

Versuch 27 - Der Zeeman-Effekt

**TU Dortmund, Fakultät Physik
Fortgeschrittenen-Praktikum**

Jan Adam

jan.adam@tu-dortmund.de

Dimitrios Skodras

dimitrios.skodras@tu-dortmund.de

07. März 2014

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	1
1.1	Drehimpulse und Magnetische Momente	1
1.2	Aufspaltung von Energieniveaus bei homogenem Magnetfeld	3
1.3	normaler und anormaler Zeeman-Effekt	5
2	Durchführung	6
3	Auswertung	8
4	Diskussion	10

1 Theorie

Der Zeeman-Effekt ist ein Phänomen, bei dem Energieniveaus von Hüllenelektronen, die in der Orientierungsquantenzahl m entartet sind, in Gegenwart eines äußeren, homogenen Magnetfelds aufgespalten werden. Ziel des Versuchs ist es, Größe und Anzahl dieser Aufspaltung zu ermitteln.

1.1 Drehimpulse und Magnetische Momente

Die Ursache des Effekts hängt mit den Drehimpulsen - Bahndrehimpuls \vec{l} und Spin \vec{s} - der Elektronen und den daraus resultierenden magnetischen Momenten zusammen. Die Lösung der Eigenwertgleichung liefert für die Drehimpulse folgende Werte, wobei \hbar das Plancksche Wirkungsquantum und n die Hauptquantenzahl ist

$$|\vec{l}| = \sqrt{l(l+1)}\hbar \quad \text{mit } l = 0, 1, \dots, n-1 \quad (1)$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{s(s+1)}\hbar \quad \text{mit } s = \frac{1}{2} \quad (2)$$

Das auf die die Drehimpulseinheit \hbar bezogene Magnetmoment ist das Bohrsche Magneton

$$\mu_B = -\frac{1}{2} \frac{e_0 \hbar}{m_0}, \quad (3)$$

mit e_0 als Elementarladung und m_0 als Elektronenmasse. Aus μ_B lässt sich das \vec{l} zugehörige magnetische Moment bestimmen zu

$$\vec{\mu}_l = -\mu_B \frac{\vec{l}}{\hbar} = -\mu_B \sqrt{l(l+1)} \mathbf{e}_l. \quad (4)$$

Da der Spin auch ein Drehimpuls ist, liegt der Schluss nahe, dass dieser auch ein magnetisches Moment besitzt

$$\vec{\mu}_s = -g_s \mu_B \frac{\vec{s}}{\hbar} = -g_s \mu_B \sqrt{s(s+1)} \mathbf{e}_s \quad (5)$$

Der Landé-Faktor des Elektrons g_s hat etwa den Wert 2 und führt zu einem doppelt so großen Wert für das magnetische Moment, wie das dem Bahndrehimpuls zugehörige magnetische Moment. Das wird magnetomechanische Anomalie des Elektrons genannt.

Die bisher genannten Zusammenhänge beziehen sich auf Eielektronensysteme und betrachten keine Wechselwirkung zwischen Spin und Bahndrehimpuls. Bei mehreren Elektronen und allgemeiner Betrachtung entstehen sehr komplexe Zusammenhänge. Daher werden nur zwei Grenzfälle betrachtet, deren Behandlung einfach ist. Bei geringen Kernladungszahlen Z führt die hohe Wechselwirkung der einzelnen Bahndrehimpulse \vec{l}_i zu

einem Gesamtbahndrehimpuls \vec{L} und einem zugehörigen magnetischen Moment.

