Задачи: $\boxed{\S 9}$

$\boxed{№1}$] B_1, B_2 — две σ-алгебры подмножеств пр-ва Ω. Будут ли σ-алгебрами системы подмножеств:

1) $B_1 \cap B_2 \equiv \{A: A \in B_1$ и $A \in B_2\}$,

2) $B_1 \cup B_2 \equiv \{A: A \in B_1$ или $A \in B_2\}$?

Решение:

1) B_1 - σ-алгебра, B_2 - σ-алгебра,

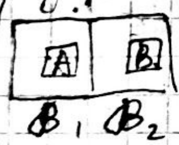
$A: A \in B_1$ и $A \in B_2 \Rightarrow \boxed{B_1 \cap B_2 \text{ - σ-алгебра}}$

2) От противного:

] $B_1 \not\subset B_2$, $B_2 \not\subset B_1$ и $B_1 \cup B_2$ - σ-алг.

$\Rightarrow \exists A \in B_1$ и $B \in B_2$: $A \notin B_2$ и $B \notin B_1$

и $B \setminus A$, $A \setminus B$, $A \triangle B$, лежащие в $B_1 \cup B_2$ содержатся по двое в B_1 или B_2.



$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ - симметр. разность.

] 2 лежат в B_1. Тогда 3-е тоже в B_1

$\Rightarrow B_1 \supset A, B \setminus A, A \setminus B \Rightarrow$

$\Rightarrow A \cap B$ и $B \subset B_1$ - противоречие

$\Rightarrow \boxed{B_1 \cup B_2 \text{ не является алгеброй}}$

№2 $\rceil\ \mathcal{D} = \{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots\}$ - некоторое счётное разбиение Ω и $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{D})$. Какова мощность σ-алгебры $\mathcal{B}$?

Решение: Рассмотрим посл-ти $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, состоящие из нулей и единиц.

$\mathcal{D}^\alpha = \mathcal{D}_1^{\alpha_1} \cup \mathcal{D}_2^{\alpha_2} \cup \dots$, где $\mathcal{D}_i^{\alpha_i} = \emptyset$, если $\alpha_i = 0$ и $\mathcal{D}_i^{\alpha_i} = \mathcal{D}_i$, если $\alpha_i = 1$.

Тогда все $\mathcal{D}^\alpha$ составляют $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{D})$, т.е. $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{D})$ содержит континуум различных элементов.

№3 Доказать, что

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1}) \quad (*)$$

Решение:

1) Докажем: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1})$

$G_n \times G_1 \subseteq \mathbb{R}$ открыто в $\mathbb{R}^{n+1}$, когда G_n и G_1 – открытые в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ 1) верно

2) Докажем: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1})$

Пусть G_{n+1} – открыто в $\mathbb{R}^{n+1}$, тогда

$$G_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_{1k}, b_{1k}) \times \ldots \times (a_{(n+1)k}, b_{(n+1)k}),$$

где $a_{ik} < b_{ik}$ $\forall i, k$,

т.к. $\forall$ т. из G_{n+1} покрыта параллелепипедом вида: $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_{n+1}, b_{n+1}) \subset G_{n+1}$:

$a_i, b_i \in \mathbb{Q}$, $1 \le i \le n+1$,

таких параллелепипедов счётное кол-во

$\Rightarrow$ 2) верно

(1), (2) $\Rightarrow$ $(*)$

$\boxed{N6}$] $\mathcal{D}$ – пространство всех ф-ий $x=(x_t)$, $t \in [0,1]$, явл. непрерывными справа $\forall\, t<1$ и имеющих пределы слева в $\forall$ т. t x

$\mathcal{D}$-ть: $d(x,y) = \inf\limits_{\lambda \in \Lambda} \left[\sup\limits_t |x_t - y_{\lambda(t)}| + \sup\limits_t |t-\lambda(t)| \right]$

задаёт метрику

Скорохода на $\mathcal{D}$, где Λ – мн-во возраст. непрер. ф-ий $\lambda = \lambda(t)$ на $[0,1]$:

$\lambda([0,1]) = [0,1]$.

Решение:

1) $\lambda^{-1} \in \Lambda$, $\sup\limits_t [u_t - v_{\lambda(t)}] = \sup\limits_t |u_{\lambda^{-1}(t)} - v_t|$

при $(u_t, v_t) = (x_t, y_t)$ или $(u_t, v_t) = (t,t)$,

получаем: $d(x,y) = d(y,x)$.

2) проверим р-во треугольника.

$\exists\, z \in \mathcal{D}$: $\forall\, \lambda_0 \in \Lambda \Rightarrow$

$d(x,y) \leq \sup\limits_t |x_t - z_{\lambda_0(t)}| + \sup\limits_t |t - \lambda_0(t)| +$

$+ \inf\limits_{\lambda \in \Lambda} [\sup\limits_t |z_{\lambda_0(t)} - y_{\lambda(t)}| + \sup\limits_t |\lambda_0(t) - \lambda(t)|] \leq$

$\leq \sup\limits_t |x_t - z_{\lambda_0(t)}| + \sup\limits_t |t - \lambda_0(t)| +$

$+ \inf\limits_{\lambda \in \Lambda} [\sup\limits_t |z_t - y_{\lambda_0^{-1} \circ \lambda(t)}| + \sup\limits_t |t - \lambda_0^{-1} \circ \lambda(t)|] =$

$= \sup\limits_t |x_t - z_{\lambda_0(t)}| + \sup\limits_t |t - \lambda_0(t)| + d(z,y)$

$\inf d(x,y) = \inf_{\lambda_n \in \Lambda} \left[\sup_t |x_t - z_{\lambda_0(t)}| + \sup_t |t - \lambda_0(t)| + d(z,y) \right]$

$d(x,y) = |x_t - z_{\lambda_0(t)}| + |t - \lambda_0(t)| + d(z,y)$

8) проверим: $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

если $d(x,y) = 0$, то $\exists \lambda_n \in \Lambda$, $n \geq 1$:

$\sup_t |x_t - y_{\lambda_n(t)}| + \sup_t |t - \lambda_n(t)| \longrightarrow 0$

$\Rightarrow x = y$

$\boxed{\S 4 \text{ пункт } 7}$ Задачи

$\boxed{№2}$ Если $|\xi|$ явл. F-измеримой, то верно ли, что ξ также F-измерима?

