一、预备知识：反函数、四特性、图像、数列、三角函数、运算法则、一元二次方程、因式分解、阶乘与双阶乘、常用不等式

二、极限与连续：定义、使用、存在、计算、连续与间断、补充

三、微分

1. 一元微分：计算、几何应用、物理应用、中值定理、等式/不等式
2. 多元微分：概念、关系、求导、极值最值、偏微分方程
3. 微分方程：一阶变换/公式、二阶可降阶、高阶常系数齐次通解/非齐次特解、微分算子法求非齐特解、应用题
4. 无穷级数：判敛、收敛域、展开、求和、傅里叶级数

四、积分（做题，看书，总结）

1. 概念：祖孙三代1.2.3、比大小4.5、凑6.7.8
2. 反常积分判敛9.10.11.12
3. 计算：基本积分公式、不定积分的计算1~10、定积分的计算11~21、变限积分计算22~28、反常积分计算29.30
4. 几何应用：面积1.2、旋转体体积3~7、平均值8、平面曲线弧长9.10、旋转曲面侧面积11.12、平面上曲边梯形形心13、平行截面积已知 的立体体积14
5. 积分等式1.2.3、积分不等式4~10
6. 物理应用：位移1、总路程、变力沿直线做功2、静水压力3、细杆质心4

五、多元积分：

1. 预备知识：向量运算与应用、直线平面位置关系17.1、切线与法平面17.2、切平面与法线17.3 17.4、空间曲线的投影、旋转曲面17.5 17.6、 场论初步17.7~17.11
2. 一、二、三重积分：概念（和式极限14.1、对称性14.2 18.1、比大小14.3 14.4、中值定理14.5、周期性14.6）、不同坐标系下的计算及变 换14.7~14.11 18.2~18.5
3. 曲线曲面积分：一投二代三计算18.6~18.8 18.9~18.11 18.12 18.24 18.25、公式18.13~18.20 18.22 18.23 18.26~18.30、Ⅰ/Ⅱ型关系18.21 18.31
4. 应用：几何应用、物理应用18.32~36
5. **预备知识**
6. 反函数：
7. 函数四特性
8. 函数图像
9. 直角坐标
10. 对数函数：互为反函数；随a变大，的变化；

1. 分段函数：
2. 图像变换

注：

1. 极坐标、参数方程

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 心形线（外摆线） | | 玫瑰线 | 阿基米德螺线 | 伯努利双扭线 | | 平摆线 | 星形线（内摆线） |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 4f30b66ab31e904a8bdd9117cb180f0 |  | 42b22a5d4bbc86f914424fc4bd07b12 | c4752f3f59d711a6792cd4fc9bc7f39 | 42b4a6a979d2d909d013b9f41483bfe | cb873375bf47b324603d84933293383 | 32d408cbd73caada3a4768c50835cbb | 894982acc642a4e23024b4d99a14e47 |
| fd64488e6ab423ad0223f19414b9d54 |  |  | 87d47418afed01c3589dd1c674792dc |  |  |  |  |

1. 数列
2. 三角函数：基本关系、诱导公式、特殊值、重要公式（倍角半角、和差积化和差和差化积、万能公式）
   1. 倍角：
   2. 半角：
   3. 和差：
3. 运算法则：指数；对数
4. 一元二次方程：；
5. 因式分解
6. 阶乘与双阶乘：；
7. 常用不等式
   1. ；若
   2. 设，则
   3. 若0＜a＜x＜b，0＜c＜y＜d，则
   4. 时，
   5. 一串比大小
8. 0是整数，是偶数，是非负整数，不是正整数
9. 双曲函数：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 双曲函数 | 反双曲函数 | 反双曲函数导数 |
|  |  |  |
|  |  |  |

1. 排列数、组合数

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 全排列 |  | 将n个进行排序 |  |  |
| 排列数 |  | n中取k个，进行排序 |  |  |
| 组合数 |  | n中取k个 |  | 1；三角形记忆法 |

1. **极限与连续**

函数

1. 化简先行
   1. 等价无穷小替换
      1. 普通函数，
      2. 复合函数/变上限积分函数/复合函数与变上限积分函数/推广型/看大哥
   2. 恒等变形：提公因式/换元（...）/通分//因式分解/分子有理化/牛莱/拉中/积中/泰勒
2. 洛必达法则（要求：分子分母均可导）
3. 泰勒公式
   1. 熟记常用公式：
   2. 展开原则：上下同阶、系数不同幂次最低
4. 无穷小比阶：高阶（意味着更小）、同阶、等价、低阶