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i \quad \text{mit } L = 0, 1, 2, 3 \quad (6)$$

Hierzu müssen nur unabgeschlossene Schalen berücksichtigt werden, da Gesamtdrehimpulse abgeschlossener Schalen stets null sind. Analog zum Gesamtbahndrehimpuls lässt sich ein Gesamtspin \vec{S} bestimmen, mit N als Gesamtzahl der Elektronen auf nichtabgeschlossenen Schalen

$$\vec{S} = \sum_i \vec{s}_i \quad \text{mit } S = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1, \dots, \frac{1}{2}, 0 \quad (7)$$

In Abwesenheit starker Magnetfelder addieren Gesamtbahndrehimpuls und Gesamtspin zum Gesamtdrehimpuls \vec{J} , was LS-Kopplung oder Russel-Saunders-Kopplung bezeichnet wird.

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad (8)$$

Der zweite Grenzfall beschreibt die Wechselwirkung bei hohen Kernladungszahlen und wird j-j-Kopplung genannt. Hier ist die Kopplung von \vec{l} und \vec{s} eines einzelnen Elektrons entscheidender, als die Wechselwirkungen der Drehimpulse mit ihren Äquivalenten anderer Elektronen. Entsprechend bildet sich der Gesamtdrehimpuls \vec{J} nicht aus summierten Spin und Bahndrehimpuls, sondern aus den einzelnen Gesamtdrehimpulsen \vec{j}_i der einzelnen Elektronen selbst

$$\vec{J} = \sum_i \vec{j}_i. \quad (9)$$

Zwischen den Grenzfällen großer und kleiner Ordnungszahlen besteht ein fließender Übergang. Das \vec{J} zugehörige magnetische Moment μ_j wird wie \vec{J} nach (8) selbst aus Spin und Bahndrehimpuls errechnet

$$\vec{\mu}_j = \vec{\mu}_s + \vec{\mu}_l. \quad (10)$$

Da \vec{J} nicht zwingend parallel zu $\vec{\mu}_j$ ist, kann man sich einen parallelen und senkrechten Teil von $\vec{\mu}_j$ generieren. Die senkrechte Komponente wird dabei null, was unter klassischer Betrachtung einer Präzession um die von außen vorgegebene Richtung gleich kommt, die im zeitlichen Mittel verschwindet. In (10) die magnetischen Momente eingesetzt führt zu folgender Form

$$\vec{\mu}_J \approx \mu_B \sqrt{J(J+1)} \underbrace{\frac{3J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}}_{g_J} = \mu_B \sqrt{J(J+1)} g_J, \quad (11)$$

mit g_J als Landé-Faktor des betreffenden Atoms.

Die im Weiteren benötigte Richtungsquantelung ist ein quantenmechanisches Phänomen, das nur Winkel zwischen μ_J und einem äußeren Magnetfeld $\vec{B} = B\mathbf{e}_z$ auftreten können, wenn die Parallelkomponente ein ganzzahliges Vielfaches von $g_J\mu_B$ ist

$$\mu_{J_z} = -mg_J\mu_B, \quad (12)$$

mit m als eingangs erwähnte Orientierungsquantenzahl, deren Wert sich ganzzahlig nur zwischen $-J$ und J bewegen kann.

1.2 Aufspaltung von Energieniveaus bei homogenem Magnetfeld

Mit der Vorarbeit aus Abschnitt 1.1 ist man nun in der Lage, die Zusatzenergie E_{mag} zu berechnen, die ein Moment $\vec{\mu}$ im äußeren Magnetfeld \vec{B} hinzugewinnt. Allgemein lässt sich sagen, dass

$$E_{\text{mag}} = -\vec{\mu}_J \circ \vec{B} = mg_J\mu_B B. \quad (13)$$

Hieran sieht man, dass für $B \neq 0$ das Energieniveau E_0 in $2J + 1$ äquidistante Niveaus auf, wie in Abbildung 1

