей  $(AB_A C_A), (BC_B A_B), (CA_C B_C)$ .
  - а) Докажите, что если  $P = H$ , то  $X_P = M$ ;
  - б) Докажите, что если  $P = O$ , то  $X_P = M$ ;
  - в) Докажите, что если  $P$  и  $Q$  изогонально сопряжены, то  $X_P = X_Q$ ; <sup>1</sup>
3. \* На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  выбирается пара точек  $P$  и  $Q$ , а затем рассматривается окружность  $\omega$ , касающаяся сторон угла  $B$  в этих точки. Если выбрать  $P$  и  $Q$  с условием  $\angle IPB = \angle IQB = 90^\circ$ , то  $\omega$  будет касаться стороны  $AC$ , а если с условием  $\angle BIP = \angle BIQ = 90^\circ$ , — то окружности  $(ABC)$ . Докажите, что если выбрать в качестве точек  $P$  и  $Q$  что-то “между” с условием  $BP = BI = BQ$ , то  $\omega$  будет касаться окружности с центром в середине дуги  $ABC$ , проходящей через вершины  $A$  и  $C$ .
4. В треугольнике  $ABC$  точка  $P$  — пересечение касательных к описанной окружности в точках  $A$  и  $C$ .  $M$  — середина  $AC$ , а  $D$  — такая точка на  $AC$ , что  $AD = DB$ .  $F$  — пересечение  $PD$  и  $AB$ . Доказать, что  $\angle FMC = \angle ABC$ .

---

<sup>1</sup>Последний пункт нерешенный.