

**75.12 - 95.13 – 95.04 – CB051 - METODOS MATEMATICOS Y NUMERICOS**

**FACULTAD DE INGENIERIA  
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**

**Trabajo Práctico**

*1er. Cuatrimestre 2024*

**Resolución de Ecuaciones Diferenciales**

**“Modelo PVI del descenso del Rover Perseverance en Marte”**

Preparado por Federico Balzarotti



## Consideraciones generales del trabajo práctico

- El trabajo debe realizarse en grupos 4 a 5 personas. Trabajos entregados con menos de 4 personas o más de 5 no serán evaluados.
- El TP debe plasmarse en un informe escrito en formato de texto donde estén desarrollados todos los ítems pautados, gráficos, tablas, etc.
- Los cálculos podrán realizarse con Excel o cualquier otro software (Sugerencia: Python). Los archivos de código o planilla de cálculo NO SON PARTE DEL INFORME. Estos se deberán entregar en un archivo aparte y la única función es ayudar a verificar los cálculos obtenidos, que deberán estar explicitados en el informe. **Si se entregara únicamente un archivo Excel o un código de programación, la nota será insuficiente e implicará tener que recurrar la materia.**
- La entrega del informe es por campus en formato pdf. Si hiciera falta, ambos archivos (informe + código) se pueden comprimir en uno solo en caso que el campus no los acepte por límite de tamaño.
- Luego de la corrección existe una única instancia de re-entrega para los grupos que se les haya indicado corregir algún aspecto del trabajo. La fecha de re-entrega se pautará posteriormente a la corrección.

## Introducción

El 18 de Febrero de 2021 llegó al planeta Marte el último Rover de la NASA llamado *Perseverance*.

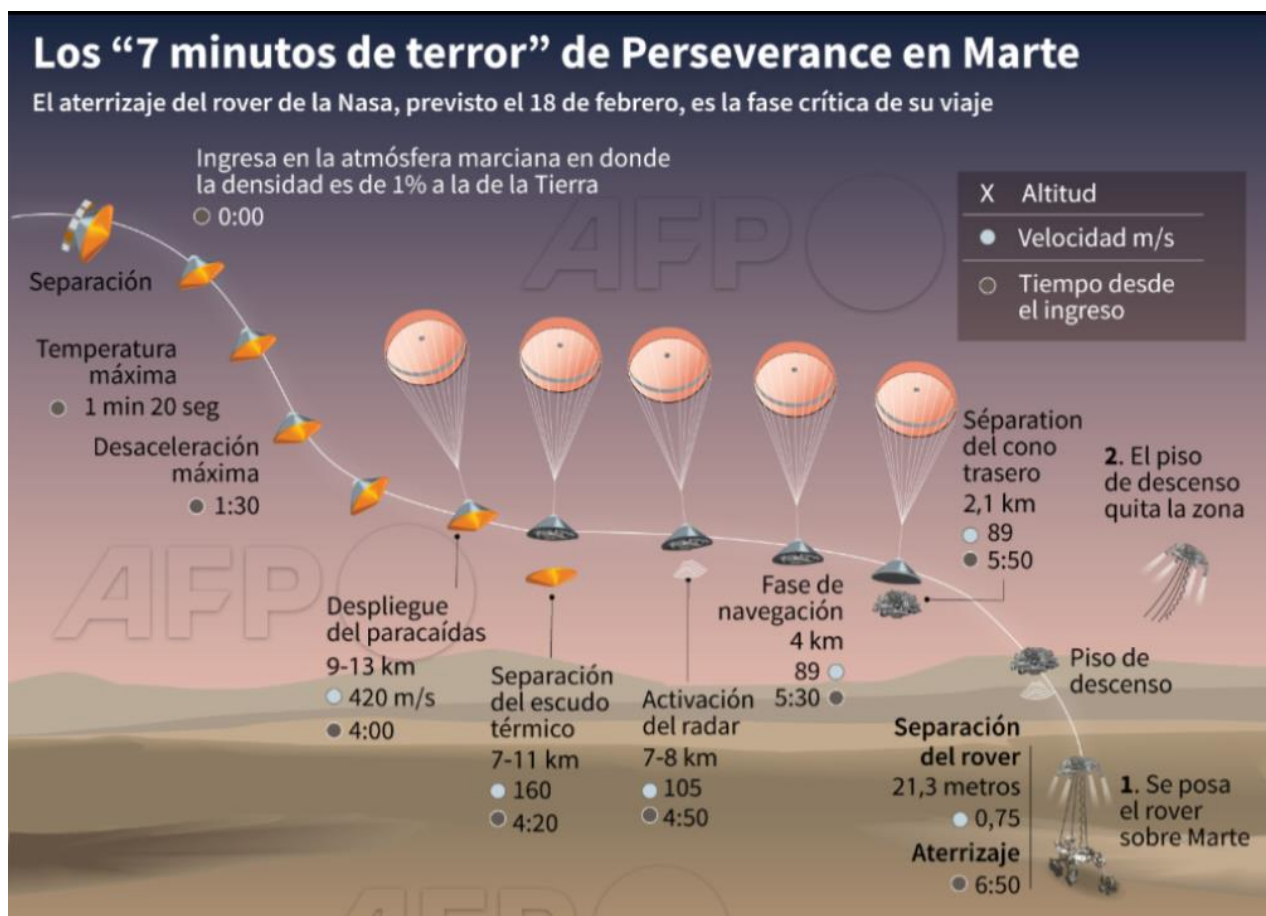
Su objetivo es explorar el Cráter Jezero como parte de la misión *Mars 2020* del Programa de Exploración de Marte de la NASA. Fue lanzado el 30 de julio de 2020 desde Cabo Cañaveral en Florida.

