一、选择题

1. 1~500 之间能被 3 或者 5 整除的数有多少个？（C）

A. 231;　　B. 232;　　C. 233;　　D. 234

2. 在自然数集 N 上，下列哪种运算满足结合律的？（B）

A. a*b=a- b　　B. a*b=max{a,b}　　C. a*b=a+2b　　D. a*b=|a- b|

3. 在群 G 中方程 ax=b，ya=b，对于 a, b∈ G 都有解，这个解对于这种乘法来说是（B）

A. 不是唯一　　B. 唯一的

C. 不一定唯一的　　D. 相同的(两方程解一样)

4. 当 G 为有限群，子群 H 所含元的个数与任一左陪集 aH 所含元的个数（C）

A.不相等　　B. 0　　C. 相等　　D. 不一定相等。

5. 欧拉函数φ(n)是指小于 n 且与 n 互素的数的个数，则φ(60)= （A）

A. 16;　　B. 17;　　C. 19;　　D. 20

6. 6 阶群的任何子群一定不是（C）。

A. 2 阶　　B. 3 阶　　C. 4 阶　　D. 6 阶

7. 下列关于整环的说法错误的是（D）

A. 乘法适合交换律;　　B. 没有零因子；

C. 有单位元；　　D. 每个不等于 0 的元素存在逆元。

8. 下列关于除环的说法错误的是（B）

A. 至少包括一个不等于 0 的元；　　B. 没有零因子；

C. 有单位元；　　D. 每个不等于 0 的元素存在逆元。

9. 设 R 为一个环，f: R→S 满同态，下列关于环同态的说法错误的是（B/D）

A. 若 R 是交换环，则 S 是交换环；　　B. 若 R 是无零因子，则 S 无零因子；

C. 若 R 有单位元，则 S 有单位元；　　D. 以上说法都正确。

10. 用 2 种颜色的珠子做成有 5 颗珠子项链，问可做出（D）种不同的项链。

A. 5;　　B. 6;　　C. 7;　　D. 8

二、填空题

1. 全体不等于 0 的有理数对于普通乘法来说作成一个群，则这个群元 a 的逆元是$\underline{\quad \frac{1}{a} \quad}$。

2. 设群 G 中元素 a 的阶为 m，如果$a^n = e$，那么 m 与 n 存在整除关系为_

$m|n$______。

3. 环 Z_8 的零因子有____$\bar{2}$，$\bar{4}$，$\bar{6}$____。

4.一个除环 R 只有___平凡/零与本身/2 个/非真___理想。

5. 设 Z，Q 分别表示整数集合与有理数集合。令 $G=(Q,+)$,$H=(Z,+)$，则商群 G/H 中元素 $H+\frac{q}{p}$的阶是____p____。

三、计算题

1. 设 G 是所有二阶可逆矩阵构成的群，令 $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$。

求矩阵 A，B，AB 的阶各是多少?

解：分别计算，

$A^2=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，$A^3=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$，$A^4=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$。故 A 的阶是 4。(4 分)

$B^2=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，$B^3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$。故 B 的阶是 3。(4 分)

$AB=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，计算可知$(AB)^n=\begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{bmatrix}$。故 AB 的阶是无限。(4 分)

2. 计算循环群$C_{12}=\{e,g,\quad,g^{11}\}$关于$H=\{e,g^4,g^8\}$的所有右陪集。(满分 12 分)

解：G 的阶为 12，H 的阶为 3，则根据拉格朗日定理，H 在 G 的指数$\#(G,H)=4$，从而

$He=\{e,g^4,g^8\}=Hg^4=Hg^8$;　求出每个结果给 3'

$Hg=\{g,g^5,g^9\}=Hg^5=Hg^9$;

$Hg^2=\{g^2,g^6,g^{10}\}=Hg^6=Hg^{10}$;

$Hg^3=\{g^3,g^7,g^{11}\}=Hg^7=Hg^{11}$;

3、设 $Z_6=\{[0],[1],[2],[3],[4],[5]\}$ 是模 6 的剩余类环，且 $f(x),g(x)\in Z_6[x]$。如果 $f(x)=[3]x^3+[5]x+[2]$，$g(x)=[4]x^2+[5]x+[3]$，计算 $f(x)+g(x)$、$f(x)-g(x)$ 和 $f(x)g(x)$ 以及它们的次数。