数列

补充；连续有最值

1. **微分**
2. 一元微分学
3. 概念：定义//可微充要条件/一阶微分形式不变性
4. 计算
   1. 复合函数求导：
   2. 隐函数求导：（求的三种方法两边对x求导数②两边同时求微分d③公式法 ）
   3. 反函数求导：
   4. 分段函数求导：分段点定义法；非分段点公式法
   5. 对数求导法：等式两边加绝对值后取对数，得
   6. 幂指数求导法：
   7. 参数方程求导：
   8. 高阶导数：归纳法/莱布尼兹公式法/泰勒展开式
5. 几何应用
   1. 切线/法线/截距
   2. 极值（单调性）：判单调性的充分条件/一阶可导点是极值点的必要条件/判极值的充分条件
   3. 拐点（凹凸性）

|  |  |
| --- | --- |
| 判增减/凹凸的充分条件 | 可导点是极值点/拐点的必要条件 |
|  |  |
|  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 判极值点/拐点的第一充分条件 | 第二充分条件 | 第三充分条件 |
| 极值点 | 极值点 |  |
| 拐点 | 拐点 |  |

* 1. 极值点和拐点的重要结论

* 1. 渐近线、最值/取值范围/值域(驻点、不可导点、端点、单侧极限)、曲率/曲率半径

1. 物理应用：A对B的变化率
2. 中值定理
   1. 辅助函数

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  | |  |
|  | |  | |  |
|  | |  | |  |
|  | |  | |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |
|  |  |
| 见到 | | | | |
| 题设给出或 | | | | |

* 1. 定理

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | A B | |
| 有界与最值定理 | 闭区间连续 |  |
| 介值定理 |  |
| 平均值定理 |  |
| 零点定理 | 闭区间连续， |  |
| 费马定理 | 闭区间连续， |  |
| 罗尔定理 | 闭区间连续， |  |
| 拉格朗日中值定理 | 闭区间连续， |  |
| 积分中值定理 | 闭区间连续 |  |
| 推广的积分中值定理 | 闭区间连续，不变号 |  |
| 二重积分中值定理 | 平面闭区域，连续 |  |
| 柯西中值定理 | 闭区间连续， |  |
| 泰勒公式 | 闭区间连续， | 带拉格朗日余项： |
| 变体形式： |
| 带佩亚诺余项： |
| 麦克劳林展开式 |  |  |

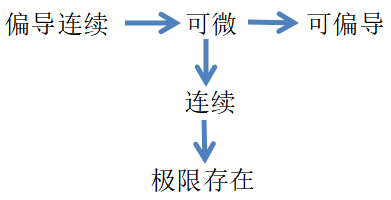
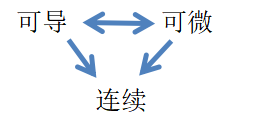
* 1. 如何确定定理
     1. 用拉中的情况：
     2. 用泰勒的情况：；与0；凹凸性
     3. 用柯中的情况：两个函数；具体函数与抽象函数；与拉中结合
  2. 常见关键点总结

|  |
| --- |
| 等式两边取极限；等式两边积分； |
| f取决于ab相对位置；也是取决于ab相对位置 |
| f是奇函数且在原点有定义 f=0；f是可导偶函数 f=0 |
| 几何条件：两函数交于一点/有公切线/存在相等最大值 |
| 令，则，  拉中变体： ，特别的，x  泰勒变体： |

1. 微分等式
   1. 零点定理及其推广：在
   2. 导数工具研究函数性态
   3. 罗尔定理的推论：若，则至多有个根
   4. 实系数奇次方程至少有一个实根
2. 微分不等式
   1. 单调性：

* 1. 最值：
  2. 凹凸性：
  3. 拉中：
  4. 柯中：
  5. 带拉泰勒：

1. 多元微分学



1. 复合函数求导（f()为极值，则一阶偏导都为0，二阶混合偏导数不确定）
2. 隐函数求导
   1. ：两边对x求导数②两边同时求微分d③公式法
   2. 方程组： = ； = ；
3. 多元函数的极值最值
   1. 极值存在的必要条件：偏导存在且取极值的点，偏导为0；偏导不存在的点也可能是极值点
   2. 极值存在的充分条件：
   3. 条件极值：目标函数在条件下的最值，令，
4. 偏微分方程
5. 微分方程
6. 一阶微分方程：变量可分离；换元后变量可分离；齐次型；一阶线性；伯努利；
7. 二阶可降阶微分方程
8. 高阶常系数线性微分方程
   1. 求
      1. 注：
9. 换元法
10. 应用题
11. 无穷级数（级数：将数列的项用加号连接起来的函数）
12. 判敛
    1. 概念

