

Θεωρία Εκτίμησης και Ανίχνευσης

Unscented particle filters

31/05/21

Λαμπράκη Έφη, elampraki@ece.auth.gr, 9320
Κοσέογλου Σωκράτης, sokrkose@ece.auth.gr 8837
Σπαΐας Γεώργιος, gspaiasa@ece.auth.gr 8910

Kalman filter

Το φίλτρο Kalman συναντάται συνήθως σε τρεις μορφές: Το απλό φίλτρο, το εκτεταμένο και το unscented φίλτρο Kalman

- Το απλό φίλτρο εφαρμόζεται σε γραμμικά συστήματα
- Το εκτεταμένο φίλτρο προσεγγίζει τα μη γραμμικά συστήματα από τους γραμμικούς τους όρους
- Το unscented φίλτρο εφαρμόζεται όταν οι μη γραμμικοί όροι συνεισφέρουν σημαντικά στο μοντέλο.

Unscented Kalman Filter

Το unscented φίλτρο δημιουργεί δειγματικά 'σ'-σημεία που καταφέρνουν να περιγράψουν το μέσο και τη διασπορά της μεταβλητής κατάστασης με ακρίβεια μέχρι και για την τρίτη τάξη του αναπτύγματος Taylor της συνάρτησης g

Για τη δημιουργία των σημείων αυτών κατασκευάζεται ένας μετασχηματισμός (un-scented transformation) για την τυχαία μεταβλητή κατάστασης που υφίσταται μη γραμμικό μετασχηματισμό $y = h(x)$

Αν, λοιπόν, η τυχαία μεταβλητή x έχει δι-άσταση L , μέσο \bar{x} και διασπορά P_x , για τον υπολογισμό των στατιστικών της y κατασκευάζεται πίνακας X αποτελούμενος από $2L + 1$ σ-διανύσματα X_i με αντίστοιχα βάρη W_i ως εξής

$$\begin{aligned} X_0 &= \bar{x} \\ X_i &= \bar{x} + (\sqrt{(L + \lambda)P_x})_i, i = 1, \dots, L \\ X_i &= \bar{x} - (\sqrt{(L + \lambda)P_x})_{i-L}, i = L + 1, \dots, 2L \\ W_0^m &= \lambda / (L + \lambda) \\ W_0^c &= \lambda / (L + \lambda) + (1 - \alpha^2 + \beta) \\ W_i^m &= W_i^c = 1 / \{2(L + \lambda)\}, i = 1, \dots, 2L \end{aligned}$$

Unscented Kalman Filter

όπου :

- $\lambda = \alpha^2 (L + \kappa) - L$
- α είναι σταθερά που αντιπροσωπεύει τη διασπορά των σ-σημείων από το μέσο \bar{x} και συνήθως παίρνει μικρές τιμές της τάξης του 10^{-3}
- το κ είναι σταθερά συνήθως μηδενική
- και το β σχετίζεται με πρότερες γνώσεις για την κατανομή της x (Μάλιστα, για την κανονική κατανομή η βέλτιστη επιλογή είναι $\nu\beta = 2$)

Έτσι κατασκευάζονται τα σ-διανύσματα

και η διασπορά του y από τις εκτιμήσεις

$$\mathcal{Y}_i = g(\mathcal{X}_i), i = 0, \dots, 2L$$

$$\bar{y} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^m \mathcal{Y}_i$$

$$P_y = \sum_{i=0}^{2L} W_i^c \{\mathcal{Y}_i - \bar{y}\} \{\mathcal{Y}_i - \bar{y}\}^T$$

The particle filters

Τα particle filters αποτελούν σειριακή μέθοδο Monte Carlo για την εκτίμηση της κατανομής της κατάστασης ενός συστήματος

προσεγγίζουν τη λύση του συστήματος με διαφορετική φιλοσοφία και παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές από τα φίλτρα Kalman.

- είναι δυνατά να αντιμετωπίσουν μη γραμμικά και μη κανονικά συστήματα κατά βάση μαρκοβιανά.
- επικεντρώνονται στην εύρεση πρωτίστως της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της μεταβλητής κατάστασης (δεδομένων των μετρήσεων) και τον υπολογισμό της μέσης τιμής της σε δεύτερη φάση.
- για την εκτίμηση αυτή, η λύση που δίνουν είναι προσεγγιστική και όχι ακριβής.
- το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση υποβέλτιστης αλλά βέλτιστης κατά Bayes λύσης
- το υπολογιστικό κόστος πολύ μεγαλύτερο σε σχέση με τα φίλτρα Kalman εξαιτίας των αριθμητικών μεθόδων που επιστρατεύονται.

