Aufgabe 5 (10+10 Punkte). In einer Urne liegen drei Münzen mit den positiven Erfolgsw'keiten $p_1, p_2, p_3 \in]0,1]$. Wir greifen ohne hinzusehen zufällig eine Münze aus der Urne und werfen sie 3-mal.

(1) Was ist die W'keit, dass alle drei Würfe Erfolge sind?

(2) Was ist die W'keit, dass wir im dritten Wurf Erfolg haben, konditioniert darauf, dass bereits der erste und auch der zweite Wurf ein Erfolg ist?

Voraussetzung. Es seien $p_1, p_2, p_3 \in]0,1]$. Es seien $X \sim \text{Unif}(\{1,2,3\})$ und:

$$Y_1, Y_2, Y_3 \mid X \sim \text{Ber}(p_X) \quad \text{i.i.d.}$$

Behauptung. Es gilt:

(1) $$\mathbb{P}(Y_1 = 1 \wedge Y_2 = 1 \wedge Y_3 = 1) = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} p_j^3$$

(2) $$\mathbb{P}(Y_3 = 1 \mid Y_1 = 1 \wedge Y_2 = 1) = \frac{\sum_{j=1}^{3} p_j^3}{\sum_{j=1}^{3} p_j^2}$$

Beweis. Für alle $k \in \{1,2,3\}$ gilt mit dem Satz von der totalen W'keit:

$$\mathbb{P}\left(\bigwedge_{i=1}^{k}(Y_i = 1)\right) = \sum_{j=1}^{3} \mathbb{P}\left(\bigwedge_{i=1}^{k}(Y_i = 1) \mid X = j\right) \cdot \mathbb{P}(X = j) = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}\prod_{i=1}^{k}\mathbb{P}(Y_i = 1 \mid X = j) = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} p_j^k$$

Daraus folgt (1). Es folgt ferner (2), denn:

$$\mathbb{P}(Y_3 = 3 \mid Y_1 = 1 \wedge Y_2 = 1) = \frac{\mathbb{P}(Y_3 = 1 \wedge Y_1 = 1 \wedge Y_2 = 1)}{\mathbb{P}(Y_1 = 1 \wedge Y_2 = 1)} = \frac{\sum_{j=1}^{3} p_j^3}{\sum_{j=1}^{3} p_j^2}$$ □

Aufgabe 5 (20 Punkte). In einer Urne liegen drei Münzen mit den positiven Erfolgsw'keiten $p_1, p_2, p_3 \in]0,1]$. Wir greifen ohne hinzusehen zufällig eine Münze aus der Urne und werfen sie 2-mal. Was ist die W'keit (als W'keit oder in Odds), dass wir Münze Nummer 3 gezogen haben, konditioniert darauf, dass der erste und auch der zweite Wurf jeweils ein Erfolg ist?

Voraussetzung. Es seien $p_1, p_2, p_3 \in]0,1]$. Es seien $X \sim \text{Unif}(\{1,2,3\})$ und:

$$Y_1, Y_2 \mid X \sim \text{Ber}(p_X) \quad \text{i.i.d.}$$

Behauptung. Es gilt:

$$\text{Od}(X = 3 \mid Y_1 = 1 \wedge Y_2 = 1) = \frac{p_3^2}{p_1^2 + p_2^2}$$

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Y_1 = 1 \wedge Y_2 = 1 \mid X \in \{1,2\}) \\
&= \frac{\mathbb{P}(Y_1 = 1 \wedge Y_2 = 1 \wedge X = 1) + \mathbb{P}(Y_1 = 1 \wedge Y_2 = 1 \wedge X = 2)}{\mathbb{P}(X \in \{1,2\})} \\
&= \frac{3}{2}(\mathbb{P}(Y_1 = 1 \wedge Y_2 = 1 \mid X = 1)\mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(Y_1 = 1 \wedge Y_2 = 1 \mid X = 2)\mathbb{P}(X = 2)) \\
&= \frac{3}{2}\frac{1}{3}(p_1^2 + p_2^2) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2}
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\text{LR}(Y_1 = 1 \wedge Y_2 = 1, X = 3) = \frac{\mathbb{P}(Y_1 = 1 \wedge Y_2 = 1 \mid X = 3)}{\mathbb{P}(Y_1 = 1 \wedge Y_2 = 1 \mid X \in \{1,2\})} = \frac{2p_3^2}{p_1^2 + p_2^2}$$

Schließlich gilt $\text{Od}(X = 3) = \frac{1}{2}$. Die Behauptung folgt aus der Odds-Version der Formel von Bayes. □

Voraussetzung. Es sei $X \sim \mathrm{Par}(a)$ mit $a > 0$. Definiere:

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \mapsto \begin{cases} \frac{\ln(t)}{t} & t \geq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Behauptung. Es gilt:

$$\mathbb{E}(f(X)) = \frac{a}{(a+1)^2}$$

Beweis. Es sei ρ die aus der Vorlesung bekannte PDF der $\mathrm{Par}(a)$. Für alle $r > 1$ gilt:

$$\int_1^r f(t)\rho(t) = a\int_1^r \frac{\ln(t)}{t^{a+2}} = \left[\frac{a}{a+1}\frac{\ln(t)}{t^{a+1}}\right]_r^1 + \frac{a}{a+1}\int_1^r \frac{1}{t^{a+2}}$$

$$= \left[\frac{a}{a+1}\frac{\ln(t)}{t^{a+1}}\right]_r^1 + \frac{a}{a+1}\left[\frac{1}{a+1}\frac{1}{t^{a+1}}\right]_r^1 \xrightarrow{r\to+\infty} 0 - 0 + \frac{a}{(a+1)^2} - 0 = \frac{a}{(a+1)^2}$$

Die Behauptung folgt mit LOTUS. □

Voraussetzung. Es sei $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$.

Behauptung. Es gilt:

$$\mathrm{Var}(2^{-X}) = \frac{\lambda}{2\ln(2)+\lambda} - \frac{\lambda^2}{(\ln(2)+\lambda)^2}$$

Beweis. Für alle $b \in [0, +\infty[$ gilt:

$$\lambda\int_0^b 2^{-t}e^{-\lambda t} = \lambda\int_0^b e^{-\ln(2)t}e^{-\lambda t} = \lambda\int_0^b e^{-(\ln(2)+\lambda)t} = \frac{\lambda}{\ln(2)+\lambda}\left[e^{-(\ln(2)+\lambda)t}\right]_b^0 \xrightarrow{b\to+\infty} \frac{\lambda}{\ln(2)+\lambda}$$

Nach LOTUS folgt $\mathbb{E}(2^{-X}) = \frac{\lambda}{\ln(2)+\lambda}$. Ferner für das zweite Moment:

$$\lambda\int_0^b (2^{-t})^2 e^{-\lambda t} = \lambda\int_0^b e^{-2\ln(2)t}e^{-\lambda t} = \lambda\int_0^b e^{-(2\ln(2)+\lambda)t} = \frac{\lambda}{2\ln(2)+\lambda}\left[e^{-(2\ln(2)+\lambda)t}\right]_b^0 \xrightarrow{b\to+\infty} \frac{\lambda}{2\ln(2)+\lambda}$$

Nach LOTUS folgt $\mathbb{E}((2^{-X})^2) = \frac{\lambda}{2\ln(2)+\lambda}$. Die Behauptung folgt aus der bekannten Formel für die Varianz. □

Voraussetzung. Es seien $X \sim \mathcal{N}(-155, 10)$ und $Y \sim \mathrm{Exp}(\frac{1}{5})$ und $Z \sim \mathrm{Bin}(200, \frac{3}{4})$. Es mögen X, Y, Z paarweise unkorreliert sein.

Behauptung. Es gilt $\mathbb{P}(|X+Y+Z| \geq 10) < 73\%$.

Beweis. Es gilt:

$$\mathbb{E}(X+Y+Z) = -155 + 5 + 150 = 0$$

Da die ZV paarweise unkorreliert sind, ist die Varianz der Summe gleich der Summe der Varianzen, also mit den bekannten Formeln für diese Verteilungen:

$$\mathrm{Var}(X+Y+Z) = 10 + 25 + \frac{150}{4} = 35 + \frac{75}{2} = 72.5$$

Mit der Tschebyschow-Ungleichung folgt:

$$\mathbb{P}(|X+Y+Z| \geq 10) = \mathbb{P}(|(X+Y+Z) - \mathbb{E}(X+Y+Z)| \geq 10) \leq \frac{\mathrm{Var}(X+Y+Z)}{100} < \frac{73}{100}$$ □

Voraussetzung. Es sei $p \in]0,1[$ und $X \sim \mathrm{Geom}(p)$ und $t \in \mathbb{R}$ mit $t < -\ln(1-p)$.

Behauptung. Es gilt:

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = \frac{p}{1 - e^t(1-p)}$$

Beweis. Es gilt:

$$0 < e^t(1-p) < e^{-\ln(1-p)}(1-p) = \frac{1}{1-p}(1-p) = 1$$

Nach unserem Wissen über die Geometrische Reihe und mit LOTUS folgt:

$$p\frac{1}{1-e^t(1-p)} = p\sum_{k=0}^{\infty}(e^t(1-p))^k = p\sum_{k=0}^{\infty}e^{tk}(1-p)^k = \sum_{k=0}^{\infty}e^{tk}p(1-p)^k = \sum_{k=0}^{\infty}e^{tk}\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{E}(e^{tX})$$ □