1. 判断下列集合在指定运算下是否成群?

(1) G 为全体整数,运算为数的减法;

(2) G 为全体正整数,运算为数的乘法;

(3) G 为全体正有理数,运算为数的乘法;

(4) G 为全体正实数,运算为数的乘法;

(5) G 为数域 F 上 $n\times n$ 矩阵全体,运算为矩阵的乘法.

提示：(1)不是; (2)不是; (3)是; (4)是; (5)不是.

2. 非零实数集R^*对运算:$a\circ b = 2ab,a,b\in R^*$是否作成一个群？说明理由.

提示：能，$\frac{1}{2}$是R^*的单位元. R^*中任意元 a 的逆元是$\frac{1}{4a}$.

3. 设 G 是一个群，而 k 是 G 中任意一个固定的元素.

证明：G 对新运算 $a\circ b = akb$ 也作成一个群.

提示：新运算是 G 的代数运算.结合律成立.k^{-1}是 G 的左单位元. $(kak)^{-1}$是 G 中 a 的左逆元.

4. 设 $G = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a,b\in R, a^2+b^2\neq 0\right\}$.

证明 G 对方阵的普通乘法作成一个群.

提示:易得方阵的普通乘法是 G 的代数运算且满足结合律.G 的单位元为$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$的逆元是$\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

5. 非零实数集R^*对运算:$a\circ b = |ab|,a,b\in R^*$是否作成一个群?说明理由.

提示：不能,因为 $1,-1\in R^*$,但方程 $1\circ x = -1$ 在R^*中无解.

6. 如果群 G 的每个元素都满足方程$x^2 = e$，则 G 必为交换群.

提示：任取 $a,b\in G,(ab)(ab) = (ab)^2 = e$.

另一方面: $(ab)(ba) = ab^2a = aea = a^2 = e$.利用消去律即得.

7.设 H 是群 G 的子群,$a \in G$,证明:$aHa^{-1} = \{aha^{-1} | h \in H\}$也是群 G 的子群(称为 H 的一个共轭子群).

提示:显然,aHa^{-1}是 G 的非空子集.设$b_1, b_2 \in aHa^{-1}$.于是,存在$h_1, h_2 \in H$,使得 $b_1 = ah_1a^{-1}$,$b_1 = ah_2a^{-1}$.因此

$$b_1b_2^{-1} = (ah_1a^{-1})(ah_2a^{-1})^{-1}$$

$$= ah_1a^{-1}ah_2^{-1}a^{-1} = a(h_1h_2^{-1})a^{-1} \in aHa^{-1}.$$

所以 aHa^{-1}是 G 的子群.

8.设 G 是交换群,$n > 0$ 为整数,令

$$H = \{a \in G | a^n = e\},$$

证明:H 是 G 的子群.

提示:显然 H.若 $a, b \in H$,则

$$(ab^{-1})^n = a^n(b^n)^{-1} = ee = e,$$

从而,$ab^{-1} \in H$.由此可见,H 是 G 的子群.

9.设 G 是交换群,证明:G 的所有阶为有限的元素构成的集合是 G 的子群.

提示:令 H 表示 G 的所有阶为有限的元素构成的集合.显然 H.设 $a, b \in H$,其中$|a| = m$,$|b| = n$.于是,

$$(ab^{-1})^{mn} = (a^m)^n(b^n)^{-m} = ee = e,$$

从而,$ab^{-1} \in H$.由此可见,H 是 G 的子群.

10.设 G 是群,$a, b \in G$,证明:a 与 bab^{-1}具有相同的阶.

提示:显然,对于任意的正整数 n,

$$(bab^{-1})^n = ba^nb^{-1},$$

从而,

$$a^n = e \Leftrightarrow ba^nb^{-1} = e \Leftrightarrow (bab^{-1})^n = e.$$

由此可见, a 与 bab^{-1}具有相同的阶.

11.设 G 是群,$a, b \in G$, $ab = ba$.假设 a 的阶与 b 的阶互素,证明:$|ab| = |a|\,|b|$.

提示:令$|a| = m$,$|b| = n$,$|ab| = k$.由于

$$(ab)^{mn} = (a^m)^n(b^n)^m = e^ne^m = e,$$

根据命题 3.12 可以断言 $k|mn$.其次,我们有

$$e = (ab)^{kn} = a^{kn}b^{kn} = a^{kn}(b^n)^k = a^{kn}e = a^{kn}$$

从而,根据命题 3.12,$m|kn$.因为 m 与 n 互素,由 $m|kn$ 可知 $m|k$.同理可知,$n|k$.由于 m 与 n 互素,

因此 $mn|k$.所以 $k = mn$,即$|ab| = |a|\,|b|$.

12.设 Z 是整数集关于加法构成的群,H 是 Z 的子群,证明:存在 $n \in H$ 使 $H = \langle n\rangle$.