|  |  |
| --- | --- |
| 无穷级数 |  |
| 级数的前n项和 |  |

注1：

注2：

* 1. 判敛
     1. 正项级数：
        1. 基本定理： {}有(上)界
        2. 比较判别：大收小收，小散大散，同阶同敛散，指无穷级数
        3. 比值、根植判别：，
        4. 积分判别：与敛散性相同，要求在上单调减少非负连续
     2. 交错级数：

莱布尼兹判别法：该交错级数收敛

注：若条件不成立，则另谋他法，并不能得出级数发散

* + 1. 任意项级数：符号无限制

|  |  |
| --- | --- |
| 绝对收敛 | 收敛，且收敛 |
| 条件收敛 | 不收敛，但收敛 |

绝对±绝对绝对

绝对±条件条件

条件±条件绝对/条件

绝收，若 收 收 绝收

* 1. 常用结论
     + 1. 重要尺度：
       2. 或 发散 发散

收敛 收敛；发散 发散

* + - 1. )&& 收敛
      2. 收敛
      3. 收敛 绝对收敛
      4. 则在，，中有两个收敛，另一个必收敛

|  |
| --- |
| 敛±敛敛 |
| 敛±散散 |
| 散±散 |

* + - 1. 收敛 ，收敛

1. 收敛域
   1. 概念
      1. 函数项级数：
      2. 常数项级数：
      3. 幂级数：
         1. 一般形式：
         2. 标准形式：

④ 收敛区间是开区间，收敛域在收敛区间的基础上判断端点的敛散性

* 1. 具体型
     1. 不缺项幂级数 ，
     2. 缺项幂级数或一般函数项级数 令或
  2. 抽象型
     1. 已知在处的敛散性
     2. 已知的敛散性，讨论的敛散性

注：A.收敛半径不变；B.，收敛半径不变，端点可能变散；C.，收敛半径不变，端点可能变敛

1. 展开
   1. 考法

① 函数展开：

② 积分展开：

③ 导数展开：

④ 无穷小比阶：的无穷小比阶问题

* 1. 工具

① 先积后导：

② 先导后积：

③ 重要展开公式

* 1. 简单数项级数的和

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  | 对应函数，及收敛域 |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

1. 求和函数
   1. 套公式
   2. 先积后导或先导后积

①

②

③

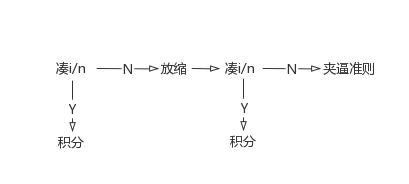
* 1. 用所给微分方程求和函数
  2. 建立微分方程并求和函数
  3. 综合题

1. 傅里叶级数
2. **积分**
3. 概念：
   1. 祖孙三代

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  | 偶 |  |
|  |  |  |  |
|  |  | 时为T | 注： |



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

* 1. 

1. 反常积分判敛
   1. 奇点：无穷区间上的反常积分或无界函数的反常积分，判别时，每个积分有且仅有一个奇点，否则拆开
   2. 比较判别法：①②
2. 计算

* + 1. 区间再现

1. 几何应用

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 面积 | 直角坐标 | |  |
| 极坐标 | |  |
| 旋转体体积 |  | |  |
|  |  |  |
|  |  |
|  |  |
| 平均值 | | |  |
|  | | |  |
|  | | |  |
|  | | |  |
|  | | |  |

1. 物理应用

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 总路程 |  |
| 变力沿直线做功 |  |
| 静水压力 |  |
| 细杆质心 |  |

1. 二重积分
   1. 概念
      1. 和式极限
      2. 普通对称性：关于y轴对称；关于x=a对称；关于x轴对称；关于y=a对称；关于y=x对称；
      3. 轮换对称性：
         1. 若D中的x和y对调后，D不变，则
         2. 若+a，则
      4. 比大小：D内外部可以影响f(x,y)的正负，
      5. 中值定理：椭圆的面积，在一个坐标系下；D的x,y与f(x,y)的x,y是同一个
      6. 周期性：化成累次积分后，一元积分有用周期性；
   2. 计算：
      1. 直角坐标系下
      2. 极坐标系下
      3. 坐标系转换
2. **多元积分**
3. 预备知识
   1. 向量运算与应用

|  |  |
| --- | --- |
| 向量 |  |
| 单位向量 |  |
| 方向角 | 向量与坐标轴正向的夹角，记为 |
| 方向余弦 |  |
| 数量积/内积/点积 |  |
| 在上的投影 |
|  |
| 向量积/外积/叉积 |  |
|  |
| 混合积 |  |
| 三向量共面 |