Actualmente, el *Perseverance* continúa desplazándose por la superficie del Cráter Jezero en búsqueda de agua y materia orgánica.

La capsula viajó durante 7 meses a 39000 km/h, para luego entrar en la atmosfera de Marte a 20000km/h. A partir de dicho momento, el descenso hasta la superficie debió realizarse con un sistema de control automático debido al retardo de comunicación entre planetas (aproximadamente 15 minutos).

El proceso de aterrizaje duró alrededor de 7 minutos (“7 minutos de Terror”) con 4 etapas básicas:

- I. Entrada de la cápsula en la atmosfera (~130km de altura)
- II. Apertura de un paracaídas supersónico (~13km de altura)
- III. Liberación del paracaídas y descenso con propulsores (~2km de altura)
- IV. Descenso con grúa (~20m).



Esquema del descenso del Perseverance - Los datos de la figura son descriptivos. No deben usarse para la resolución

Simulación del descenso completo:

<https://www.youtube.com/watch?v=rzmd7RouGrM>

Simulación con los detalles de cada etapa (y sub-etapa):

[https://eyes.nasa.gov/apps/mars2020/#/home?id=parachute\\_deploy&rate=0](https://eyes.nasa.gov/apps/mars2020/#/home?id=parachute_deploy&rate=0)

## Objetivo

Modelar el descenso de una partícula sometida a condiciones diversas y complejas durante su trayecto. Al querer emular de manera realista dichas condiciones, el planteo físico-matemático será de carácter no-lineal, decantando en la resolución de ecuaciones diferenciales por métodos numéricos.

## Modelo Físico

Un objeto en caída libre dentro de un fluido turbulento está sometido principalmente a la fuerza gravitatoria y a una fuerza de rozamiento. Aplicando la Segunda Ley de Newton acorde a la mecánica clásica:

$$M \frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} = -Mg + F_r \quad (1)$$

Donde  $M$  es la masa del cuerpo,  $y(t)$  es la altura en función del tiempo,  $g$  es la gravedad del planeta en cuestión y  $F_r$  es la fuerza de rozamiento. Los signos de la ecuación corresponden a una coordenada vertical con sentido positivo apuntando hacia arriba. Se asumirá una trayectoria rectilínea y radial desde la atmosfera hasta la superficie de Marte. Debido a las diversas etapas mencionadas en la introducción, la fuerza de rozamiento tendrá se comportará de manera diferente.

