Треугольник

1 Формулы для площади треугольника

Если a, b, c - стороны треугольника, α, β, γ - противолежащие им углы, h_a, h_b, h_c - высоты проведенные из вершин этих углов, p - полупериметр треугольника, R - радиус описанной окружности, r, r_a, r_b, r_c - радиусы вписаннай и вневписанных окружностей, касающихся сторон a, b, c соответственно, а S площадь тругольника, то

(1) $S = \frac{1}{2}ah_a$

(2) $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$

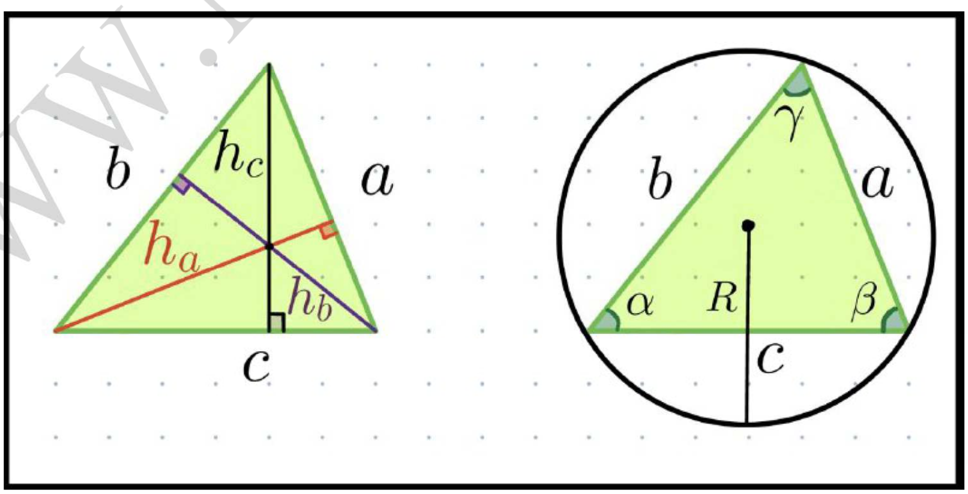
(3) $S = \frac{abc}{4R}$

(4) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ *(Формула Герона)*

(5) $S = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

(6) $S = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}$

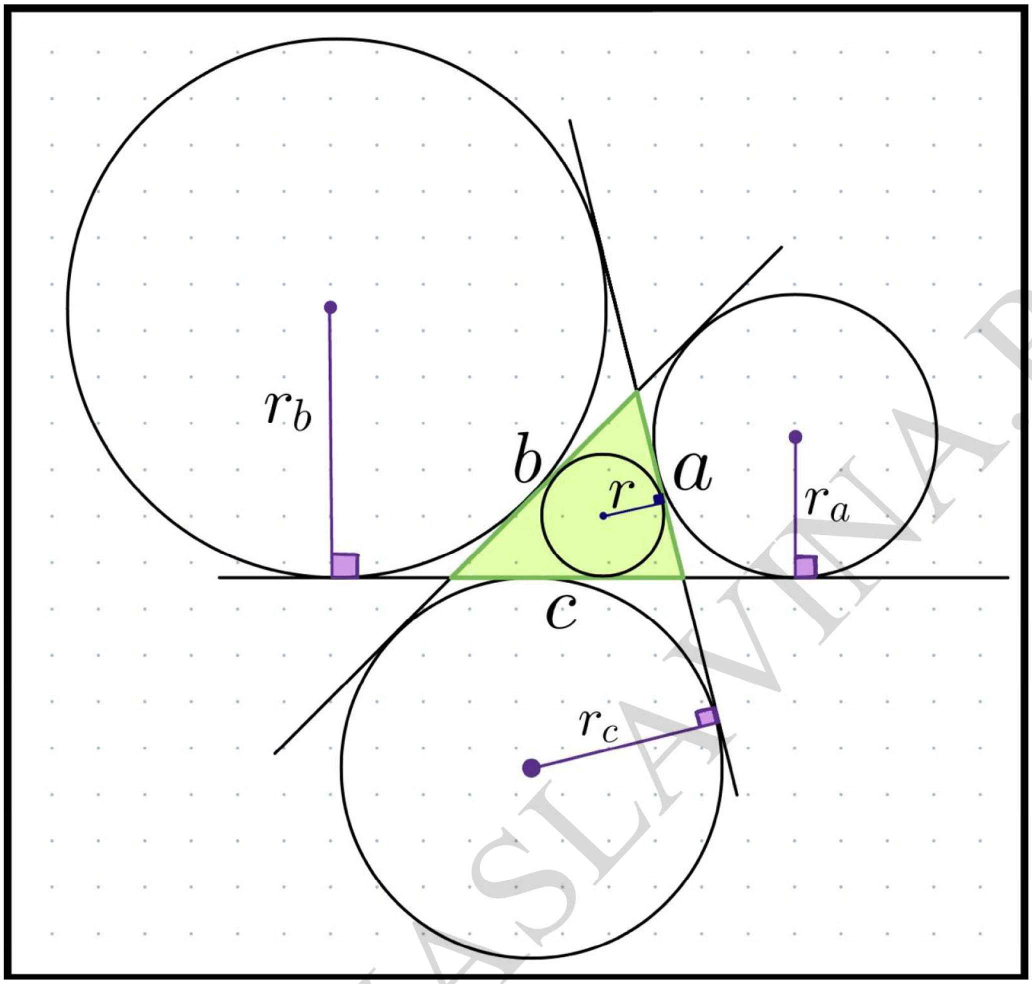
(7) $S = \frac{h_b h_c}{2\sin\alpha}$



(8) $S = pr$

(9) $S = (p-a)r_a$

(10) $S = \sqrt{rr_ar_br_c}$



2 Некоторые дополнительные свойства площадей

а) Если точка D лежит на стороне BC треугольника ABC или на её продолжении, то

$$\frac{S_{\Delta ADB}}{S_{\Delta ADC}} = \frac{BD}{DC}$$

б) Если точки P, Q лежит на сторонах AB, AC треугольника ABC соответственно (или на продолжениях соответсвующих сторон) , то