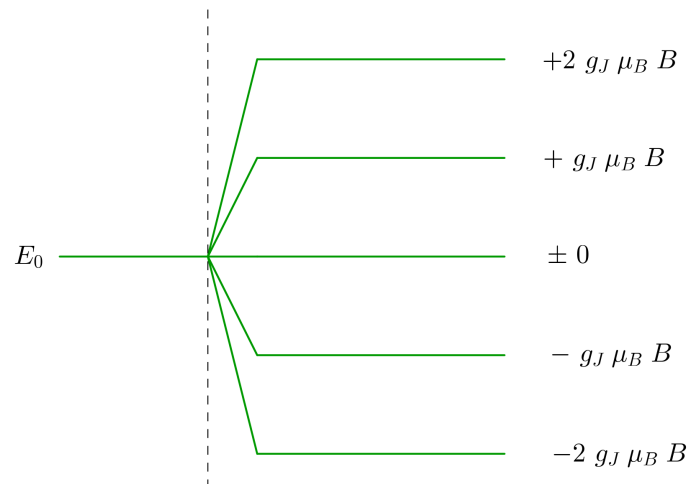


Abbildung 1: Schematische Aufspaltung eines Energieniveaus im Magnetfeld mit $J = 2$

Zwischen den hinzukommenden Energieniveaus ist es nun möglich, dass Übergänge auftreten. Dieser Effekt wird als Zeeman-Effekt bezeichnet. Die Anzahl dieser Linien hängt davon ab, welche Übergänge überhaupt möglich sind, ob es also Auswahlregeln gibt, die den Übergang festlegen.

Um sie zu ermitteln, wird die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V \right) \psi(\vec{r}, t) \quad (14)$$

mit den Lösungen

$$\psi_1(\vec{r}, t) = \psi_1(\vec{r}) \exp(-i \frac{E_\alpha}{\hbar} t) \quad (15)$$

betrachtet, mit Δ als Laplace-Operator, V als ein Potenzial, E_i als Energieeigenwert und $\psi_i(\vec{r}, t)$ als Wellenfunktion, die von den Quantenzahlen n_i, l_i und m_i abhängt. Eine weitere Lösung von (14) $\psi_2(\vec{r}, t)$ mit entsprechenden Quantenzahlen soll existieren. Beide Lösungen bilden eine Linearkombination

$$\Psi(\vec{r}, t) = C_1 \psi_1(\vec{r}, t) + C_2 \psi_2(\vec{r}, t), \quad (16)$$

die ebenfalls eine Lösungen der Schrödingergleichung ist und $C_i \in \mathbb{C}$. Aus der Berechnung der zeitabhängigen Dichteverteilung $\rho = \int \Psi^* \Psi \, dV$ ergibt sich, dass sie Schwingungen von Elektronen mit der Frequenz

$$\nu_{12} = \frac{E_1 - E_2}{h} \quad (17)$$

beschreibt. Die damit verbundene Strahlungsintensität fordert ein Dipolmoment des schwingendne Elektrons, welches Komponenten in alle Raumrichtungen hat. Diese berechnen sich zu

$$D_\alpha = -e_0 \int \alpha \Psi^* \Psi \, dV \quad \text{mit } \alpha = x, y, z. \quad (18)$$

Hier wird die Komponente α eines beliebig orientierten Dipols mit Frequenz ν_{12} beschrieben. Die hierin auftretenden Ausdrücke

$$\alpha_{12} = \int \alpha \psi_1^* \psi_2 \quad (19)$$

werden Matrixelemente genannt, die für die Berechnung der Strahlungsintensität über den Poynting-Vektor \vec{S}_{12} entscheidend sind

$$|\vec{S}_{12}| \sim \left[\sum_\alpha |\alpha_{12}| \right] \sin^2 \gamma. \quad (20)$$

Errechnet werden die Elemente durch den kugelsymmetrischen Ansatz der Wellenfunktionen und die Tranformation in Kugelkoordinaten

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} R(r) \Theta(\vartheta) \, e^{im\varphi} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (21)$$