The particle filters

Περίληπτικά, τα φίλτρα σωματιδίων περιλαμβάνουν τρία κύρια βήματα:

- Την εκ των προτέρων εκτίμηση- προσέγγιση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της μεταβλητής κατάστασης -δεσμευμένης από τις υπάρχουσες παρατηρήσεις
- Τη δειγματοληψία βασισμένη στην παραπάνω εκτίμηση
- Την εκ των υστέρων εκτίμηση της ίδιας συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας από τα δείγματα

Το σύστημα είναι της μορφής: $x_k = g(x_{k-1}, w_{k-1})$, $y_k = h(x_k, v_k)$

όπου η g σχετίζεται με την πυκνότητα $p(x_k | x_{k-1})$ και η h με την πιθανοφάνεια $p(z_k | x_k)$ ενώ v, w αντιπροσωπεύουν τυχαία σφάλματα, αλλά όχι λευκό θόρυβο.

Monte Carlo Simulation

Για να προχωρήσει κανείς στη μέθοδο θεωρεί γνωστή την αρχική κατανομή $p(x_0)$ και τα $p(x_n | x_{n-1})$, $p(z_n | x_n)$, $n \geq 1$.

Σκοπός της μεθόδου είναι η εκτίμηση της πυκνότητας πιθανότητας $p(x_n | z_n, z_{n-1}, \dots, z_1)$.

Τότε
$$\hat{x}_n = E[x_n | z_n, z_{n-1}, \dots, z_1] = \int x_n p(x_n | z_n, z_{n-1}, \dots, z_1) dx_n$$

Επειδή τέτοιου τύπου ολοκληρώματα είναι δύσκολα στον υπολογισμό τους χρησιμοποιούνται διαδοχικές μέθοδοι Monte Carlo (SMC).

Με χρήση του θεωρήματος Bayes:

$$p(x_n | z_n, z_{n-1}, \dots, z_1) = \frac{p(z_n, z_{n-1}, \dots, z_1 | x_n) p(x_n)}{p(z_n, z_{n-1}, \dots, z_1)}$$

Ο υπολογισμός ωστόσο της πυκνότητας πιθανότητας $p(z_n, z_{n-1}, \dots, z_1)$, των περιθώριων κατανομών της $p(x_n, \dots, x_0 | z_n, \dots, z_1)$ και της ζητούμενης τελικά μέσης τιμής είναι πρακτικά αδύνατος.

Monte carlo simulation

Εστω ότι το n είναι σταθερό. Αν κανείς μπορούσε να πάρει N τυχαία δείγματα, που θα ονομάζονται και σωματίδια (particles), $\{\mathbf{x}(i); i = 1, \dots, N\}$ από την άγνωστη μέχρι στιγμής κατανομή $p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:n})$, τότε η $0:k$ κατανομή αυτή θα μπορούσε να προσεγγιστεί από τον τύπο:

$$\hat{p}(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^{(i)}),$$

όπου :

δ είναι η συνάρτηση του Dirac

$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k)$ περιθώρια κατανομή πυκνότητας πιθανότητας (marginal probability distribution) της $p(\mathbf{X}_0^k | \mathbf{Y}_0^k)$.

Συνεπώς η αναμενόμενη τιμή $\mathbb{E}(\mathbf{g}(\mathbf{x}_k)) = \int \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k) d\mathbf{x}_k$

Μπορεί να προσεγγιστεί ως: $\mathbb{E}(\mathbf{g}(\mathbf{x}_k)) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{g}(\mathbf{x}_k^{(i)})$.

