Московский физико-технический институт

(государственный университет)

Лабораторная работа

«Введение в вейвлет-анализ сигналов»

Романюк Ю.А., Аверин А.В.

2016 г.

г. Долгопрудный

1. Цель работы

Целью лабораторной работы является изучение непрерывного и дискретного вейвлет-преобразований сигналов, сравнение результатов работы вейвлет-преобразования и дискретного преобразования Фурье (ДПФ), овладение навыками работы в программных средах MATLAB /GNU Octave.

В лабораторной работе необходимо получить непрерывное и дискретное вейвлет-преобразование для восстановления полезного сигнала из аддитивной смеси полигармонического сигнала и белого шума с использованием программных средств MATLAB/ GNU Octave. Предлагается осуществить фильтрацию зашумленного сигнала тремя способами: с помощью оконного преобразования Фурье, ДПФ и непрерывного/дискретного вейвлет-преобразования, а также сравнить между собой результаты восстановления сигнала.

Для выполнения работы необходимо ознакомиться со средой разработки MATLAB/ GNU Octave [5].

2. Теоретические сведения

2.1. Общие сведения о преобразовании Фурье и вейвлетном преобразовании сигналов

Суть спектрального анализа сигнала $S(t)$ заключается в нахождении коэффициентов C_n в соответствии с формулой

$$C_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_{t_1}^{t_2} S(t)\varphi_n(t)dt \ , \qquad (1)$$

где $\|\varphi_n\|^2 = \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi_n^2(t)dt -$ квадрат нормы, или энергия базисной функции $\varphi_n(t)$. Для базисной функции должно выполнятся следующее условие ортогональности

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi_k(t)\varphi_n(t)dt = \begin{cases} \|\varphi_n(t)\|^2, k = n, \\ 0, k \neq n. \end{cases}$$

Коэффициенты выбранные согласно (1), как известно, носят название *коэффициентов Фурье* по системе $\{\varphi_n(t)\}$. Тогда сигнал $S(t)$ может быть представлен в следующем виде

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n(t) . \qquad (2)$$

При этом ряд (2) обеспечивает наилучший синтез сигнала, обеспечивая минимум среднеквадратической ошибки ε при заданной системе базисных функций $\{\varphi_n(t)\}$ и числе слагаемых N [2]

$$\varepsilon = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[S(t) - \sum_{n=0}^{N} C_n \varphi_n(t) \right]^2 dt .$$

Изложенное классическое преобразование Фурье (ПФ) хороший инструмент для анализа стационарных сигналов. Вместе с тем, в ПФ отсутствует временное разрешение, а также невозможность корректного анализа локальных особенностей сигнала. Эффект Гиббса также накладывает ограничение на точное восстановление сигнала, содержащего такие локальные особенности. Часть указанных трудностей преодолевается при использовании *оконного* ПФ

$$S(\omega, b) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} S(t) w(t-b) e^{-j\omega t} dt ,$$

где $w(t-b)$ − оконная функция, которая перемещается вдоль оси времени t для вычисления ПФ в разных позициях b. Каждое окно выделяет участок во времени, в котором происходит частотный анализ. Таким образом, разрешение фиксировано для времени и частоты для всех точек плоскости преобразования, которое не может быть адаптировано к локальным свойствам сигнала [2].

Анализ полигармонических сигналов с помощью оконного преобразования Фурье предполагает нахождения динамического диапазона сигнала как отношения максимальной амплитуды полезного сигнала к минимальной. Это позволяет сузить выбор оконной функции и обеспечивает выделение слабого сигнала (при небольшой разнице частот компонент полигармонического сигнала) на фоне «маскирования» боковыми лепестками более высоких по уровню компонент сигнала.

Одним из вариантов оконного преобразования Фурье является преобразование Габора (ПГ), в котором роль оконной функции играет гауссиан. Преобразование Габора является одним из лучших оконных преобразований Фурье, обеспечивающее наилучшую временную локализацию сигнала. Временное окно в ПГ есть функция

$$g(t) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\pi}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}},$$

где α - фиксированный параметр.