Nach Einsetzen in (19) folgen die Auswahlregeln

$$m_2 = m_1, \quad m_2 = m_1 \pm 1 \quad (22)$$

Folglich gibt es drei Konfigurationen, bei denen ein Übergang auftreten kann. Nun werden die Eigenschaften dieser Übergänge untersucht. Für $\Delta m = 0$ ist die Richtung des Dipols parallel zur Magnetfeldrichtung. Die Winkelabhängigkeit aus (20) bedingt, dass nicht in Feldrichtung abgestrahlt wird. Die Emission ist senkrecht zum Magnetfeld maximal, was bedeutet, dass diese Strahlung zu \vec{B} parallel linear polarisiert ist. Betrachtungen von $\Delta m = \pm 1$ beschreiben um die Magnetfeldrichtung zirkularpolarisierte Schwingung mit jeweiliger Drehrichtung.

1.3 normaler und anormaler Zeeman-Effekt

Die Einschränkung, dass (14) nicht den Elektronenspin enthält, bedingt, dass die Ergebnisse nur für den Spezialfall $S = 0$ gelten. Dies nennt man den normalen Zeeman-Effekt. Es folgt, dass g_J nach (11) 1 für alle J ist und daher von den Quantenzahlen unabhängig ist. Daher gilt für die Verschiebung der Energieniveaus

$$\Delta E = m\mu_B B \quad \text{mit} \quad -J \leq m \leq J. \quad (23)$$

Wie man Abbildung 2 entnehmen kann, sind effektiv nur drei Linien zu beobachten. Übergänge mit gleichem Δm sind energetisch identisch.

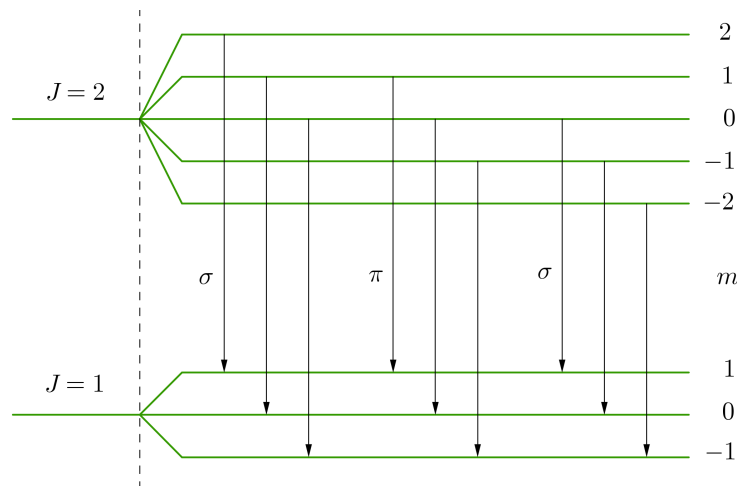


Abbildung 2: Aufspaltung und Polarisierung beim Normalen Zeemaneffekt

Die Polarisierung bedingt, dass die emittierte Strahlung nicht in allen Beobachtungsrichtungen erkannt wird. Übergänge mit Δm haben im Vergleich zum Fall ohne ein Magnetfeld keine Energieänderung. Daher ist wie bereits gezeigt linear polarisiert und wird π -Komponente bezeichnet. Sie wird daher nur transversal zur Feldrichtung beobachtet. Die anderen beiden Komponenten werden mit σ bezeichnet und sind zirkular polarisiert und erscheinen bei transversaler Beobachtung linear polarisiert.

Der verallgemeinerte Zeeman-Effekt ist der mit $S \neq 0$ und wird anormaler Zeeman-Effekt genannt. Aus der spinabhängigen Schrödinger-Gleichung ergeben sich dieselben

Auswahlregeln. Relativ zur feldfreien Energie ergibt sich hier bei Übergängen zwischen zwei Niveaus folgende Energiedifferenz

$$\Delta E = [m_1 g(L_1, S_1, J_1) - m_2 g(L_2, S_2, J_2)] \mu B \quad (24)$$

Der Landé-Faktor hängt hier von den Drehimpulsen ab, sodass die Aufspaltung linienreicher wird, was beispielhaft an einem Alkali-Dublett in Abbildung 3 dargestellt ist.