解：(求出每个结果 2',其中系数写法要统一，[0]需要去掉，否则扣 1')

$$\begin{aligned}f(x)+g(x)&=[3]x^3+[5]x+[2]+[4]x^2+[5]x+[3]\\&=[3]x^3+[4]x^2+[10]x+[5]\\&=[3]x^3+[4]x^2+[4]x+[5]\end{aligned}$$

$f(x)+g(x)$次数为 3 次。

$$\begin{aligned}f(x)-g(x)&=[3]x^3+[5]x+[2]-([4]x^2+[5]x+[3])\\&=[3]x^3-[4]x^2+[-1]\end{aligned}$$

$= [3]x^3 - [4]x^2 + [5]$ or $[3]x^3 + [2]x^2 + [5]$

f(x) - g(x)次数为 3 次。

$f(x)g(x) = ([3]x^3+[5]x+[2]) * ([4]x^2+[5]x+[3])$

$= [12]x^5 + [15]x^4 + [9]x^3 + [20]x^3 + [25]x^2 + [15]x + [8]x^2 + [10]x + [6]$

$= [0]x^5 + [3]x^4 + [5]x^3 + [3]x^2 + [1]x + [0]$

$= [3]x^4 + [5]x^3 + [3]x^2 + [1]x$

f(x)g(x)次数为 4 次。

四、证明题

1．设 G = {0, 1,2,3,4,5,6}，G 中的运算为

$$i°j = \begin{cases} i+j & i+j\le 6, \\ i+j-7 & i+j>6 \end{cases}$$

证明：(G,°)是一个交换群。

证明：

(1)画出算法表；

(2)直接证明

对于∀x, y∈G，x°y∈{0, 1,2,3,4,5,6} = G,则满足封闭性；（2 分）

对于∀x, y,z∈G，(x°y)°z = x°(y°z),结合律成立；（2 分）

对于∀x∈G 有，取 y = 0,x + y = x ∈ G,则 y = 0 为单位元；（2 分）

另外，0°0 = 0;1°6 = 0;2°5 = 0;3°4 = 0;4°3 = 0;5°2 = 0;6°1 = 0;则每个元素均存在逆元；（2 分）

∀x, y∈G，x°y = y°x，（1 分）

则 G 是交换群。

2.设

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in Z \right\}, \quad I = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \middle| a, c \in Z \right\},$$

已知 R 关于矩阵的加法和乘法作成一个环。证明：I 是 R 的一个子环，但不是理想。

证明：

对于任意 x, y∈I, r∈R，设 $x = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & 0 \end{bmatrix}$, $r = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，这里$x_i$,$y_i$∈Z 对于 i = 1,2, a,b,c,d∈Z，则

(1) $x - y = \begin{bmatrix} x_1-y_1 & 0 \\ x_2-y_2 & 0 \end{bmatrix}$,且$x_i - y_i$∈Z，则 x - y∈I；（2 分）

$xy = \begin{bmatrix} x_1y_1 & 0 \\ x_2y_2 & 0 \end{bmatrix}$,且$x_iy_i$∈Z，则 xy∈I；（2 分）

从而可知，I 是 R 的子环。（1 分）

(2)$xr = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1a & x_1b \\ x_2a & x_2b \end{bmatrix}$, （2 分）
当$x_ib \neq 0$时，$xr \notin I$，(2 分)
从而可知，I 不是 R 的理想。(1 分)
(2)还可以举反例证明

3. 设 R=2Z，则 I=4Z 为 R 的理想，问
(1) I 是 R 的极大理想吗？（2 分）
(2) I 是 R 的素理想吗？（2 分）
(3) 证明或者举反例支撑上述结论。(11 分)
解：
(1) I 是 R 的极大理想;（2 分）
(2) I 不是 R 的素理想；(2 分)
(3) **首先证明** I 是 R 的极大理想。
设 $I \subset N \subset R$,但 $I \neq N$，N 为 R 的理想。(1 分)
则任意 $a = 2z \in N$,但 $a \notin I$. 故这里 z 为奇数。(2 分)
令 $z = 1 + 2b$，则 $2z = 2 + 4b$，而 $2z$, $4b \in N$.所以 $2 = 2z - 4b \in N$，(2 分)
从而 $2Z = R \subset N$，即 $R = N$. (2 分)
所以 I 为 R 的极大理想。

再来说明 I 不是 R 的素理想。
由于 $2 \cdot 2 = 4 \in I$，(2 分)
但 $2 \notin I$.所以 I 不是 R 的素理想。(2 分)