όπου για $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ προσεγγίζεται ο βέλτιστος MMSE (minimum mean square error) εκτιμητής $\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbb{E}[\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k]$

Monte Carlo Simulation & Sequential Importance Sampling

Η παρούσα μέθοδος παρουσιάζει κάποια σημαντικά μειονεκτήματα:

- I. Η δειγματοληψία πολύπλοκων συναρτήσεων με ορίσματα μεγάλων διαστάσεων είναι αδύνατη.
- II. Ακόμη και αν η διαδοχική δειγματοληψία από αυτές είναι δυνατή, η υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου θα αυξάνεται τουλάχιστον γραμμικά με το n
- III. Για τη δημιουργία των δειγμάτων χρειάζεται η γνώση της συνάρτησης κατανομής, πράγμα συχνά ανέφικτο.

Monte Carlo Simulation & Sequential Importance Sampling

Για να ξεπεράσουμε την δυσκολία αυτή εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε Importance Sampling που εισάγει την έννοια της προτεινόμενης κατανομής.

Στην μέθοδο αυτή μπορούμε να επιλέξουμε μια γνωστή κατανομή $q(\mathbf{X}_0^k | \mathbf{Y}_0^k)$ για την λήψη δειγμάτων με μεγαλύτερη ευκολία. Ενώ μετασχηματίζει το ζητούμενο ολοκλήρωμα σε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbf{g}_k(\mathbf{X}_0^k)) &= \int \mathbf{g}_k(\mathbf{X}_0^k) \frac{p(\mathbf{X}_0^k | \mathbf{Y}_0^k)}{q(\mathbf{X}_0^k | \mathbf{Y}_0^k)} q(\mathbf{X}_0^k | \mathbf{Y}_0^k) d\mathbf{X}_0^k \\ &= \int \mathbf{g}_k(\mathbf{X}_0^k) \frac{p(\mathbf{Y}_0^k | \mathbf{X}_0^k) p(\mathbf{X}_0^k)}{p(\mathbf{Y}_0^k) q(\mathbf{X}_0^k | \mathbf{Y}_0^k)} q(\mathbf{X}_0^k | \mathbf{Y}_0^k) d\mathbf{X}_0^k \\ &= \int \mathbf{g}_k(\mathbf{X}_0^k) \frac{w_k(\mathbf{X}_0^k)}{p(\mathbf{Y}_0^k)} q(\mathbf{X}_0^k | \mathbf{Y}_0^k) d\mathbf{X}_0^k,\end{aligned}$$

έτσι προκύπτουν τα μη κανονικοποιημένα βάρη:

$$w_k = \frac{p(\mathbf{Y}_0^k | \mathbf{X}_0^k) p(\mathbf{X}_0^k)}{q(\mathbf{X}_0^k | \mathbf{Y}_0^k)}$$

Επεκτείνοντας την προτεινόμενη κατανομή σε $q(\mathbf{X}_0^k | \mathbf{Y}_0^k) = q(\mathbf{X}_0^{k-1} | \mathbf{Y}_0^{k-1}) q(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_0^{k-1}, \mathbf{Y}_0^k)$

και απαλείφοντας τον όρο $p(\mathbf{Y}_0^k)$ καταλήγουμε στα ακόλουθα βάρη τα οποία ορίζονται από τον

παρακάτω αναδρομικό τύπο:

$$w_k = w_{k-1} \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})}{q(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_0^{k-1}, \mathbf{Y}_0^k)}$$

Η διαδικασία αυτή μας δίνει την δυνατότητα να υπολογίσουμε τις εκτιμήσεις που μας ενδιαφέρουν μέσω του τύπου:

$$\mathbb{E}(\mathbf{g}(\mathbf{X}_0^k)) \approx \frac{N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{g}(\mathbf{x}_{0:k}^{(i)}) w_k(\mathbf{x}_{0:k}^{(i)})}{N^{-1} \sum_{i=1}^N w_k(\mathbf{x}_{0:k}^{(i)})} = \sum_{i=1}^N \mathbf{g}(\mathbf{x}_{0:k}^{(i)}) \tilde{w}_k(\mathbf{x}_{0:k}^{(i)})$$

Απο τα παραπάνω βλέπουμε πως:

- Τα βάρη αυτά αντικατοπτρίζουν τη διόρθωση που χρειάζεται για τη μετάβαση από τη θεωρητική στην προτεινόμενη κατανομή.
- η μέση τιμή της συνάρτησης του συστήματος κάτω από την κατανομή \mathbf{p} είναι ίδια με την μέση τιμή της $\mathbf{g}(\mathbf{x}_{0:k}^{(i)})\tilde{w}_k(\mathbf{x}_{0:k}^{(i)})$ κάτω από την κατανομή \mathbf{q}