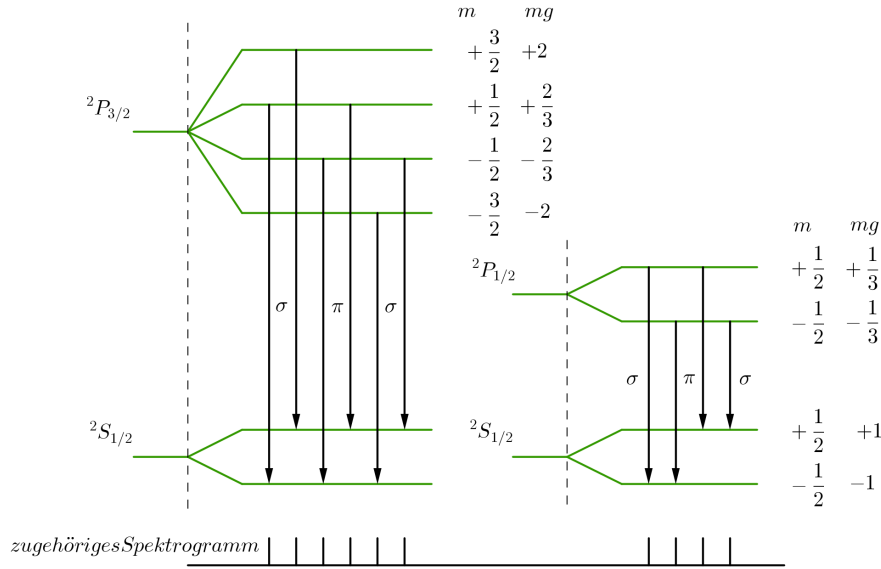


Abbildung 3: Aufspaltung und Polarisation beim Anormalen Zeemaneffekt

2 Durchführung

Die Lichtquelle mit roter Linie (normaler Zeeman-Effekt) und blauer Linie (anormaler Zeeman-Effekt) ist eine Cd-Lampe, die zwischen die Polschuhe eines Elektromagneten gebracht wird. Die Emissionslinien werden kollimiert und vom Geradsichtprisma nach Wellenlänge separiert. Polarisationsfilter und Spalt werden je nach untersuchtem Übergang ausgesucht und der Strahl auf die Eintrittsfläche einer Lummer-Gehrke Platte abgebildet. Das hierdurch entstehende Interferenzmuster wird mit einer Digitalkamera aufgenommen. Den schematischen Aufbau kann man Abbildung 4 entnehmen.

