

Versuch 27 - Der Zeeman-Effekt

**TU Dortmund, Fakultät Physik
Fortgeschrittenen-Praktikum**

Jan Adam

jan.adam@tu-dortmund.de

Dimitrios Skodras

dimitrios.skodras@tu-dortmund.de

07. März 2014

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	1
1.1	Drehimpulse und Magnetische Momente	1
1.2	Aufspaltung von Energieniveaus bei homogenem Magnetfeld	3
1.3	normaler und anormaler Zeeman-Effekt	5
2	Durchführung	6
3	Auswertung	6

1 Theorie

Der Zeeman-Effekt ist ein Phänomen, bei dem Energieniveaus von Hüllenelektronen, die in der Orientierungsquantenzahl m entartet sind, in Gegenwart eines äußeren, homogenen Magnetfelds aufgespalten werden. Ziel des Versuchs ist es, Größe und Anzahl dieser Aufspaltung zu ermitteln.

1.1 Drehimpulse und Magnetische Momente

Die Ursache des Effekts hängt mit den Drehimpulsen - Bahndrehimpuls \vec{l} und Spin \vec{s} - der Elektronen und den daraus resultierenden magnetischen Momenten zusammen. Die Lösung der Eigenwertgleichung liefert für die Drehimpulse folgende Werte, wobei \hbar das Plancksche Wirkungsquantum und n die Hauptquantenzahl ist

$$|\vec{l}| = \sqrt{l(l+1)}\hbar \quad \text{mit } l = 0, 1, \dots, n-1 \quad (1)$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{s(s+1)}\hbar \quad \text{mit } s = \frac{1}{2} \quad (2)$$

Das auf die die Drehimpulseinheit \hbar bezogene Magnetmoment ist das Bohrsche Magneton

$$\mu_B = -\frac{1}{2} \frac{e_0 \hbar}{m_0}, \quad (3)$$

mit e_0 als Elementarladung und m_0 als Elektronenmasse. Aus μ_B lässt sich das \vec{l} zugehörige magnetische Moment bestimmen zu

$$\vec{\mu}_l = -\mu_B \frac{\vec{l}}{\hbar} = -\mu_B \sqrt{l(l+1)} \mathbf{e}_l. \quad (4)$$

Da der Spin auch ein Drehimpuls ist, liegt der Schluss nahe, dass dieser auch ein magnetisches Moment besitzt

$$\vec{\mu}_s = -g_s \mu_B \frac{\vec{s}}{\hbar} = -g_s \mu_B \sqrt{s(s+1)} \mathbf{e}_s \quad (5)$$

Der Landé-Faktor des Elektrons g_s hat etwa den Wert 2 und führt zu einem doppelt so großen Wert für das magnetische Moment, wie das dem Bahndrehimpuls zugehörige magnetische Moment. Das wird magnetomechanische Anomalie des Elektrons genannt.

Die bisher genannten Zusammenhänge beziehen sich auf Eielektronensysteme und betrachten keine Wechselwirkung zwischen Spin und Bahndrehimpuls. Bei mehreren Elektronen und allgemeiner Betrachtung entstehen sehr komplexe Zusammenhänge. Daher werden nur zwei Grenzfälle betrachtet, deren Behandlung einfach ist. Bei geringen Kernladungszahlen Z führt die hohe Wechselwirkung der einzelnen Bahndrehimpulse \vec{l}_i zu

einem Gesamtbahndrehimpuls \vec{L} und einem zugehörigen magnetischen Moment.

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i \quad \text{mit } L = 0, 1, 2, 3 \quad (6)$$

Hierzu müssen nur unabgeschlossene Schalen berücksichtigt werden, da Gesamtdrehimpulse abgeschlossener Schalen stets null sind. Analog zum Gesamtbahndrehimpuls lässt sich ein Gesamtspin \vec{S} bestimmen, mit N als Gesamtzahl der Elektronen auf nichtabgeschlossenen Schalen

$$\vec{S} = \sum_i \vec{s}_i \quad \text{mit } S = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1, \dots, \frac{1}{2}, 0 \quad (7)$$

In Abwesenheit starker Magnetfelder addieren Gesamtbahndrehimpuls und Gesamtspin zum Gesamtdrehimpuls \vec{J} , was LS-Kopplung oder Russel-Saunders-Kopplung bezeichnet wird.