Καθώς $\mathbf{N} \rightarrow +\infty$ ο δειγματικός μέσος συγκλίνει στο ζητούμενο θεωρητικό και η ύστερη κατανομή μπορεί να εκτιμηθεί αυθαιρέτως καλά από την:

$$\hat{p}(\mathbf{X}_0^k | \mathbf{Y}_0^k) = \sum_{i=1}^N \tilde{w}_k^{(i)} \delta(\mathbf{X}_0^k - \mathbf{x}_{0:k}^{(i)})$$

Αλγόριθμος δειγματοληψίας κατά σημαντικότητα

Importance sampling step

- For $i = 1, \dots, N$, sample $\mathbf{x}_k^{(i)} \sim q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_0^k)$.
- For $i = 1, \dots, N$, evaluate the importance weights up to a normalizing constant:

$$w_k^{(i)} = w_{k-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^{(i)}) p(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)})}{q(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{0:k-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_0^k)}.$$

- For $i = 1, \dots, N$, normalize the importance weights:

$$\tilde{w}_k^{(i)} = w_k^{(i)} \left(\sum_{j=1}^N w_k^{(j)} \right)^{-1}.$$

Resampling & MCMC Step

Η αναδειγματοληψία είναι η εκ νέου δειγματοληψία από το υπάρχον δείγμα με βάση τα υπάρχοντα βάρη ως πιθανότητες επιλογής.

Με την επανάληψη αυτής της διαδικασίας τα σωματίδια με μικρά βάρη χάνονται, αντίθετα με αυτά με τα μεγάλα βάρη που πολλαπλασιάζονται. Επειτα από αυτή τη διαδικασία τα βάρη γίνονται ομοιόμορφα.

Στο επόμενο βήμα χρόνου, μια νέα διάσταση x_{t+1} προστίθεται στο υπάρχον δείγμα από την δεσμευμένη προτεινόμενη κατανομή

Η αναδειγματοληψία θα έχει συγκεντρώσει το αρχικό δείγμα $x_{0:t}$ σε ένα σύνολο 'χρήσιμων' σημείων και καθώς το σύνολο αυτό θα περιέχει ακριβή αντίγραφα ορισμένων σωματιδίων θα έχουμε πιο ευκρινές δείγμα στο επόμενο χρονικό βήμα

Δειγματοληψία υπολοίπων

Υπάρχουν πολλές μέθοδοι αναδειγματοληψίας αλλά εμείς θα σταθούμε κυρίως στην Δειγματοληψία Υπολοίπων (Residual Resampling) που χρησιμοποιήθηκε και στα παραδείγματα που υλοποιήσαμε.

Η μέθοδος της δειγματοληψίας υπολοίπων δίνει προτεραιότητα στον υπολογισμό του αριθμού των φορών που κάθε σωματίδιο πολλαπλασιάζεται.

Αρχικά αναπαράγονται ντερερμινιστικά ως εξής $\bar{N}_t^A = \lfloor N \tilde{w}_t^{(i)} \rfloor$ σωματίδια.

Στη συνέχεια τα υπόλοιπα $\bar{N}_t = N - \sum_{i=1}^N N_t^A$ δειγματοληπτούνται από τα προηγούμενα σωματίδια με την χρήση Sampling Importance Resampling (SIR) δηλαδή με ομοιόμορφη δειγματοληψία από το $\{\mathbf{x}_k^{(i)}; i = 1, \dots, N\}$ με πιθανότητα $\{\tilde{w}_k^{(i)}; i = 1, \dots, N\}$

Τα αντίστοιχα βάρη υπολογίζονται από τον τύπο:

$$w_t^{(i)} = \bar{N}_t^{-1}(\tilde{w}_t^{(i)}N - N_i^A)$$

Τελικά, τα νέα βάρη όλων των σωματιδίων του νέου δείγματος τίθενται ίσα με το $1/N$ και συνεχίζουμε στην επόμενη επανάληψη του αλγορίθμου. Η μέθοδος αυτή επιφέρει ελάττωση της διασποράς.

Μετά το βήμα της αναδειγματοληψίας στον k χρόνο έχουμε N σωματίδια κατανεμημένα προσεγγιστικά με την ύστερη κατανομή.