ПГ сигнала $S(t)$ определяется формулой

$$S_G(\omega, b) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) g_\alpha(t-b) e^{-j\omega t} dt.$$

Основная проблема, возникающая при использовании ПГ – выбор ширины окна во временной области. Слишком широкое окно может обеспечить разумное представление низкочастотных компонентов сигнала, но его ширина будет избыточной для гармоник с высокой частотой, поскольку все интересные нерегулярности в высокочастотной области спектра сгладятся. Наоборот, достаточно узкое окно даст возможность изучит высокочастотные компоненты, но оно не будет адекватным для низкочастотных гармоник.

Вейвлет-преобразование за счет изменения разрешения во времени и частоте позволяет решить проблемы, которые присущи описанным выше методам.

Вейвлет-преобразование одномерного сигнала – представление сигнала в виде обобщенного ряда или интеграла Фурье по системе базисных функций [1,2]

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right), \tag{3}$$

сконструированных из материнского (исходного) вейвлета $\psi(t)$.

Последний обладает определенными свойствами за счет операции сдвига во времени (b) и изменения временного масштаба (a). Множитель $\frac{1}{\sqrt{a}}$ обеспечивает независимость нормы этих функция от масштабирующего числа *a,* т.е. иметь постоянную (единичную) норму в пространстве $L^2(\mathbb{R})$:

$$\left\| \psi_{a,b} \right\|_{L^2} = 1, \tag{4}$$

где норма пространства $L^2(\mathbb{R})$ определяется как

$$\| f \|_{L^2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) f^*(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

Отметим, что выполнение условия (2), в силу теоремы Парсеваля, приводит к

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\omega)\psi^{*}(\omega)\,d\omega=1,$$

где $\psi(\omega)$ − фурье-образ вейвлетной функции.

Интегральное вейвлет-преобразование функции можно найти с помощью следующего выражения [4]

$$W(a,b)=\frac{1}{|a|^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\psi^{*}\left(\frac{t-b}{a}\right)dt, \qquad (6)$$

где $a,b\in\mathbb{R}, a\neq 0.$

Обратное интегральное вейвлет-преобразование запишем в следующем виде

$$f(t)=C_{\psi}^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W(a,b)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\frac{1}{a^{1/2}}\frac{dadb}{a^{2}}, \qquad (7)$$

где C_{ψ} − нормирующий коэффициент, который определяется следующим образом

$$C_{\psi}=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{\psi}\right|^{2}|\omega|^{-1}\,d\omega<\infty. \qquad (8)$$

2.2. Свойства вейвлет-преобразования

1. Частотно-временная локализация (количественная мера локализации) [4]:

- центр

$$\langle t\rangle=\frac{1}{\|\psi\|^{2}}\int_{-\infty}^{\infty}t|\psi(t)|^{2}\,dt, \qquad (7)$$

- радиус

$$\Delta_t^2 = \frac{1}{\|\psi\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[t - \langle t \rangle \right]^2 |\psi(t)|^2 \, dt .$$

2. Нулевые моменты

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 . \tag{9}$$

Выражение (9) означает, что график исходной функции должен осциллировать вокруг нуля на оси времени и иметь нулевую площадь.

Часто для приложений бывает необходимо, чтобы не только нулевой, но и все первые *n* моментов были равны нулю

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n \psi(t) dt = 0 .$$

Это необходимо для анализа мелкомасштабных флуктуаций и особенностей высокого порядка, игнорируя при этом наиболее регулярные (полиномиальные) составляющие сигнала.

