Unscented Particle Filter

May 31, 2021

Έφη Λαμπράκη, elampraki@ece.auth.gr, AEM: 9320

Γεώργιος Σπαΐας, gspaiasa@ece.auth.gr, AEM: 8910

Κοσέογλου Σωκράτης, sokrkose@ece.auth.gr, AEM: 8837

Exercise 1

Let $X_1, X_2, ...X_N$ be a random sample from a population with density $f_X(x|\theta), \theta \in \{0,1\}$ with:

$f_X(x;0) = \begin{cases} 1 & iff\, x \in (0,1) \\ 0 & else \end{cases}, f_X(x|\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & iff\, x \in (0,1) \\ 0 & else \end{cases}$

Find the MLE.

Since $\theta \in \{0,1\}$ we have to evaluate the likelihood for each discrete value it takes.

From the definition of the likelihood function we have that: $L_X(\theta) = f_X(x;\theta) \;\; \theta \in \Theta$

So in our case we can see that $L_X(0) = f_X(x;0) = 1$ for $x \in (0,1)$

Now we must also evaluate the likelihood function at $\theta = 1$.

If we have a random sample $\boldsymbol{X}$of size n , the likelihood can be written as:

$$L_X(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x|\theta) = \frac{1}{2^n \prod_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}}$$

So for $\theta = 1$ the likelihood will also be $L_X(1) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x|\theta) = \frac{1}{2^n \prod_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}}$

So the MLE estimator will be:

$$\widehat{\theta} = \begin{cases} 0 & 2^n \prod_{i=1}^n \sqrt{x_i} > 1 \\ 1 & 2^n \prod_{i=1}^n \sqrt{x_i} \leq 1 \end{cases}$$

Exercise 2

Let $X_1, X_2, ...X_N$ be a random sample from a population with density

$$f_X(x;\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x} \quad \theta \in [0, 1/2] \quad , x \in \{0, 1\}$$

Για τον MLE εκτιμητή αρχικά θα πάρουμε την log-likelihood συναρτηση:

$$lnL_X(\theta) = \sum_{i=1}^n (x_i ln\theta + (1-x_i) ln(1-\theta))$$

ή

$$lnL_X(\theta) = ln\theta \sum_{i=1}^n x_i + ln(1-\theta) \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i$$

Παραγωγίζοντας για την παραπάνω έχουμε:

$$\frac{d}{d\theta} lnL_X(\theta) = \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{n}{\theta - 1} - \frac{1}{\theta - 1} \sum x_i$$

Προκειμένου να βρούμε τα ακρότατα απαιτούμε

$$\frac{d}{d\theta} lnL_X(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\theta} \mathrm{T} + \frac{n}{\theta - 1} - \frac{1}{\theta - 1} \mathrm{T} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{T(\theta - 1) + n\theta - T\theta}{\theta(\theta - 1)} = 0$$

$$\Rightarrow n\theta - T = 0 \text{ όπου } \mathrm{T} = \sum_{i=1}^n x_i$$

Άρα

$$\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Επιπλέον:
$\frac{d^2}{d\theta^2} lnL_X(\theta) = -\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{(\theta-1)^2}\left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$

Ισχύει οτι $x \in \{0,1\}$ δηλδή $0 \leq x_i \leq 1$ και:

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \leq n \Rightarrow n - \sum_{i=1}^{n} x_i \geq 0$$

Άρα έχουμε $\frac{d^2}{d\theta^2} lnL_X(\theta) < 0$ διότι:

- Αν 0<T<N τοτε και οι δύο οροι είναι αρνητικοί
- Αν T=0 τοτε $\frac{1}{(\theta-1)^2} n < 0$
- Αν T=N τότε $-\frac{n}{\theta^2} < 0$

Άρα η $lnL_X(\theta)$ είναι κοίλη συνάρτηση και έχουμε ολικό μέγιστο και MLE του ϑ το

$$\widehat{\theta} = \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \theta \in [0,1]$$

Επειδή όμως τελικά ο χώρος των πραμέτρων μας είναι το $\theta \in [0, 1/2]$ θα έχουμε $\widehat{\theta}_{\mathrm{MLE}} = min\left\{\mu, \frac{1}{2}\right\}$

Διότι εάν $\mu \leq \frac{1}{2}$ τοτε το ολικό μέγιστο θα βρίσκεται εντός του διαστήματος της παραμέτρου.
Ενω αν $\mu > \frac{1}{2}$ τότε $\widehat{\theta} = \frac{1}{2}$ αφού $lnL_X \uparrow$ στο $[0, \mu]$

Για την method of moments έχουμε:

$$\mu = E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_X(x_i;\theta) = 0 \cdot \theta^0 (1-\theta)^1 + 1 \cdot \theta^1 (1-\theta)^{1-1} = \theta$$

Αρα $\widehat{\theta} = \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \backslash$

Exercise 3

Let X be a single random sample from a population with $\mathcal{N}(\theta, 1)$ distribution.
Find the MLE of θ under the constraint $\theta \geq 0$

$$\mathcal{N}(\theta, 1) \;\rightarrow\; f_X(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}}$$

Απο τα παραπάνω παίρνουμε οτι

$$lnf_X(x;\theta) = -\frac{1}{2}ln(2\pi) - \frac{1}{2}(x-\theta)^2$$

και τελικά εχουμε την log-likelihood

$$lnL_X(\theta) = \sum_{i=1}^{N} -\frac{1}{2}ln(2\pi) - \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}(x-\theta)^2$$

$$= -\frac{N}{2}ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(x-\theta)^2$$

Παραγωγίζουμε την log-likelihood και έχουμε:

$$\frac{d}{d\theta}lnL_X(\theta) = \sum_{i=1}^{n} x_i - N\theta$$

Μηδενίζουμε την παράγωγο για να βρούμε ακρότατα

$$\frac{d}{d\theta}lnL_X(\theta) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - N\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Και συνεπώς ο MLE εκτιμητής μας θα ειναι:

$$\widehat{\theta} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i$$