Ćwiczenie 3 z metod obliczeniowych

dla ....

Pobierz dane: x, a, N, q, r, s dla swojego ćwiczenia z pliku *MO_lab3_dane*.

1. - **Oblicz za pomocą metody różnic skończonych dla funkcji $f(x) = \cos x$:**
     i) pierwszą pochodną $f'(x)$ za pomocą różnic wstecznych,
     ii) pierwszą pochodną $f'(x)$ za pomocą różnic centralnych,
     iii) drugą pochodną $f''(x)$ za pomocą różnic centralnych,
     przy $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125$.
   - Dla przypadków i)-iii) narysuj na jednym rysunku wykresy zależności $\log_{10}$ błędu obliczenia pochodnych różnicami od $\log_{10} h$.
   - Zidentyfikuj współczynniki nachylenia tych wykresów z teoretycznymi rzędami dokładności dla wzorów różnicowych.

2. - **Rozwiąż poniższy problem początkowy:**

   $$\begin{cases} y' = \sin \pi t - a \cdot y \quad x \in (0, 2) \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

   stosując N kroków, tj. $\delta t = 2/N$ i algorytm pośredniej metody Eulera (wykł. 4, str. 7):

   for i=1,N
   $y_i := (y_{i-1} + \delta t \sin(\pi \delta t \cdot i))/(1 + a \cdot \delta t)$ (tzn. $\frac{y_i - y_{i-1}}{\delta t} = \sin(\pi \delta t \cdot i) - a \cdot y_i$)
   endfor

   - Narysuj wykres rozwiązania.
   - Rozwiąż dodatkowo zadanie dla siatek z podziałem na $2N$ i $4N$ odcinków.
   - Znajdź maksymalny błąd dla każdego z przypadków $N, 2N$ i $4N$ porównując z rozwiązaniem ścisłym równania różniczkowego, które ma postać:

   $$y(t) = \frac{\pi e^{-at} - \pi \cos \pi t + a \sin \pi t}{\pi^2 + a^2}$$

   (Sprawdź, czy to rozwiązanie spełnia dane równanie różniczkowe i warunek początkowy!)
   - Narysuj wykres zależności $\log_{10}$ z błędu od $\log_{10} \delta t$ i znajdź rząd dokładności jako współczynnik nachylenia wykresu.

3. - **Napisz program rozwiązujący równanie różniczkowe 2-go rzędu:**

   $$\begin{cases} y'' + qy' + ry = s, \quad x \in (0, 5), \\ y(0) = 0, \\ y(5) = 0, \qquad \text{(tj. } p = 1, \alpha = 0, \beta = 1, \phi = 0, \psi = 1 \text{ wg. wykładu 5.)} \end{cases}$$

Zastosuj podział na N odcinków, tj. z $h = 5/N$ oraz poniższy algorytm (wg str. 3 i 4 wykładu 5):

$\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$, $A_{1,1} = 1$, $b_1 = 0$, $A_{N+1,N+1} = 1$, $b_{N+1} = 0$

for i=2,N

$$A_{i,i-1} = \frac{1}{h^2} - \frac{q}{2h}, \quad A_{i,i} = r - \frac{2}{h^2}, \quad A_{i,i+1} = \frac{1}{h^2} + \frac{q}{2h}$$

$b_i = s$

endfor

Rozwiąż $\boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{b} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y}$.

- Narysuj wykres rozwiązania.
- Rozwiąż zadanie dodatkowo na siatkach z $h = 5/(2N)$ i $h = 5/(4N)$.
- Znajdź maksymalny błąd dla każdego z rozwiązań porównując z rozwiązaniem ścisłym równania różniczkowego w postaci:

$$y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} + s/r$$

gdzie

$$\lambda_{1,2} = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4r}}{2}, \quad A = \frac{s/r(e^{5\lambda_2} - 1)}{e^{5\lambda_1} - e^{5\lambda_2}}, \quad B = \frac{s/r(e^{5\lambda_1} - 1)}{e^{5\lambda_2} - e^{5\lambda_1}}.$$

(Sprawdź samodzielnie, czy powyższe rozwiązanie spełnia dane równanie różniczkowe 2-go rzędu z warunkami brzegowymi!)

- Narysuj wykres zależności $\log_{10}$ z błędu od $\log_{10} h$ i znajdź rząd dokładności jako współczynnik nachylenia wykresu.

4. **UWAGI:**

Wykonaj obliczenia w **podwójnej precyzji.**

Zamieść tabele otrzymanych wyników (**ich brak dyskwalifikuje zadanie!**).

Liczby przedstaw z dokładnością do 6 cyfr w zapisie naukowym, np. $-.134256e-03$ tj. $-0.134256 \cdot 10^{-3}$.

W powyższych ćwiczeniach wykorzystaj informacje, pseudokody i wzory podane na wykładzie.

Przedstaw swoją implementację kodów dla zad. 2 i 3 (ale bez solwera równań).

Wszystkie wyniki zawrzyj w sprawozdaniu w postaci pliku pdf.