3. Аналог равенства Парсеваля для вейвлет-преобразования

$$\int_{-\infty}^{\infty} | f(t)|^2 \, dt = C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |W(a,b)|^2 \frac{dadb}{a^2} . \tag{10}$$

4. Линейность

$$W\left[\alpha s_1(t) + \beta s_2(t)\right] = \alpha W\left[s_1(t)\right] + \beta W\left[s_2(t)\right]. \tag{11}$$

5. Инвариантность относительно сдвига

$$W\left[s(t-t_0)\right] = C\left[a, b-t_0\right]. \tag{12}$$

6. Инвариантность относительно масштабирования

$$W\left[s\left(\frac{t}{a_0}\right)\right]=\frac{1}{a_0}C\left[\frac{a}{a_0},\frac{b}{a_0}\right]. \qquad (1)$$

7. Дифференцирование

$$\frac{d^n}{dt^n}W\left[s(t)\right]=W\left[\frac{d^n s(t)}{dt^n}\right]. \qquad (12)$$

8. Интегрирование

$$W\left[\frac{d^n s(t)}{dt^n}\right]=(-1)^n\int_{-\infty}^{\infty}s(t)\frac{d^n\psi(t)}{dt^n}dt\,. \qquad (13)$$

9. Автомодальность. Характерным признаком вейвлет-преобразования является его самоподобие. Все вейвлеты конкретного семейства $\psi_{a,b}(t)$ имеют то же число осцилляций, что и материнский вейвлет $\psi(t)$, поскольку получены из него посредством масштабных преобразований (a) и (b).

10. Базисная вейвлет функция называется ортогональной и составляет ортонормированный базис, если выполняется условие

$$\left\|\psi_{jk}\psi_{lm}\right\|_{L^2}^2=\delta_{jl}\delta_{km}. \qquad (14)$$

2.3. Фильтрующие свойства вейвлетного преобразования. Вейвлетное преобразование шума.

Интегральное вейвлет-преобразование исходного сигнала $S(t)$ можно рассматривать как фильтрацию. Фильтр для сигнала $S(t)$ можно записать в следующем виде

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) s(t-\tau) d\tau, \qquad (15)$$

где $h(t)$ - весовая функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = 1.$$

Сравнивая преобразования (15) и (6), можно получить передаточную функцию фильтра в виде

$$H(\omega) = \sqrt{a}\psi^{*}(a\omega).$$

Таким образом, для каждого значения масштабного коэффициента $a > 0$ величины $W(a,b)$, определенные с помощью вейвлет-преобразования (6), представляют собой результат фильтрации исходной функции в диапазоне частот, центр которого определяется значением масштабного коэффициента, а размер – свойствами принятого анализирующего вейвлета.

Спектральный анализ сигнала, зашумленный белым гауссовским шумом (БГШ) - важный этап предобработки, позволяющий оценить параметры БГШ и определить уровень порога для выделения полезного сигнала из аддитивной смеси. В вейвлетном анализе шума необходимо найти нормированную скалограмму [4] анализируемого сигнала, а после закон распределения скалограммы, позволяющий выработать критерий для фильтрации.

2.4. Примеры материнских вейвлетов

Рассмотрим примеры основных материнских вейвлетов.

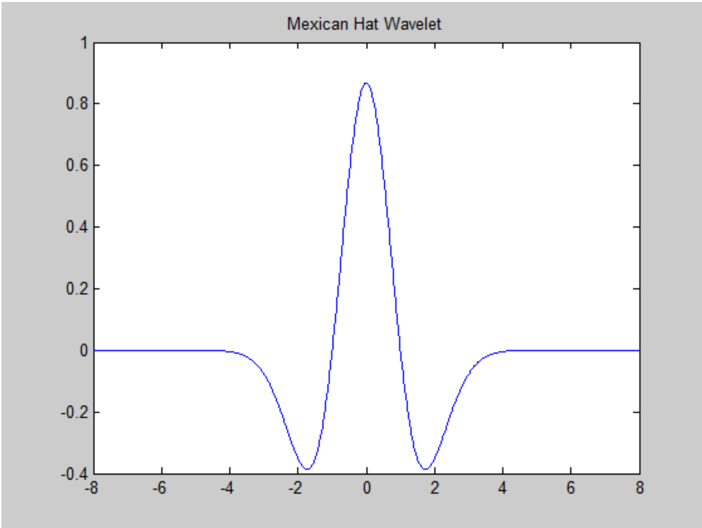

Рисунок 1 – Вейвлет «мексиканская шляпа»