Αλγόριθμος Φίλτρου Σωματιδίων (particle filter algorithm)

Στην υλοποίηση του αλγορίθμου η επιλογή της προτεινόμενης κατανομής $q(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_0^{k-1}, \mathbf{Y}_0^k)$ το σημαντικότερο σχεδιαστικό ζητούμενο.

Ιδανικά θέλουμε να επιλέξουμε την προτεινόμενη ως:

$$q(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_0^{k-1}, \mathbf{Y}_0^k) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_0^{k-1}, \mathbf{Y}_0^k)$$

Αλλα η δειγματοληψία έτσι καθιστάται πρακτικά αδύνατη. Για αυτό η πλέον διαδεδομένη επιλογή είναι η:

$$q(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_0^{k-1}, \mathbf{Y}_0^k) \stackrel{\circ}{=} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) \text{ όπου } p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}_{k-1}, 0), \mathbf{R}_{k-1}^y)$$

1. *Initialization: $k = 0$*

- For $i = 1, \dots, N$, draw the states $\mathbf{x}_0^{(i)}$ from the prior $p(\mathbf{x}_0)$.

2. For $k = 1, 2, \dots$

(a) *Importance sampling step*

- For $i = 1, \dots, N$, sample $\mathbf{x}_k^{(i)} \sim q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_0^k)$.
- For $i = 1, \dots, N$, evaluate the importance weights up to a normalizing constant:

$$w_k^{(i)} = w_{k-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^{(i)}) p(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)})}{q(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{0:k-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_0^k)}.$$

- For $i = 1, \dots, N$, normalize the importance weights:

$$\tilde{w}_k^{(i)} = w_k^{(i)} \left(\sum_{j=1}^N w_k^{(j)} \right)^{-1}.$$

(b) *Selection step (resampling)*

- Multiply/suppress samples $\mathbf{x}_k^{(i)}$ with high/low importance weights $\tilde{w}_k^{(i)}$, respectively, to obtain N random samples $\mathbf{x}_k^{(i)}$ approximately distributed according to $p(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{Y}_0^k)$.
- For $i = 1, \dots, N$, set $w_k^{(i)} = \tilde{w}_k^{(i)} = N^{-1}$.

(c) *MCMC move step (optional)*

(d) *Output:* The output of the algorithm is a set of samples that can be used to approximate the posterior distribution as follows:

$$\hat{p}(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^{(i)}).$$

The optimal MMSE estimator is given as

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbb{E}(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_k^{(i)}.$$

ΕΚΦ και UKF Φίλτρα Σωματιδίων

Μπορούμε να επιλέξουμε την κατανομή q μέσω ενός ΕΚΦ. Έτσι έχουμε:

$$q(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_0^{k-1}, \mathbf{Y}_0^k) \stackrel{\circ}{=} q_{\mathcal{N}}(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k)$$

Αυτό υλοποιείται χρησιμοποιώντας ΕΚΦ για την δημιουργία Γκαουσιανών προτεινόμενων κατανομών για κάθε σωματίδιο.

$$q_{\mathcal{N}}(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{Y}_0^k) = \mathcal{N}(\bar{\mathbf{x}}_k^{(i)}, \mathbf{P}_k^{(i)}), \quad i = 1, \dots, N$$

Έτσι σε χρόνο k υπολογίζουμε μέσω του ΕΚΦ τον μέσο και το covariance της κατανομής για κάθε σωματίδιο με βάση τα δεδομένα του προηγούμενου χρόνου $k-1$

ΕΚΦ και UKF Φίλτρα Σωματιδίων

Αντικαθιστώντας το ΕΚΦ με UKF μπορούμε με μεγαλύτερη ακρίβεια να μεταδώσουμε το mean και το covariance της Γκαουσιανής προσεγγίσης για την ύστερη κατανομή.

- Οι κατανομές που δημιουργεί το UKF παρουσιάζουν μεγαλύτερη ταύτιση με την πραγματική ύστερη κατανομή.
- Επιπλέον οι παράμετροι για τα sigma-points επιτρέπουν βελτιστοποίηση της διαδικασίας όταν έχουμε γνώση για κάποια χαρακτηριστικά της prior κατανομής.