**ETAPA I.** Fuerza de rozamiento proporcional al cuadrado de la velocidad, al área  $A$  del objeto y a la densidad  $\rho$  del fluido atmosférico (95% de dióxido de carbono). La constante de proporcionalidad es un coeficiente de arrastre  $D$  (en inglés *Drag*), que depende de la forma del objeto frente al fluido en movimiento relativo.

$$F_r = DA\rho v^2 \quad (2)$$

Dado que el problema abarca grandes distancias, la densidad de la atmosfera se vuelve dependiente de la altura. Este comportamiento se modelará acorde a la siguiente relación:

$$\rho(y) = \rho_0 e^{-\frac{y}{\alpha}} \quad \text{donde } \alpha \text{ y } \rho_0 \text{ son constantes positivas}$$

Notar que  $\rho_0$  indicaría la densidad en la superficie del planeta. Al reemplazar (2) en (1) queda:

$$M \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -Mg + DA\rho_0 e^{-\frac{y}{\alpha}} v^2$$

Para simplificar la notación, llamaremos  $\beta = DA\rho_0$  quedando:  $M \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -Mg + \beta e^{-\frac{y}{\alpha}} v^2$

Expresando todo en términos matemáticos para la variable  $y$ :  $y'' = -g + \frac{1}{M}\beta e^{-\frac{y}{\alpha}} y'^2 \quad (3)$

La expresión (3) constituye una ecuación diferencial no lineal de segundo orden, con condiciones iniciales:

$$y(t=0) = H_0 = 130km = 130000m \quad y'(t=0) = v_0 = -20000 \frac{km}{h} = -5555 \frac{m}{s}$$

**ETAPA II.** Al alcanzar una altura de 13km,  $H_{ap} = 13000m$ , un paracaídas supersónico se abrirá cambiando completamente la ley de rozamiento anterior. Este nuevo comportamiento se modelará de la siguiente dependencia:

$$F_r = \eta y'^2$$

Donde  $\eta$  es un coeficiente que dependerá de la geometría del paracaídas. La ecuación diferencial a resolver para esta segunda etapa queda:

$$y'' = -g + \frac{\eta}{m} y'^2 \quad (4)$$

IMPORTANTE: la condición inicial de velocidad en esta etapa deberá coincidir con la final de la etapa anterior.

**ETAPA III.** Al alcanzar una altura de 2km,  $H_{lib} = 2000m$ , la cápsula se libera del paracaídas. El Rover seguirá cayendo pero ahora actuará una fuerza de propulsión hacia arriba para atenuar la velocidad de la capsula hasta detenerse a 20m de altura de la superficie (que denominaremos  $H_{grua} = 20m$ ). Esta fuerza dependerá de cierto caudal másico de combustible  $\dot{m}_c$  y de la velocidad efectiva de salida de las partículas  $v_e$  lograda con la combustión:

$$F_{propulsion} = \dot{m}_c v_e$$

La velocidad efectiva  $v_e$  dependerá principalmente de la química del combustible utilizado. Sobre esta situación habrá que tener en cuenta que el Rover tiene su propia velocidad respecto a la superficie. Este hecho afecta a la fuerza de propulsión, al tener que contemplar la velocidad de salida de las partículas respecto al Rover:

$$F_{propulsion} = \dot{m}_c (v_e - v) \quad \text{con } v = y'$$

Notar que cuando la velocidad  $v$  sea cero, la fuerza de propulsión compensará exactamente el peso y quedará en equilibrio. Para el sistema de coordenadas elegido  $v$  será siempre negativa, generando una fuerza de propulsión mayor al caso de reposo. La ecuación diferencial para esta etapa es la siguiente:

$$y'' = -g + \frac{1}{M} \dot{m}_c (v_e - y') \quad (5)$$

Para la situación final que se requiere lograr (reposo a 20m de altura), la ecuación diferencial deberá cumplir aceleración y velocidad nulas, es decir:

$$0 = -g + \frac{1}{M} \dot{m}_c (v_e - 0)$$

De esta forma, se podrá despejar un caudal de combustible  $\dot{m}_{c0} = Mg/v_e$ , necesario para sostener el Rover a 20m.