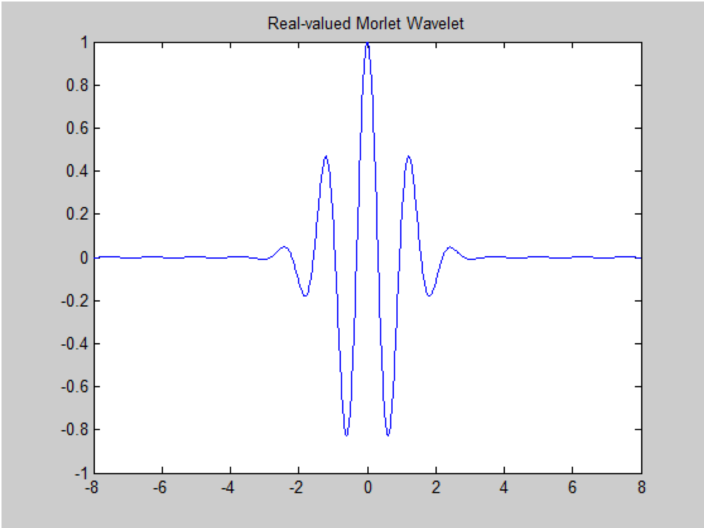

Рисунок 2 – Вейвлет Морле

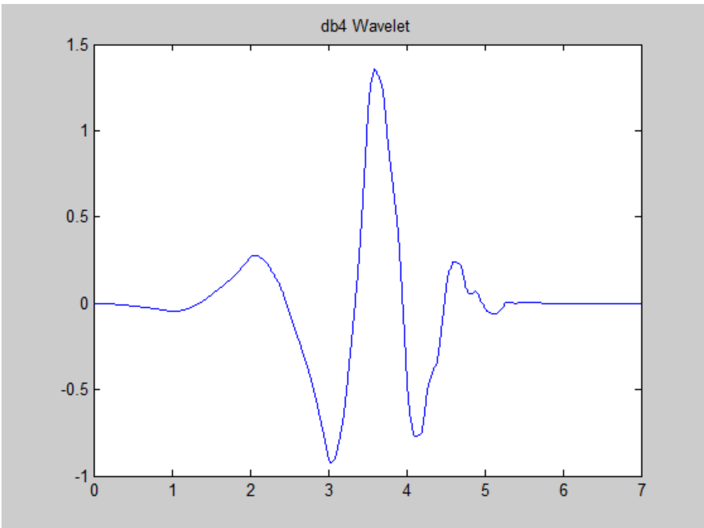

Рисунок 3 – Вейвлет Добеши

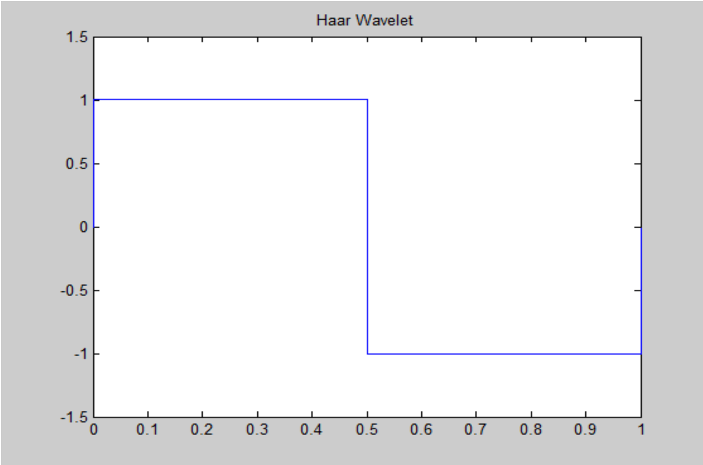

Рисунок 4 – Вейвлет Хаара

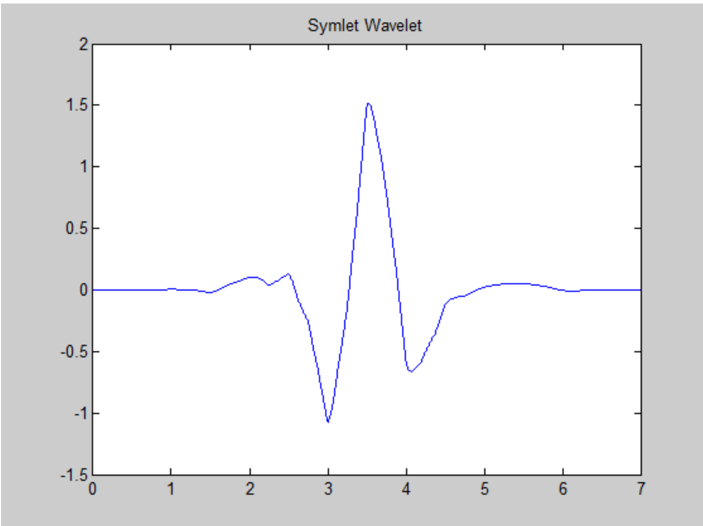

Рисунок 5 – Вейвлет «симлет»

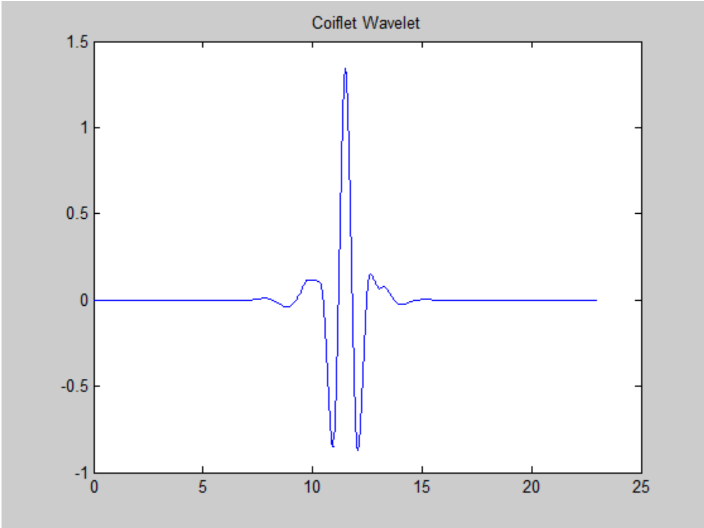

Рисунок 6 – Вейвлет «коифлет»

Аналитические выражения, которые описывают представленные выше вейвлеты можно найти в [1].

2.4. Диадное вейвлет-преобразование

Большие вычислительные затраты в большинстве случаев являются неприемлемыми, поэтому требуется дискретизация параметров (a) и (b) при сохранении возможности восстановления сигнала из его преобразования. Дискретизация осуществляется через степени двойки:

$$a = 2^m, b = k \cdot 2^m, \psi_{m,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \psi(2^{-m} t - k), \quad (16)$$

где m и k – целые числа. Параметр m называется *параметром масштаба*.

Рассмотренная дискретизация наиболее распространена. Сетка дискретизации называется *диадной* и соответственное преобразование – *диадное* (dyadic) вейвлет-преобразованием [2].