提示：众所周知,$0 \in H$.当 $H = \{0\}$时,显然 $H = \langle 0\rangle$.现在假设 $H \neq \{0\}$.于是,存在 $m \in H$ 使 $m \neq 0$.这时$-m \in H$,并且,在 m 和-m 中,一个是正数,另一个是负数.令 n 表示 H 中的最小正数.显然,我们有

现在考察任意的 $m \in H$:众所周知,存在整数 q 和 r,$qn \in H, \forall q \in Z$.

使得

$$m = qn + r, 0 \le r < n.$$

于是,$r = m - qn \in H$.由于令 n 是 H 中的最小正数,必有 $r = 0$,从而,$m = qn$.上述表明 $H = \{qn|q \in Z\}$.所以 $H = \langle n\rangle$.

13. 设 6 阶循环群 $G = (a) = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$，求 G 中的每个元素的阶和 G 的全部生成元。

解 因为

$$|e| = 1, |a| = 6, |a^2| = \frac{6}{2} = 3,$$

$$|a^3| = \frac{6}{3} = 2, |a^4| = \frac{6}{2} = 3. |a^5| = 6$$

$\therefore G$ 的全部生成元有二个: a 和 a^5.

14. 设 G 为整数加群, $N = \{5g \mid g \in G\}$

(1) 证明 $N \trianglelefteq G$; (2) 求 G/N

$\forall 5g_1, 5g_2 \in N$

$5g_1 - 5g_2 = 5(g_1 - g_2) \in N \quad \Rightarrow N \le G$

$\forall 5g \in N, \forall a \in G,$

$a + 5g + (-a) = 5g \in N \quad \Rightarrow N \trianglelefteq G$

$G/N = \{[0],[1],[2],[3],[4]\}$

15. f: $C \to R$ ，$f(z)=|z|$ ，$z \in C$ 则 f 是同态映射，并求 $\ker f$

解: $\forall z_1, z_2 \in C$

$f(z_1 z_2) = |z_1 z_2| = |z_1||z_2| = f(z_1) f(z_2)$

$z \in \ker f \Leftrightarrow f(z) = |z| = 1 \Leftrightarrow z = i\theta$

$\ker f = \{e^{i\theta} \mid \theta \in R\}$

$$z \in \ker f \Leftrightarrow f(z) = |z| = 1 \Leftrightarrow z = i\theta$$

16. 求 $\mathbf{Z}_{18}$ 的所有子环.

解 设 I 为 $\mathbf{Z}_{18}$ 的任一子环, 则 I 是 $\mathbf{Z}_{18}$ 的子加群.

$I=\langle\bar{r}\rangle$. 其中 $\bar{r}$ 可能的取值为

$$\bar{0},\quad \bar{1},\quad \bar{2},\quad \bar{3},\quad \bar{6},\quad \bar{9},$$

即 $\mathbf{Z}_{18}$ 有 6 个子加群:

$I_1=\{\bar{0}\}$; $\quad I_2=\langle\bar{1}\rangle=\mathbf{Z}_{18}$;

$I_3=\langle\bar{2}\rangle=\{\bar{0},\bar{2},\bar{4},\bar{6},\bar{8},\overline{10},\overline{12},\overline{14},\overline{16}\}=\bar{2}\mathbf{Z}_{18}$;

$I_4=\langle\bar{3}\rangle=\{\bar{0},\bar{3},\bar{6},\bar{9},\overline{12},\overline{15}\}=\bar{3}\mathbf{Z}_{18}$;

$I_5=\langle\bar{6}\rangle=\{\bar{0},\bar{6},\overline{12}\}=\bar{6}\mathbf{Z}_{18}$; $\quad I_6=\langle\bar{9}\rangle=\{\bar{0},\bar{9}\}=\bar{9}\mathbf{Z}_{18}$.

显然它们都是 $\mathbf{Z}_{18}$ 的子环. 所以 $\mathbf{Z}_{18}$ 共有 6 个子环

$\{\bar{0}\},\mathbf{Z}_{18},\bar{2}\mathbf{Z}_{18},\bar{3}\mathbf{Z}_{18},\bar{6}\mathbf{Z}_{18},\bar{9}\mathbf{Z}_{18}$.

17.试证明整数环Z不能与偶数环同构.

证明 整数环中有乘法单位元1，而偶数环中无乘法单位元，所以不能同构.

18. 求Z_6的全部零因子。

解：$\bar{2},\quad \bar{3},\quad \bar{4}.$

19. **例 8** 设 $d(d\neq 1)$ 为无平方因子的整数, 证明:

$$\mathbf{Q}[\sqrt{d}]=\{a+b\sqrt{d}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$$

是一个域.