Sobre este esquema surge el siguiente problema: si se aplicara el caudal  $\dot{m}_{c0}$  de forma constante desde los 2km, no sería posible atenuar la velocidad. Sin embargo, sabemos que el vehículo posee sensores de posición y velocidad que permitirán implementar un caudal de combustible variable para llegar exactamente a  $H_{grua} = 20m$  con velocidad nula. Se propone la siguiente funcionalidad entre el caudal másico, la velocidad y la posición:

$$\dot{m}_c(y, v) = \dot{m}_{c0} - k_1(y - H_{grua}) - k_2 y' \quad (6)$$

Donde  $k_1$  y  $k_2$  son constantes positivas llamadas *ganancias*. Con ellas se podrá calibrar el sistema de control, volviéndolo más o menos reactivo frente al objetivo deseado. Para entender mejor la expresión, observar nuevamente que para  $y = H_{grua}$  y  $v = 0$ , el caudal coincide lógicamente con  $\dot{m}_{c0}$ .

Reemplazando (6) en (5) se obtiene la EDO final para esta etapa:

$$y'' = -g + \frac{1}{M} [\dot{m}_{c0} - k_1(y - H_{grua}) - k_2 y'] (v_e - y') \quad (7)$$

Un último detalle a tener en cuenta es que los propulsores apuntarán siempre hacia abajo, imposibilitando que el caudal  $\dot{m}_c$  sea negativo (esto implicaría propulsores hacia arriba). Por esta razón, si la expresión entre corchetes de la ecuación (7) resultara negativa, se debería imposter un caudal nulo.

Para simular numéricamente esta última etapa habrá que asignar valores a  $k_1$  y  $k_2$ . Se sugiere utilizar valores similares para ambas ganancias incluidos en el intervalo  $[10,100]$ . Luego, con el caudal  $\dot{m}_c(y, v)$  se podrá calcular la masa total de combustible que debe contener la cápsula.

De igual forma que antes, la condición inicial de velocidad de esta etapa deberá coincidir con final la etapa anterior.

**ETAPA IV:** El descenso desde la grúa hasta tocar la superficie no se modelará.

## Desarrollo del práctico

- Implementar el método de RK2 para resolver el descenso completo. Utilizar un paso  $h=0.01\text{seg}$ .
- Realizar dos gráficos. Uno de  $y(t)$  y otro  $v(t)$ . Cada uno deberá incluir las etapas I, II, y III. **Mostrar un gráfico debajo del otro**, donde el eje horizontal sea el tiempo y **con la misma escala en ambos**, con el objetivo de apreciar rápidamente la velocidad y posición para un mismo instante. La ESTETICA y CLARIDAD de la visualización son una parte altamente importante del trabajo.
- Realizar gráfico de  $y(t)$ ,  $v(t)$  y  $\dot{m}_c(t)$  en los cuales solamente se vea la etapa III. Al igual que el ítem b) mostrar un gráfico debajo del otro, donde el eje horizontal sea el tiempo y con la misma escala en los tres.
- La siguiente tabla deberá estar incluida en el informe en formato idéntico al indicado a continuación:
  - Valor elegido para  $k_1$ :
  - Valor elegido para  $k_2$ :

| VALOR PUNTUAL   | UNIDAD | Resultado con 3 dígitos significativos |
|---|--------|--|
| Tiempo en el que comienza la Etapa II (medido desde el inicio)  | [s]    |  |
| Velocidad al comienzo de la Etapa II  | [m/s]  |  |
| Tiempo en el que comienza la Etapa III (medido desde el inicio)   | [s]    |  |
| Velocidad al comienzo de la Etapa III   | [m/s]  |  |
| Tiempo total del descenso hasta llegar a $H_{grua} = 20m$ .<br>Considerar descenso completo cuando el módulo de la velocidad es 0.03m/s (o menor) | [s]    |  |
| La masa de combustible necesaria para lograr con éxito la Etapa III   | [kg]   |  |