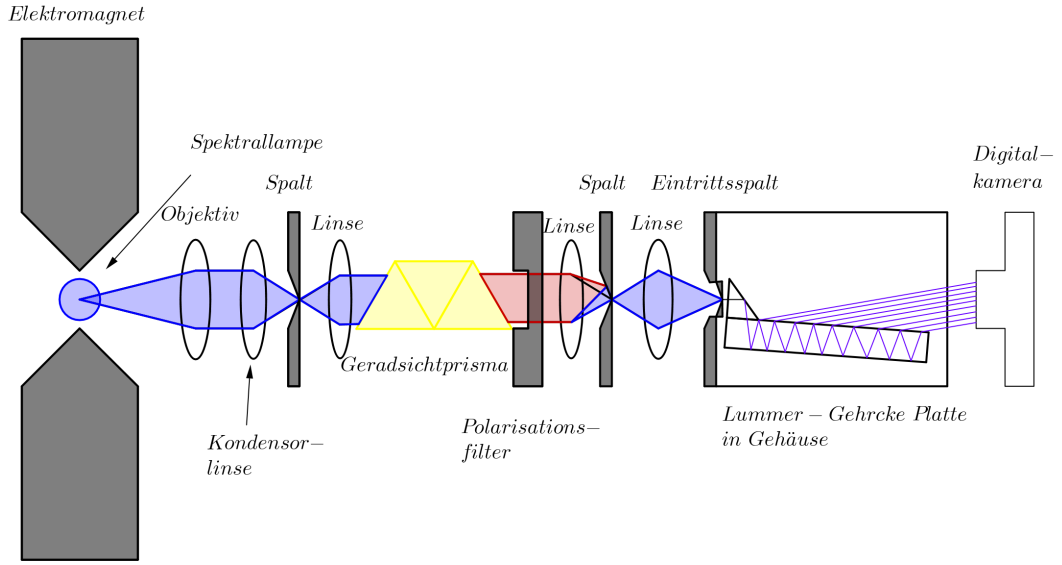


Abbildung 4: Draufsicht des schematischen Versuchsaufbaus

Die Lummer-Gehrcke Platte nutzt zur hohen Auflösung (10^5) Interferenz an planparallelen Platten. Ein internes Prisma sorgt dafür, dass das Licht innerhalb der planparallelen Platten reflektiert wird. Die Reflexion ist nicht vollständig, sodass bei jeder Reflexion auch ein Teil transmittiert wird, der mit anderen transmittierten Strahlen nach der Bragg-Bedingung interferieren kann, wobei d die Plattendicke, λ die Wellenlänge, n die Ordnung und ϑ der Einfallswinkel zum Plattenlot ist.

$$2d \cos(\vartheta) = n\lambda \quad (25)$$

Der Gangunterschied der Interferenzstreifen beträgt die eingestrahlte Wellenlänge λ . Bei Anwesenheit eines Magnetfelds ändert sich die Wellenlänge um $\delta\lambda$, was zu einer Verschiebung der Streifen um δs zufolge hat. Das Dispersionsgebiet ist die Differenz, die zwei Wellenlängen haben müssen, damit sie interferieren können.

$$\Delta\lambda_D = \frac{\lambda^2}{2d} \sqrt{\frac{1}{n^2 - 1}} \quad (26)$$

$$\Delta\lambda = \frac{1}{2} \frac{\Delta s}{s} \Delta\lambda_D \quad (27)$$

Das Auflösungsvermögen A hängt von der Länge der Lummer-Gehrcke Platte L , dem Brechungsindex n und der Wellenlänge λ ab

$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{L}{\lambda} (n^2 - 1). \quad (28)$$

Zu Beginn wird der Elektromagnet geeicht, indem die magnetische Flussdichte B in Abhängigkeit des Feldstroms I gemessen wird. Für geeignete Magnetfelder sollen nun die Wellenlängenaufspaltungen für verschiedene Ordnungen der roten ($= 643,8 \text{ nm}$) und der blauen ($= 480,0 \text{ nm}$) Linie des Cd-Spektrums gemessen werden. Dazu wird die Apparatur optimal entsprechend Abbildung 4 aufgebaut, sodass die Intensität bestmöglich aufrecht erhalten und scharfe Abbildungen entstehen können.

3 Auswertung

Nachdem die Apparatur korrekt eingestellt wurde, werden mit der Kamera bei verschiedenen Magnetfeld-Stärken bilder aufgenommen. Bei den folgenden Bildern handelt es sich um Gegenüberstellungen von Aufnahmen mit Feld (unten) und ohne Feld (oben), so dass die Aufspaltung der Linien gut sichtbar wird.

Für die Analyse wird anschließend der Abstand zwischen den Spektrallinien im feldfreien Fall ΔS und im Falle eines angelegten Magnetfeldes δS in Pixeln gemessen. Mittels Gleichungen (26) und (27) kann dann schließlich der g-Faktor bestimmt werden.