Прямое и обратное диадное вейвлет-преобразование непрерывных сигналов можно записать в виде следующих выражений

$$\begin{aligned} &\mathrm{c}_{m,k} = \left(S(t), \psi_{mk}(t)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)\psi_{mk}(t)dt, \\ &S(t) = \sum_{mk} \mathrm{c}_{m,k}\psi_{mk}(t) \end{aligned} \quad . \qquad (17)$$

Применение для расчета вейвлет-преобразования в соответствии с соотношением (17) накладывает ограничения на длину N анализируемого сигнала. Величина N для удовлетворения условиям процедуры диадного вейвлет-преобразования должна обязательно являться степенью двойки: $N = 2^p$, где p – натуральное число. На практике это не всегда выполняется. Поэтому, сигнал дополняется либо нулями, либо постоянными величинами, например, средними значениями сигнала $\bar{s} = \sum_n s_n / N$. В этих случаях при вейвлетном анализе происходит расширение области влияния краевых эффектов на вейвлетный спектр на плоскости (m,k).

3. Вопросы для допуска

1. Условие применимости преобразования Фурье.
2. Дискретное и оконное преобразование Фурье. Оконное преобразование Габора.
3. Фильтрующие свойства ДПФ.

4. Непрерывное вейвлет-преобразования. Вейвлет-функции. Область применимости вейвлет-преобразования.
5. Дискретное вейвлет-преобразование.
6. Свойства вейвлетов. Примеры вейвлетов.
7. Вейвлет-преобразование как фильтрация.
8. Спектральные характеристики вейвлетов.
9. Вейвлет-преобразование шума.

4. Задание на лабораторную работу

1. Лабораторная работа выполняется на основе script-файла, который хранится в папке для лабораторных работ.
2. Перед выполнением необходимо определить путь к папке по команде контекстного меню **Add To Path|Selected Folders**. Код документирован. Основная справка по функциям, реализующим ПФ, оконное ПФ и ВП вызывается нажатием клавиши F1.
3. Исходные данные для пунктов задания находятся в таблице 1.
4. Задание на лабораторную работу.

4.1. Получить у преподавателя вариант с данными согласно таблице 1.

4.2. Определить динамический диапазон сигнала, выбрать оконную функцию.

4.3. Вычислить оконное преобразование Фурье и ДПФ заданного сигнала с параметрами, указанными в п.4.1.

- **Пояснить**: вид амплитудного и фазового спектров полигармонического сигнала.

4.4. Выполнить обратное ДПФ. Сравнить полученный сигнал с исходным.

4.5. Выполнить непрерывное вейвлет-преобразование, используя для этого вейвлет-функцию согласно своему варианту в таблице 1. Подобрать количество уровней разложения для минимизации средне-квадратической ошибки между исходным и восстановленным сигналом.

- **Пояснить**: структуру спектрограммы непрерывного и дискретного вейвлет-преобразований.

Таблица 1

Варианты заданий

Вариант	A_0	A_1	A_2	f_0, Гц	f_1, Гц	f_2, Гц	Wavelet
1	1	0.05	0.001	25	35	1300	mexh
2	1.1	0.02	0.5	1450	4500	4600	haar
3	1.3	0.01	0.002	345	500	510	morlet
4	0.9	0.2	0.0001	10	30	33	haar
5	0.8	0.3	0.003	15000	15400	20000	mexh
6	1	0.003	0.05	400	410	670	haar
7	1.4	0.01	0.001	2700	3000	3050	morlet
8	1	0.1	0.02	100	109	160	morlet
9	1.5	0.05	0.01	1900	2000	2015	haar
10	1	0.8	0.07	150	4500	5600	mexh

5. Контрольные вопросы

1. Почему непрерывное ВП позволяет получить более полную информацию о частотно-временном составе сигнала в сравнении с оконным преобразованием Фурье?
2. Что такое ортонормальный базис вейвлетов?
3. Поясните выбор начальных условий для дискретного вейвлет-преобразования.