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad (8)$$

Der zweite Grenzfall beschreibt die Wechselwirkung bei hohen Kernladungszahlen und wird j-j-Kopplung genannt. Hier ist die Kopplung von \vec{l} und \vec{s} eines einzelnen Elektrons entscheidender, als die Wechselwirkungen der Drehimpulse mit ihren Äquivalenten anderer Elektronen. Entsprechend bildet sich der Gesamtdrehimpuls \vec{J} nicht aus summierten Spin und Bahndrehimpuls, sondern aus den einzelnen Gesamtdrehimpulsen \vec{j}_i der einzelnen Elektronen selbst

$$\vec{J} = \sum_i \vec{j}_i. \quad (9)$$

Zwischen den Grenzfällen großer und kleiner Ordnungszahlen besteht ein fließender Übergang. Das \vec{J} zugehörige magnetische Moment μ_j wird wie \vec{J} nach (8) selbst aus Spin und Bahndrehimpuls errechnet

$$\vec{\mu}_j = \vec{\mu}_s + \vec{\mu}_l. \quad (10)$$

Da \vec{J} nicht zwingend parallel zu $\vec{\mu}_j$ ist, kann man sich einen parallelen und senkrechten Teil von $\vec{\mu}_j$ generieren. Die senkrechte Komponente wird dabei null, was unter klassischer Betrachtung einer Präzession um die von außen vorgegebene Richtung gleich kommt, die im zeitlichen Mittel verschwindet. In (10) die magnetischen Momente eingesetzt führt zu folgender Form

$$\vec{\mu}_J \approx \mu_B \sqrt{J(J+1)} \underbrace{\frac{3J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}}_{g_J} = \mu_B \sqrt{J(J+1)} g_J, \quad (11)$$

mit g_J als Landé-Faktor des betreffenden Atoms.

Die im Weiteren benötigte Richtungsquantelung ist ein quantenmechanisches Phänomen, das nur Winkel zwischen μ_J und einem äußeren Magnetfeld $\vec{B} = B\mathbf{e}_z$ auftreten können, wenn die Parallelkomponente ein ganzzahliges Vielfaches von $g_J\mu_B$ ist

$$\mu_{J_z} = -mg_J\mu_B, \quad (12)$$

mit m als eingangs erwähnte Orientierungsquantenzahl, deren Wert sich ganzzahlig nur zwischen $-J$ und J bewegen kann.

1.2 Aufspaltung von Energieniveaus bei homogenem Magnetfeld

Mit der Vorarbeit aus Abschnitt 1.1 ist man nun in der Lage, die Zusatzenergie E_{mag} zu berechnen, die ein Moment $\vec{\mu}$ im äußeren Magnetfeld \vec{B} hinzugewinnt. Allgemein lässt sich sagen, dass

$$E_{\text{mag}} = -\vec{\mu}_J \circ \vec{B} = mg_J\mu_B B. \quad (13)$$

Hieran sieht man, dass für $B \neq 0$ das Energieniveau E_0 in $2J + 1$ äquidistante Niveaus auf, wie in Abbildung 1

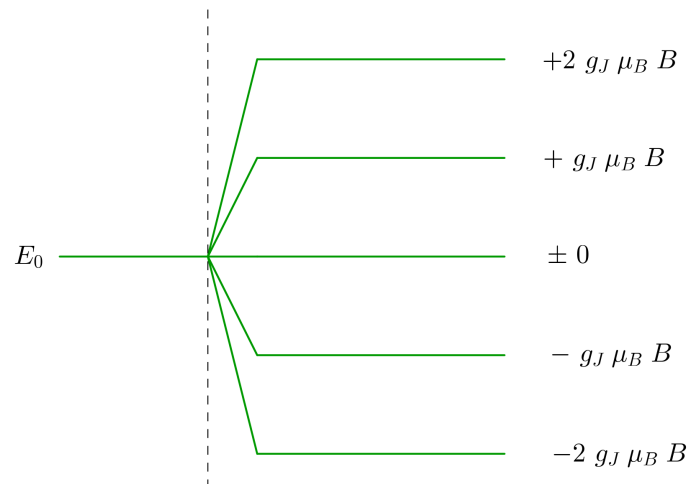


Abbildung 1: Schematische Aufspaltung eines Energieniveaus im Magnetfeld mit $J = 2$

Zwischen den hinzukommenden Energieniveaus ist es nun möglich, dass Übergänge auftreten. Dieser Effekt wird als Zeeman-Effekt bezeichnet. Die Anzahl dieser Linien hängt davon ab, welche Übergänge überhaupt möglich sind, ob es also Auswahlregeln gibt, die den Übergang festlegen.