Решение:

$\exists$ $\Omega = \{0, 1\}$, $F = \{\varnothing, \Omega\}$, $\xi(0) = -1$, $\xi(1) = 1$

Тогда $|\xi| \equiv 1$ – случ. величина,

ξ – не случ. величина $\Rightarrow$ $\boxed{\text{неверно}}$

$\boxed{№3}$ Д-ть, что ф-ии x^n, $x^+ = \max(x, 0)$; $x^- = -\min(x, 0)$, $|x| = x^+ + x^-$ являются борелевскими.

Решение:

По топологическому определению непрер. ф-ии:

f - непрер., если прообраз любого открытого мн-ва также явл. открытым

$f^{-1}(G)$ - открыто, когда G открыто

$\rightarrow f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = f^{-1}(\sigma(G : G \text{ откр.})) =$
$= \sigma(f^{-1}(G) : G \text{ открыто}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

№5 Пусть ξ и η — две случайные вел. на (Ω, F) и $A \subset F$. Доказать, что

$(*)$ тогда $\varphi_\xi = \xi I_A + \eta I_{\bar{A}}$ — случ. вел.

Решение

$\forall$ борелевского мн-ва $B \in \mathcal{B}(R)$

$\hookrightarrow \quad \{\varphi_\xi \in B\} = (A \cap (\xi \in B)) \cup (\bar{A} \cap (\eta \in B))$

$\Rightarrow (*)$ — верно

№6] $\xi_1,\dots,\xi_n$ — случайные величины и $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ — борелевская ф-ия.
Показать: $\varphi(\xi_1(\omega),\dots,\xi_n(\omega))$ — случ. вел.

Решение

Покажем, что $\omega \longrightarrow (\xi_1(\omega),\dots,\xi_n(\omega)) \in R^n$ является $F/\mathcal{B}(R^n)$ измеримым.

~~Всякая случ. ф-ия $X=(X_t)_{t\in T}$, рассматриваемая как случ. элемент со значениями в пр-ве $(R^T, \mathcal{B}(R^T))$ есть случ. процесс и наоборот.~~

] $X_1,\dots,X_n$ — случайные элементы со значениями в $(E_1,\mathcal{E}_1),\dots,(E_n,\mathcal{E}_n)$.
] $(E_1',\mathcal{E}_1'),\dots,(E_n',\mathcal{E}_n')$ — измеримы и $g_1,\dots,g_n$ — $\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_1',\dots,\mathcal{E}_n/\mathcal{E}_n'$ — измеримые.
Можно показать, что при незав. $X_1\dots X_n$
$g_1\circ X_1,\dots,g_n\circ X_n$ — незав.

Отобр. $\omega \longrightarrow \varphi(\xi_1(\omega),\dots,\xi_n(\omega))$ — измеримо, т.к. является композицией измеримых отображений.

§5 пункт 3 Задачи

№1 $\exists$ $\xi_1, \dots, \xi_n$ – дискретные случ. величины.

Показать, что они независимы тогда и только тогда, когда $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ $\hookrightarrow$

$$(*)\quad P(\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(\xi_i = x_i)$$

Решение

1) Если ~~(*) верно, то~~ $\xi_1, \dots, \xi_n$ – незав., то $(*)$ – верно

2) $\forall$ множеств $B_1, \dots, B_n$ (счётных), состоящих из $\xi_1, \dots, \xi_n$ $\hookrightarrow$

$$\hookrightarrow P(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n) = \sum_{\substack{x_i \in B_i \\ i=\overline{1,n}}} \left(P(\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n)\right) =$$

$$= \sum_{\substack{x_i \in B_i \\ i=\overline{1,n}}} \prod_{i=1}^{n} P(\xi_i = x_i) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{x_i \in B_i} P(\xi_i = x_i) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(\xi_i \in B_i)$$

№3 $\exists\ X_1, \dots, X_n$ – случайные элементы со значениями в $(E_1, \mathcal{E}_1), \dots, (E_n; \mathcal{E}_n)$.

$\exists\ (G_1, H_1), \dots, (G_n, H_n)$ – измеримые пространства и $g_1, \dots, g_n$ являются $\mathcal{E}_1 | H_1, \dots, \mathcal{E}_n | H_n$ – измеримыми функциями. Доказать: если $X_1, \dots, X_n$ – независимые, то независимы случайные элементы $g_1 \circ X_1, \dots, g_n \circ X_n$, где $g_i \circ X_i = g_i(X_i)$, $i = \overline{1,n}$.

Решение

$\forall B_i \in H_i$, $i = \overline{1,n} \hookrightarrow$

$\hookrightarrow P(g_1(X_1) \in B_1, \dots, g_n(X_n) \in B_n) =$

$= P(X_1 \in g_1^{-1}(B_1), \dots, X_n \in g_n^{-1}(B_n))$

$\Rightarrow$ прообразы независимые