4. Объясните физический смысл вейвлет коэффициентов.
5. Что такое масштабирующая (скейлинг) функция?
6. Поясните применение вейвлет-анализа для сглаживания пульсаций в сигналах, фильтрации и очистки от шума, нормализации, выделения локальных максимумов, уменьшения объема данных (сжатия).

6. Задания к сдаче лабораторной работы

1. Синтезируйте сигнал, в котором встречаются изолированные особенности типа ступеньки, импульса, скачка и т.п (δ - функция, скачок, излом, $\left|t^5\right|$, $t^{\frac{1}{3}}$, $t^{\frac{4}{3}}$). Проведите вейвлет-анализ сигнала и устранить эти особенности.
2. Реализуйте чтение звукового файла. Определите полосу частот в которой содержится максимум энергии. Учтите частоту дискретизации вашего звукового файла. Аддитивно добавьте белый гауссовский шум с заданной дисперсией и математическим ожиданием. Произведите фильтрацию смеси полезного сигнала и шума с помощью ДПФ, ОП Фурье и вейвлетного анализа. Сравните результаты работы каждого способа.
3. Рассмотрите ЛЧМ-сигнал. Найдите ДПФ, вейвлет-спектр, скейлограмму и скалограмму сигнала [4].
4. Загрузите данные, согласно вашему варианту, в Wavelet-Toolbox. Разберитесь с функционалом данного тулбокса. Проанализируйте полученные результаты и сравните их с результатами работы скрипта.
5. Загрузите изображение в Matlab и найдите двухмерные вейвлет-преобразование и двумерное ДПФ. Аддитивно добавьте белый гаус-

совский шум с математическим ожиданием равным нулю и заданной дисперсией. Проведите фильтрацию и сравните результаты работы двумерного ВП и двумерного ДПФ.

Примечание. Для входного изображения $f(x,y)$ и восстановленного изображения $f(x,y)$, имеющих размер $M \times K$, вводятся следующие количественные оценки искажений:

- Среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma\left(f, f\right) = \left[\frac{1}{M \cdot K}\sum_{x=1}^{M}\sum_{y=1}^{K}\left(f(x,y) - f(x,y)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

где (x,y) - координаты пикселей изображения.

- Средняя пиксельная ошибка:

$$\sigma_1\left(f, f\right) = \frac{1}{M \cdot K}\sum_{x=1}^{M}\sum_{y=1}^{K}\left|f(x,y) - f(x,y)\right|.$$

- Пиковое отношение сигнал-шум (PSNR – peak signal-to-noise ratio):

$$PSNR = \frac{M_{gl}}{\sigma\left(f, f\right)},$$

где $\sigma\left(f, f\right)$ - среднеквадратическое отклонение, M_{gl} - максимальное количество градаций серого в применяемой шкале (наиболее распространенное значение: $M_{gl} = 255$). При измерении в децибелах применяется также величина $20\lg\left(PSNR\right)$.

7. Основы работы с matlab/octave

Рабочая директория

В среде Matlab/Octave можно использовать не только встроенные команды, но и расширять функционал с помощью дополнительных файлов-скриптов (*.m). Без указания полного пути в среде доступны файлы из так называемой рабочей директории. Сменить ее можно с помощью команды **cd**, а также используя соответствующие кнопки в панели инструментов.

Рабочая область

В ходе работы все вычисленные ранее переменные сохраняются в так называемой рабочей области. Посмотреть содержимое рабочей области можно как в отдельно окне, так и с помощью команды who. Очистить рабочую область можно командой **clear** (**clear all**). Очистить командное окно можно функцией **clc**.

Язык сценариев (m-файлы). Матрицы

Имена переменных могут состоять из произвольных букв, цифр и знаков. Не рекомендуется использовать в качестве имен переменных имена стандартных функций Matlab/Octave, а также имена стандартных переменных:

· i или j – мнимая единица
· inf – неопределенность 1/0
· NaN – неопределенность 0/0
· ans – результат последней операции.
· pi – число Пи
· rand – псевдослучайное число из интервала [0;1]
· eps – текущая относительная точность вычислений.