证明 $\mathbf{Q}[\sqrt{d}]$ 中每个非零元都可逆,

设 $a+b\sqrt{d}\neq 0$, $a,b\in\mathbf{Q}$, 因为 d 无平方因子, 所以 $a^2-b^2d\neq 0$. 从而

$$\left(a+b\sqrt{d}\right)^{-1}=\frac{1}{a+b\sqrt{d}}=\frac{a-b\sqrt{d}}{a^2-b^2d}=\frac{a}{a^2-b^2d}+\frac{-b}{a^2-b^2d}\sqrt{d}\in\mathbf{Q}[\sqrt{d}].$$

因此, $\mathbf{Q}[\sqrt{d}]$ 中每个非零元都可逆.

20.试证明体的加法群与其非零元素乘法群不能同构.

证明 设$\{F;+;\cdot\}$是体.假设 $\phi:\{F;+\}\cong\{F^*;\cdot\}$.

则$\phi(0)=1$. 设$\phi(a)=-1$.当a=0,则1=-1,2• 1=0; 当$a\neq 0$, 则

$\phi(2a)=\phi(a)\phi(a)=(-1)(-1)=1$,于是2a=0.这两种情况都说明F的特征数为2.因此

2• 1=0,1=-1. $(\phi(1))^2=\phi(2\cdot 1)=\phi(0)=1$,

$$(\phi(1))^2-1=0\Rightarrow(\phi(1)+1)(\phi(1)-1)=0.$$

则 $\phi(1)-1=0$或$(\phi(1)+1)=0$.

因1=-1,故$\phi(1)=1$.这$\phi(0)=1$与矛盾，说明不存在同构映射ϕ.

21.证明有理数域Q的自同构只有恒等自同构.

证明 设σ是有理数域Q的一个自同构.由于在同构映射下，单位元与单位元对应，

负元与负元对应，逆元与逆元对应，故

$$\sigma(1)=1,\sigma(2)=\sigma(1+1)=\sigma(1)+\sigma(1)=2.$$

一般地，$\sigma(m)=m,\sigma(-m)=-m$,其中m为正整数.又易知

$$\sigma(m^{-1})=m^{-1},\sigma(n/m)=n/m\quad(m\neq 0)$$

即σ为Q的恒等自同构.从而有理数域只有恒等自同构.

22.证明：每个无单位元的环R都可嵌入（即在同构意义下包含在）一个有单位元的环中证明　令$K=\{(a,n)|a\in R,n\in Z\}$，且规定

$$(a,m)=(b,n)\Leftrightarrow a=b,m=n.$$

$$(a,m)+(b,n)=(a+b,m+n).$$

$$(a,m)(b,n)=(ab+na+mb,mn).$$

则可验算出 K 对此二运算作成一个有单位元的环 ，其单位元是（0，1）.

再令　$R_0=\{(a,0)|a\in R\}.$

则易知 $\phi:a\to(a,0)(\forall a\in R)$是R到$R_0$的一个同构映射.因此，

$$R\cong R_0.$$

于是若规定$(a,0)=a$，则$R\leq K$.即无单位元环R被包含在有单位元的环K中.

23.设R是一个环，$u\in R$.证明：R对以下二元运算

$$a\oplus b=a+b-u$$

$$a\circ b=ab-au-ub+u^2+u$$

作成一个环且与原来的环R同构.

证明　显然，R对所规定的新运算$\oplus,\circ$是封闭的.令R对新运算作成的集合记为$R(\oplus,\circ)$.

下面在R与$R(\oplus,\circ)$之间建立映射：

$$\phi:x\to x+(\forall x\in R).$$

易知这是R到$R(\oplus,\circ)$的双射，即R的双射变换.又

$$\phi(a+b)=(a+b)+u=(a+u)+(b+u)-u$$

$$=\phi(a)+\phi(b)-u=\phi(a)\oplus\phi(b),$$

$$\phi(a)\circ\phi(b)=(a+u)\circ(b+u)$$

$$=(a+u)(b+u)-(a+u)u-u(b+u)+u^2+u$$

$=ab+au+ub+u^2-au-u^2-ub-u^2+u^2+u$

$$=ab+u=\phi(ab),$$

因此，ϕ是R到R($\oplus$,$\circ$)的同构映射.由于R是环，故R($\oplus$,$\circ$)也是环且与 R同构.

24．求 Klein 四元群的自同态环的所有元素。

解 因为

$K_4=\{e,a,b,c\}$，其中，$|a|=|b|=|c|=2,ab=ba=c,ac=ca=b,bc=cb=a$

$\forall f\in E(K_4),f(e)=e,f(c)=f(a)f(b)$，

故 f 由 f(a)与 f(b)所决定，因此全体 $E(K_4)$的元素为

$$E(K_4)=\left\{f_{xy}=\begin{pmatrix} e & a & b & c \\ e & x & y & xy \end{pmatrix} \middle| x,y\in K_4\right\}$$

且$|E(K_4)|=16.$