Um sie zu ermitteln, wird die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V \right) \psi(\vec{r}, t) \quad (14)$$

mit den Lösungen

$$\psi_1(\vec{r}, t) = \psi_1(\vec{r}) \exp(-i \frac{E_\alpha}{\hbar} t) \quad (15)$$

betrachtet, mit Δ als Laplace-Operator, V als ein Potenzial, E_i als Energieeigenwert und $\psi_i(\vec{r}, t)$ als Wellenfunktion, die von den Quantenzahlen n_i, l_i und m_i abhängt. Eine weitere Lösung von (14) $\psi_2(\vec{r}, t)$ mit entsprechenden Quantenzahlen soll existieren. Beide Lösungen bilden eine Linearkombination

$$\Psi(\vec{r}, t) = C_1 \psi_1(\vec{r}, t) + C_2 \psi_2(\vec{r}, t), \quad (16)$$

die ebenfalls eine Lösungen der Schrödingergleichung ist und $C_i \in \mathbb{C}$. Aus der Berechnung der zeitabhängigen Dichteverteilung $\rho = \int \Psi^* \Psi \, dV$ ergibt sich, dass sie Schwingungen von Elektronen mit der Frequenz

$$\nu_{12} = \frac{E_1 - E_2}{h} \quad (17)$$

beschreibt. Die damit verbundene Strahlungsintensität fordert ein Dipolmoment des schwingendne Elektrons, welches Komponenten in alle Raumrichtungen hat. Diese berechnen sich zu

$$D_\alpha = -e_0 \int \alpha \Psi^* \Psi \, dV \quad \text{mit } \alpha = x, y, z. \quad (18)$$

Hier wird die Komponente α eines beliebig orientierten Dipols mit Frequenz ν_{12} beschrieben. Die hierin auftretenden Ausdrücke

$$\alpha_{12} = \int \alpha \psi_1^* \psi_2 \quad (19)$$

werden Matrixelemente genannt, die für die Berechnung der Strahlungsintensität über den Poynting-Vektor \vec{S}_{12} entscheidend sind

$$|\vec{S}_{12}| \sim \left[\sum_\alpha |\alpha_{12}| \right] \sin^2 \gamma. \quad (20)$$

Errechnet werden die Elemente durch den kugelsymmetrischen Ansatz der Wellenfunktionen und die Tranformation in Kugelkoordinaten

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} R(r) \Theta(\vartheta) \, \mathbf{e}^{im\varphi} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (21)$$

Nach Einsetzen in (19) folgen die Auswahlregeln

$$m_2 = m_1, \quad m_2 = m_1 \pm 1 \quad (22)$$

Folglich gibt es drei Konfigurationen, bei denen ein Übergang auftreten kann. Nun werden die Eigenschaften dieser Übergänge untersucht. Für $\Delta m = 0$ ist die Richtung des Dipols parallel zur Magnetfeldrichtung. Die Winkelabhängigkeit aus (20) bedingt, dass nicht in Feldrichtung abgestrahlt wird. Die Emission ist senkrecht zum Magnetfeld maximal, was bedeutet, dass diese Strahlung zu \vec{B} parallel linear polarisiert ist. Betrachtungen von $\Delta m = \pm 1$ beschreiben um die Magnetfeldrichtung zirkularpolarisierte Schwingung mit jeweiliger Drehrichtung.

1.3 normaler und anormaler Zeeman-Effekt

Die Einschränkung, dass (14) nicht den Elektronenspin enthält bedingt, dass die Ergebnisse nur für den Spezialfall $S = 0$ gelten. Dies nennt man den normalen Zeeman-Effekt. Es folgt, dass g_J nach (11) 1 für alle J ist und daher von den Quantenzahlen unabhängig ist. Daher gilt für die Verschiebung der Energieniveaus

$$\Delta E = m\mu_B B \quad \text{mit} \quad -J \leq m \leq J. \quad (23)$$

2 Durchführung

3 Auswertung

Literatur