$$\frac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AP}{AB} \cdot \frac{AQ}{AC}$$

3 Теоремы синусов и косинусов

Теорема 1 ***(Теорема синусов)***
Отношение длины стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно двум радиусам описанной около треугольника окружности.

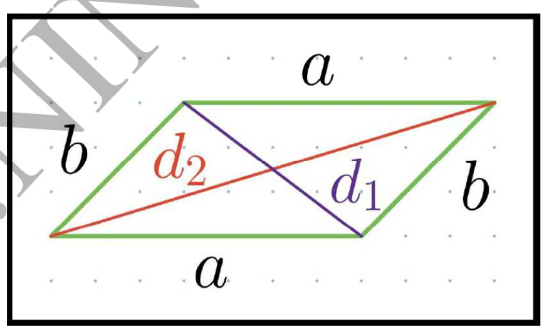
$$2R = \frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma}$$

Теорема 2 ***(Теорема косинусов)***
Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон за вычетом удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Следствие 1 *(Следствие теоремы косинусов)*
Сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$$



Следствие 2 *(Следствие теоремы косинусов)*
Длина медианы m_c треугольника , проведенной к стороне c, может быть вычислена по формуле:

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

4 Свойства медиан, биссектрис и высот треугольника

4.1 Свойства медиан треугольника

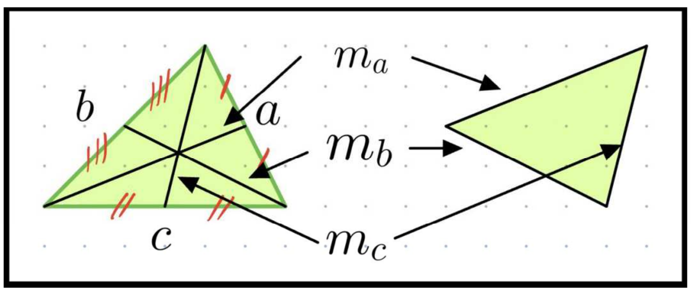
а) Медиана треугольника разбивает его на два равновеликих.

б) Три медианы треугольника разбивают его на шесть равновеликих.