Ordnung	ΔS [Pixel]	δS [Pixel]	$\delta\lambda$ [pm]	$\delta\nu$ [10^{18}Hz]	g
1	123	69	13,72	21,87	1,124
2	111	58	12,78	23,48	1,047
3	106	58	13,38	22,42	1,097
4	96	50	12,74	23,55	1,044
5	94	50	13,01	23,06	1,066
6	83	51	15,03	19,96	1,231
7	79	41	12,69	23,64	1,040
8	80	41	12,53	23,94	1,027
9	75	43	14,02	21,40	1,149
10	73	41	13,74	21,84	1,126

Tabelle 1: Messwerte aufgenommen für rotes (648,3nm) Licht und den σ -Übergang bei 633mT

Bei dem roten Licht gibt es nur für den σ -Übergang eine Aufspaltung der Spektrallinien. Für den π -Übergang ist somit $g=0$. Mit den Werten aus Tabelle 1 werden Mittelwert und Standardabweichung des σ -Übergangs bestimmt:

$$g_{\text{rot},\sigma} = 1,095 \pm 0,064$$

Für das blaue Licht lässt sich mit den Werten aus Tabelle 2 Mittelwert und Standardabweichung für den σ -Übergang bestimmen:

$$g_{\text{blau},\sigma} = 2,069 \pm 0,130$$

Ordnung	ΔS [Pixel]	δS [Pixel]	$\delta\lambda$ [pm]	$\delta\nu$ [10^{18}Hz]	g
1	98	47	6,46	46,42	1,861
2	91	50	7,40	40,52	2,133
3	90	45	6,74	44,52	1,941
4	80	42	7,08	42,40	2,038
5	77	43	7,53	39,86	2,168
6	72	41	7,67	39,09	2,210
7	66	38	7,76	38,67	2,235
8	68	39	7,73	38,82	2,226
9	64	36	7,58	39,58	2,183
10	60	31	6,96	43,09	2,005
11	57	29	6,86	43,76	1,975
12	57	28	6,62	45,32	1,907
13	56	29	6,98	42,99	2,010

Tabelle 2: Messwerte aufgenommen für blaues (480nm) Licht und den σ -Übergang bei 323mT

Ordnung	ΔS [Pixel]	δS [Pixel]	$\delta\lambda$ [pm]	$\delta\nu$ [10^{18}Hz]	g
1	101	45	6,004	49,97	0,546
2	94	47	6,738	44,52	0,613
3	91	49	7,256	41,34	0,660
4	79	45	7,676	39,08	0,698
5	74	47	8,559	35,05	0,778
6	72	46	8,610	34,84	0,783
7	66	45	9,188	32,65	0,836
8	69	45	8,789	34,13	0,799
9	62	44	9,564	31,37	0,870
10	60	44	9,882	30,36	0,899
11	58	43	9,991	30,03	0,909
12	58	47	10,92	27,47	0,993
13	57	44	10,40	28,84	0,946
14	55	41	10,05	29,86	0,914
15	52	44	11,40	26,31	1,037
16	52	41	10,63	28,23	0,966
17	48	40	11,23	26,71	1,021

Tabelle 3: Messwerte aufgenommen für blaues (480nm) Licht und den π -Übergang bei 1023mT

Und für den π -Übergang mit den Werten aus Tabelle 3 ergibt sich:

$$g_{\text{blue},\pi} = 0,839 \pm 0,145$$

4 Diskussion

Im Vergleich zu den Literaturwerten werden zu den im Versuch aufgenommenen Werten folgende Abweichungen sichtbar:

Bei der σ -Aufspaltung der blauen Linie muss dabei berücksichtigt werden, dass der Wert des theoretischen g-Faktors zwei Werte annehmen kann (siehe Tabelle 2). Da beide Übergänge gleich wahrscheinlich sind, wird hier der Mittelwert der beiden theoretischen Werte gebildet und als Vergleichswert benutzt.

Wie anhand der prozentualen Abweichung erkennbar ist, stimmt der errechnete Wert für die rote Spektrallinie sehr gut mit dem theoretischen überein.

Bei der blauen Linie gibt es jedoch