前言

2020考研的小伙伴们大家好，相信你们对考研数学的疑惑不少。很多知识点看着简单但是遇到题目却傻眼了，有的题目更是连该用什么知识点都不清楚。从今天起，我会跟着大家一起面对考研的挑战。在剩下的9个月里，教导你们关于考研数学的各种知识。当然2021年及以后考研的小伙伴们也可以关注此公众号，早学可以轻松一点嘛。

考研数学知识点可以分为几大部分。其中第一大部分就是极限与连续。大家在大一就学习了极限的某种求法，等价无穷小，但是用这个知识点做题屡做屡错，在同一个地方不知道要跌倒多少次。举个栗子，

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx-tanx}{x^3}$$

该式如果用等价无穷小$sinx\sim tanx$**，那么分子为0，很容易就得出错误答案0。事实上，正确做法有两个，分别为洛必达法则和麦克劳林展开。**

洛必达法则：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{sinx-tanx}{x^3}&=\lim_{x\to 0}\frac{cosx-sec^2x}{3x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-sinx-2sec^2xtanx}{6x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-cosx-4sec^2xtan^2x-2sec^4x}{6}\\&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

麦克劳林展开(泰勒公式中$x_0=0$**时)：**

$$sinx=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$$

$$tanx=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{sinx-tanx}{x^3}&=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3))}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0}-\frac{\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{x^3}\\&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

很多人这时候就会诧异，都是求极限的方法为什么等价无穷小就是错的，而后两种办法就是对的呢，用汤老师的话讲这就是等价的精度问题，若分母为x，则运用等价无穷小的计算结果也是正确的。如下式：

$$\lim_{x\to 0} sinx\sim x\Leftrightarrow sinx=x+o(x)$$

其他等价无穷小同理。

常用一阶等价：

$\Delta\sim sin\Delta\sim tan\Delta\sim arcsin\Delta\sim arctan\Delta\sim ln(1+\Delta)$

$a^\Delta-1\sim xlna$**(当$a=e$时，有$e^\Delta-1\sim\Delta$)**

$(1+\beta\Delta)^\alpha-1\sim\alpha\beta\Delta$**(当$\alpha=\frac{1}{2},\beta=1$时，有$\sqrt{1+\Delta}-1\sim\frac{1}{2}\Delta$)**

常用二阶等价：

$1-cos\Delta\sim\frac{1}{2}\Delta^2$

常用三阶等价：

$\Delta-sin\Delta\sim\frac{1}{6}\Delta^3$

$tan\Delta-\Delta\sim\frac{1}{3}\Delta^3$

ps **:Δ可为任意极限为0的表达式。**

很多人搞懂了第一个重要极限，却总是在第二个重要极限犯错。

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$$

这式子记住也不难，但想要灵活变通，就是另外一回事了。

不信，请看以下例题，试求：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}{e^x}$$

有些人一看分子部分不是重要极限=e嘛，答案1就呼之欲出了。可是真的对吗？

由函数极限定义可知，若极限存在，$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当$|x|>X$时，

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

恒成立。然而，下式的1^∞型的极限是不确定的，可能存在也可能不存在。

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{f(x)}{A})^x$$

正确的做法如下，

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2ln(1+\frac{1}{x})}}{e^x}\\
&=\lim_{x\to\infty}e^{x^2ln(1+\frac{1}{x})-x}\\
&\xlongequal{t=1/x}e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{ln(1+t)-t}{t^2}}\\
&=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{1/(1+t)-1}{2t}}\\
&=e^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

ps :1^∞**型通常化为$e^{\infty ln(1)}$形式处理。**

所以说，考研数学的知识点确实不难，但比较容易出错，所以接下来的日子里，跟我一起复习考研数学。我会梳理难点与易错点，共同进步。

2019.4.1 于南京