в) Если площадь треугольника S, то площадь треугольника составленного из его медиан равна $\frac{3}{4}S$.

г)Длина медианы m_c треугольника , проведенной к стороне c, может быть вычислена по формуле:

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

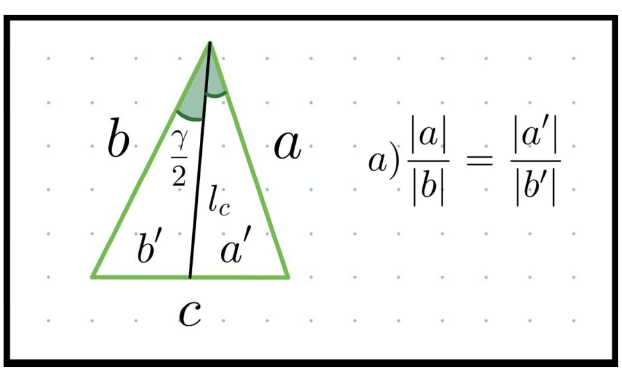


4.2 Свойства биссектрис треугольника

а) Биссектриса треугольника разбивает его сторону, к которой эта биссектриса была проведена, на два отрезка a' и b', длины которых соотносятся также, как и длины прилежащих им сторон.

б) Длинна биссектрисы l_c треугольника , проведенной из угла γ к стороне c, может быть вычислена по формулам:

$$l_c = \frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}; \quad l_c^2 = ab - a'b'$$

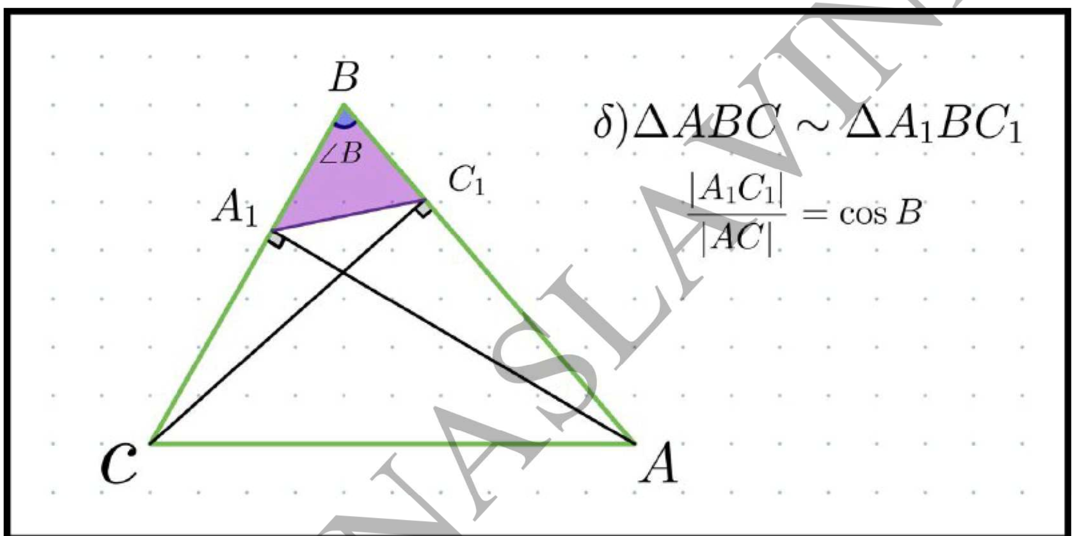


4.3 Свойства высот треугольника

а) Длинна высоты h_c треугольника, проведенной к стороне c, может быть вычислена по формуле:

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

б) Если в треугольнике провести две высоты, то треугольник образованный основаниями высот и третьей вершиной треугольника подобен данному треугольнику с коэффициентом подобия $\cos B$. (Угол B обозначен на последующем рисунке)



5 Теорема Менелая

Теорема 3 ***(Теорема Менелая)***
Пусть прямая пересекает треугольник ABC, причем C' - это точка ее пересечения со стороной AB, B' - точка ее пересечения со стороной AC (причем эти точки не совпадают) и A' - точка ее пересечения с продолжением стороны BC (рис. 1). Тогда имеет место соотношение:

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1$$