Матрицы – основной объект, с которым работает Matlab/Octave. Вектор – матрица размерности 1xN или Nx1. Скаляр – матрица 1x1. В записи размерности матрицы «MxN» M обозначает число строк, N – число столбцов.

Скаляры создаются с помощью оператора присваивания:

Scalar = 1.234.

Для вывода матриц большой размерности используется символы «[]». Матрицы задаются построчно, элементы одной строки разделяются пробелом, а строки символом – «;».

Например

Matrix = [1 2 3 4; 3 4 5 6; 1 22 3];

Vec = [1 2 3];

Vector = [1;2;3].

Для обращения к элементам матрицы используется оператор «()».

Для создания вектор-строки из последовательности элементов применяется специальный оператор перечисления «:».

Для матриц доступны следующие полезные функции:

· **«’»** – операция транспонирования.

· **size(A)** – определяет размер матрицы.

· **length(A)** – максимальный из размеров матрицы А. Удобно определять число элементов в векторе.

Дополнительные операции с матрицами можно найти в [5].

Если в процессе вычислений требуется поэлементно умножить, разделить или возвести в степень элементы вектора или матрицы, то для этого используются операторы:

.* - поэлементное умножение;

./ и **.** - поэлементные деления;

.^ - поэлементное возведение в степень.

Работа с графиками в MATLAB

MATLAB предоставляет богатый инструментарий по визуализации данных. Используя внутренний язык, можно выводить двумерные и трехмерные графики в декартовых и полярных координатах, выполнять отображение изображений с разной глубиной цвета и разными цветовыми картами, создавать простую анимацию результатов моделирования в процессе вычислений и многое другое.

Основная функция **plot()**, которой можно передавать множество параметров. Подробнее о работе данной функции можно прочитать в справке MathWorks или выделить функцию в скрипте и нажать клавишу F1.

Еще одна важная функция **figure()** - создает новое графическое окно и делает его активным.

Порядок определения и вызова функций

Синтаксис для определения собственных функций в MATLAB имеет следующий вид:

function [RetVal1, RetVal2,…] = FunctionName(arg1, arg2,…)
<тело функции>,
где RetVal1, RetVal2,... – набор возвращаемых значений функцией (результаты работы); arg1, arg2,... – набор входных аргументов; тело функции – набор операторов (программа), которые выполняются при вызове функции.

Континуальный анализ с помощью вейлет-функций

За континуальный анализ отвечает функция **cwt()**. Функция выполняет континуальное преобразование сигнала s и возвращает массив с спектральных коэффициентов преобразования.

Входными параметрами функции являются следующие:

‘wavelet’ – идентификатор имени материнской вейвлет-функции (ядра преобразования);

scales – вектор значений масштабирующей переменной *a* базисного вейвлета.

Функция **cwt** обладает рядом дополнительных входных параметров, расширяющих возможности визуализации результатов анализа сигнала. Основные сведения о вейвлетном анализе в MATLAB можно получить в справке MathWorks или нажав клавишу F1.

Литература

1. Романюк Ю.А. Основы цифровой обработки сигналов. В 3-х ч. Ч.1. свойства и преобразования дискретных сигналов: Учебное пособие. – М.: МФТИ, 2007. – 332 с.
2. А.Н. Яковлев. Введение в вейвлет-преобразование: Учебное пособие. - Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003. – 104 с.
3. Романюк Ю.А. Дискретное преобразование Фурье в цифровом спектральном анализе. Учебное пособие. – М.: МФТИ, 2007. – 120 с.
4. Витязев В.В. Вейвлет-анализ временных рядов: Учебное пособие. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. Ун-та, 2001. – 58 с.
5. Смоленцов Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 304 с., ил.