Unscented φίλτρο σωματιδίων

Αλγόριθμος του Unscented φίλτρου σωματιδίων

0. Υπολογίζονται

$$\begin{aligned}\hat{x}_0^{(i)} &= E[x_0^{(i)}] \\ P_0^{(i)} &= E[(x_0^{(i)} - \hat{x}_0^{(i)})(x_0^{(i)} - \hat{x}_0^{(i)})^T] \\ \hat{x}_0^{(i)\alpha} &= E[x^{(i)a}] = [(\hat{x}_0^{(i)})^T 00]^T \\ P_0^{(i)\alpha} &= E[(x_0^{(i)a} - \hat{x}_0^{(i)a})(x_0^{(i)a} - \hat{x}_0^{(i)a})^T] = \begin{bmatrix} P_0^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & P_w & 0 \\ 0 & 0 & P_v \end{bmatrix}\end{aligned}$$

και τίθεται $k=1$

1. Εκτελείται δειγματοληψία κατά σημαντικότητα.

α. Για $i = 1, \dots, N$ ο πίνακας \mathcal{X} κατασκευάζεται κατ' αναλογία με την εξίσωση

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{k|k-1}^{(i)x} &= f(\mathcal{X}_{k-1}^{(i)x}, \mathcal{X}_{k-1}^{(i)w}) \\ \hat{x}_k^{(i)}(-) &= \sum_{i=0}^{2L} W_i^m \mathcal{X}_{i,k|k-1}^{(i)x} \\ P_k^{(i)}(-) &= \sum_{i=0}^{2L} W_i^c [\mathcal{X}_{i,k|k-1}^{(i)x} - \hat{x}_k^{(i)}(-)][\mathcal{X}_{i,k|k-1}^{(i)x} - \hat{x}_k^{(i)}(-)]^T \\ \mathcal{Z}_{k|k-1}^{(i)} &= g(\mathcal{X}_{k-1}^{(i)x}, \mathcal{X}_{k-1}^{(i)v}) \\ \hat{z}_k^{(i)}(-) &= \sum_{i=0}^{2L} W_i^m \mathcal{Z}_{i,k|k-1}^{(i)}\end{aligned}$$

β. Εκτελείται διόρθωση

$$\begin{aligned}P_{\hat{z}_k \hat{z}_k} &= \sum_{i=0}^{2L} W_i^c [\mathcal{Z}_{i,k|k-1}^{(i)} - \hat{z}_k^{(i)}(-)][\mathcal{Z}_{i,k|k-1}^{(i)} - \hat{z}_k^{(i)}(-)]^T \\ P_{x_k z_k} &= \sum_{i=0}^{2L} W_i^c [\mathcal{X}_{i,k|k-1}^{(i)x} - \hat{x}_k^{(i)}(-)][\mathcal{Z}_{i,k|k-1}^{(i)} - \hat{z}_k^{(i)}(-)]^T \\ K &= P_{x_k z_k} P_{\hat{z}_k \hat{z}_k}^{-1} \\ \hat{x}_k^{(i)}(+) &= \hat{x}_k^{(i)}(-) + K(z_k - \hat{z}_k^{(i)}(-)) \\ P_k^{(i)}(+) &= P_k^{(i)}(-) - K P_{\hat{z}_k \hat{z}_k} K^T\end{aligned}$$

Unscented φίλτρο σωματιδίων

- γ. Διαλέγονται $x_k^{(i)} \sim q(x_k^{(i)} | x_{0:k-1}^{(i)}, y_{1:k}) = N(x_k^{(i)}(+), \hat{P}_k^{(i)}(+))$
δ. Ορίζονται $\hat{x}_{0:k}^{(i)} = (x_{0:k-1}^{(i)}, x_k^{(i)})$ και $\hat{P}_{0:k}^{(i)} = (P_{0:k-1}^{(i)}, P_k^{(i)}(+))$
ε. Τα βάρη υπολογίζονται για $i = 1, \dots, N$

$$w_k^{(i)} \propto \frac{p(z_t | \hat{x}_k^{(i)}) p(\hat{x}_k^{(i)} | x_{k-1}^{(i)})}{q(\hat{x}_k^{(i)} | x_{0:k-1}^{(i)}, z_{1:t})}$$

και κανονικοποιούνται κατά τα γνωστά.

2. Εκτελείται αναδειγματοληψία.



Ευχαριστούμε για τον χρόνο σας!