\*\*Para calcular la masa de combustible necesaria debería integrarse el caudal en el tiempo. Dado que se dispondrá de valores de  $\dot{m}_c$  discretos, considerar que el caudal es constante entre 2 tiempos discretos consecutivos.

Las siguientes preguntas deberán responderse en no más de una carilla (en total):

- ¿Cuáles otras contemplaciones físicas podrían agregarse al modelo para aproximarlos mejor a la realidad? Mencionar 2 como mínimo.
- SOLO GRUPOS CON NUMERO IMPAR (SOLO RESPONDER GRUPOS 1,3,5..)  
Si se quisiera utilizar una masa de combustible de exactamente 200kg, explicar cómo procedería para calcular las ganancias  $k_1$  y  $k_2$  (no realizar el cálculo).
- SOLO GRUPOS CON NUMERO PAR (SOLO RESPONDER GRUPOS 2,4,6..)  
Si se quisiera minimizar la masa de combustible a utilizar, explicar cómo procedería para calcular las ganancias  $k_1$  y  $k_2$  (no realizar el cálculo).

h) Desarrolle conclusiones generales del trabajo práctico (máximo: media carilla). Deberá plasmarse una síntesis conceptual de lo aprendido en el trabajo práctico (no debe ser un resumen del desarrollo).

## Datos numéricos

La tabla a continuación indica los datos generales para desarrollar el trabajo práctico. Sin embargo, en cada grupo **se variarán algunos de estos datos generales**. Dichos datos particulares serán entregados por mail a cada grupo el día de la explicación del TP.

|            |                       |  |
|------------|-----------------------|--|
| $g$        | 3.72 m/s <sup>2</sup> | Gravedad en Marte  |
| $M$        | 1000kg                | Masa del Rover   |
| $H_0$      | 130000m               | Altura inicial del descenso                                  |
| $v_0$      | 20000 km/h            | Velocidad inicial de entrada a la atmosfera de Marte         |
| $\alpha$   | 250000                | Constante para el rozamiento con la atmosfera                |
| $\beta$    | 0.032                 | Constante para el rozamiento entre la capsula y la atmosfera |
| $H_{ap}$   | 13000m                | Altura de apertura del paracaídas                            |
| $\eta$     | 0.6                   | Constante para el rozamiento con el paracaídas               |
| $H_{lib}$  | 2000m                 | Altura de liberación del paracaídas                          |
| $v_e$      | 1000m/s               | Velocidad de escape de las partículas del propulsor          |
| $H_{grua}$ | 20m                   | Altura final (objetivo)                                      |

## Criterios orientativos para redactar el informe

Enfocarse en resolver lo que se pide y analizar los resultados obtenidos. Si hay algo que no es coherente en los resultados, mejor señalarlo.

No copiar el enunciado. Con redactar una breve síntesis es suficiente (media carilla).

Tiene que estar explicitada la discretización de la Ecuación diferencial. Si realizaron un código pueden extraer esa parte del código y pegarla prolijamente. La idea no es complicarse con el editor de ecuaciones.

Realizar los gráficos pedidos en base a la consigna. Es muy importante entender y acatar la consigna. Los gráficos deben tener una grilla equidistante con unidades en cada eje y colores que faciliten la rápida visualización y entendimiento.

Todos los resultados deberán estar analizados. Intente a la vez ser breve y conciso. Si se agregan tablas/gráficos y otros resultados, también deberán estar analizados.