Aufgaben zur Linearen Algebra - Blatt 7

elektronische Abgabe im OLAT Kurs des Proseminars
(z.B. bis Mo. 21. November 2022, 08:15 Uhr)

Aufgabe 25

Berechnen Sie zur gegebenen Matrix $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ sowie für A^{-1} eine Zerlegung als Produkt von Elementarmatrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 26

Berechnen Sie die inverse Matrix der beiden folgenden Matrizen, jeweils im gegebenen Matrixring:

$$\begin{pmatrix} i & 1 & 1+i \\ 1 & 2i & -i \\ 0 & -1 & i \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C}) \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}).$$

Aufgabe 27

Für eine (reelle oder komplexe) 2×2-matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ wird die Zahl

$$\det(A) := ad - bc$$

die *Determinante* von A genannt. Zeigen Sie, dass für je zwei solcher Matrizen A und B stets gilt

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Dann zeigen Sie: eine 2×2-Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$ gilt.

Aufgabe 28

Seien K ein Körper und $A, B \in \mathrm{Mat}_m(K)$. Es gelte $AB = I_m$. Zeigen Sie, dass dann auch $BA = I_m$ gilt.

Hinweis: Wenn Sie die Invertierbarkeit von A oder B verwenden wollen, müssen Sie sie zuerst zeigen.