Ex. 3

3.1

- Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Poisson είναι

$$g(x) = \frac{\lambda^{\chi} e^{-\lambda}}{x!}, x = 0, 1, 2, ...$$

Από τον ορισμό έχουμε,

$$E[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x g(x) =>$$

$$E[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^{x-1}}{x!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} =>$$

θέτω $y = x - 1$,

$$E[X] = \lambda e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

$$E[X] = \mu = \lambda$$

- Για την μεταβλητότητα έχουμε εξ' ορισμού,

$$Var[x] = \sigma^2 = E[X^2] - E[X]^2$$

Γνωρίζουμε ότι,

$$E[X] = \lambda$$

Άρα πρέπει να βρούμε το $E[X^2]$,

$$E[X^2] = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 g(x) =>$$

$$E[X^2] = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{\lambda^{\chi} e^{-\lambda}}{x!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{\lambda^{x-1}}{x!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} (\sum_{x=1}^{\infty} (x-1) \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}) = \lambda e^{-\lambda} (\sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!})$$

θέτω $i = x - 2$ και $j = x - 1$,

$$E[X^2] = \lambda e^{-\lambda} (\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}) = \lambda e^{-\lambda} (\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}) = \lambda(\lambda + 1) = \lambda^2 + \lambda$$

Άρα,

$$E[X^2] = \lambda^2 + \lambda$$

Συνεπώς,

$$Var(X) = \sigma^2 = E[X^2] - E[X]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda =>$$

$$Var(X) = \sigma^2 = \lambda$$

3.2

- Γενικά έχουμε,

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty} x_i$$

Συνεπώς,

$$Var(M_n) = Var(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty} x_i) = (\frac{1}{n})^2 Var[\sum_{i=1}^{\infty} x_i] = \frac{1}{n^2} Var[x_1 + x_2 + ... + x_n] =$$

$$= \frac{1}{n^2}(\sigma^2 + \sigma^2 + ... + \sigma^2) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\lambda}{n}$$

- Αποδείξαμε ότι $Var(S_n^2) = \frac{1}{n}(\sigma_4 - \frac{n-3}{n-1}\sigma^4) = \frac{1}{n}(E[(X-\mu)^4] - \frac{n-3}{n-1}\lambda^2)$

Επίσης αποδείξαμε ότι $E[X^2] = \lambda^2 + \lambda$ και ισχύει ότι $E[X^3] = \lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3$και $E[X^3] = \lambda + 7\lambda^2 + 6\lambda^3 + \lambda^4$ για Poisson Κατανομη, Αρα,

$$E[(X-\mu)^4] = E[(X-\lambda)^4] = E[X^4] - 4\mu E[X^3] + 6\mu E[X^2] - 3\mu^4 =$$

$$= (\lambda + 7\lambda^2 + 6\lambda^3 + \lambda^4) - 4\lambda(\lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3) + 6\lambda(\lambda^2 + \lambda) - 3\lambda^4 =$$

$$\lambda + 7\lambda^2 + 6\lambda^3 + \lambda^4 - 4\lambda^2 - 12\lambda^3 - 4\lambda^4 + 6\lambda^4 + 6\lambda^3 - 3\lambda^4 = 3\lambda^2 + \lambda$$

Συνεπώς,

$$E[(X-\mu)^4] = 3\lambda^2 + \lambda$$

Αρα,

$$Var(S_n^2) = \frac{1}{n}(3\lambda^2 + \lambda - \frac{n-3}{n-1}\lambda^2) = \frac{1}{n}(\lambda + \frac{2n}{n-1}\lambda^2) = \frac{\lambda}{n}(1 + \frac{2n}{n-1}\lambda) =>$$

$$Var(S_n^2) = \frac{\lambda}{n}(1 + \frac{2n}{n-1}\lambda)$$

3.3

ΗM_nείναι πιο αποδοτικός εκτιμητής από τηνS_n^2εάν ισχύει ότι $Var(W_n) < Var(S_n^2)$. Έχουμε,

$$Var(S_n^2) - Var(W_n) = \frac{\lambda}{n}(1 + \frac{2n}{n-1}\lambda) - \frac{\lambda}{n} = \frac{\lambda}{n}(1 + \frac{2n}{n-1}\lambda) =>$$

$$Var(S_n^2) - Var(W_n) = \frac{\lambda}{n}(1 + \frac{2n}{n-1}\lambda - 1) = \frac{2\lambda^2}{n-1} > 0$$

Συνεπώς, ισχύει η ανισότητα και η M_nείναι πιο αποδοτικός εκτιμητής από τηνS_n^2.

3.4

Η ασυμπτωτική σχετική απόδοση της $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ως προς την $(S_n)_{n=2}^{\infty}$ είναι

$$\lim_{n->\infty} Eff(M_n, S_n^2) = \lim_{n->\infty} \frac{Var(M_n)}{Var(S_n^2)} = \lim_{n->\infty} \frac{\frac{\lambda}{n}(1 + \frac{2n}{n-1}\lambda)}{\frac{\lambda}{n}} =$$

$$\lim_{n->\infty}(1 + \frac{2n}{n-1}\lambda) = 1 + 2\lambda \lim_{n->\infty} \frac{n}{n-1} = 1 + 2\lambda \lim_{n->\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = 1 + 2\lambda$$

Άρα, η ασυμπτωτική σχετική απόδοση της $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ως προς την $(S_n)_{n=2}^{\infty}$ είναι $1 + 2\lambda$.