* 1. 平面、直线及位置关系

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 平面  设平面法向量 | ①一般式 |  | |
| ②点法式 |  | |
| ③三点式 | (平面过不共线的三点,i=1,2,3) | |
| ④截距式 | (平面过(a,0,0),(0,b, 0),(0,0,c)三点) | |
| ⑤平面束方程 | 过的平面束方程为 | |
| 直线L  设直线方向向量 | ①一般式 |  | |
| ②点向式 |  | |
| ③参数式 |  | |
| ④两点式 |  | |
| 位置关系 | ①点到直线 |  | d = = |
|  | d = |
| ②点到平面 |  | d = |
| ③直线与直线 | 垂直： | |
| 平行： | |
| 夹角： ，其中 min{()，} | |
| ④平面与平面 | 垂直： | |
| 平行： | |
| 夹角： ，其中 min{()，} | |
| ⑤直线与平面 |  | |
|  | |
| ，其中|| | |

* 1. 切线与法平面

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 曲线方程 | 切线方程 | 法平面方程 | 注： |
| *，*t∈I |  |  | ，曲线在处的切向量为 |
|  |  |  |  |

切平面与法线

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 曲面方程 | 切平面方程 | 法线方程 | 注： |
| ，  F一阶偏导连续 |  |  | 处的法向量 |
| f一阶偏导连续 |  |  | 处的法向量 |

* 1. 空间曲线的投影

投影到面上将曲线中的z消去，得到则曲线在面上的投影曲线包含于曲线

* 1. 旋转曲面
     1. 曲线绕直线旋转：

曲线绕直线 旋转一周而成旋转曲面

与联立消去，便得旋转曲面的方程

* + 1. 曲线绕坐标轴旋转：绕z轴从中解得，，则旋转曲面方程为
  1. 场论初步

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 在处沿  方向*l*的方向导数 |  | 其中是的夹角，当1时，有最大值 |
| 在处的梯度 |  | 是一个向量，它的方向与取得最大方向导数的方向一致，它的模为方向导数的最大值 |
| 向量场**A**的散度 | 则 = | 0，则称A为无源场 |
| 向量场**A**的旋度 | 则 | 0，则称A为无旋场 |

1. 一、二、三重积分
   1. 概念

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 一重积分 | 二重积分 | 三重积分 |
| 和式极限 |  |  |  |
| 普通  对称性 | 积分区间关于原点对称 | 积分区域D关于y轴对称 | 积分空间关于面对称 |
|  |  |  |
| 轮换  对称性 |  | 中的交换后，不变 | 中的交换后，不变 |
|  |  |
| 比大小 |  |  |  |
|  |  |  |  |
| 中值定理 |  | *S* |  |
| 周期性 |  |  |  |

* 1. 计算

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| **直角坐标系** | | |
|  |  | 上下曲面 |
| 旋转曲面，在z处的横截面Dz |
| 令 | **极坐标系** | **柱面坐标系** |
| 被积函数为， | 对极坐标系下的二重积分做定积分 |
|  |  |
| 令 | 3661b15f68770e6f77877004c7d3345 | **球面坐标系**：  被积函数为， |
|  |

* 1. 坐标系转换
     1. 积分区域
     2. 被积函数
     3. 换元法

|  |  |
| --- | --- |
| 一重 |  |
| 二重 |  |
| e.g. |
| 三重 |  |
| e.g. |

1. 曲线积分与曲面积分

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Ⅰ型曲线 | Ⅰ型曲面 | Ⅱ型曲线 | Ⅱ型曲面 |
| 被积函数 |  |  |  |  |
| 被积函数定义在 | 平面曲线（或空间曲线）上 | 空间曲面上 | 平面有向曲线（或空间有向曲线）上 | 光滑的空间有向曲面上 |
| 积分 |  |  |  |  |
| 积分的物理背景 | 以 线密度的曲杆的质量 | 以面密度的曲面的质量 | 变力在平面曲线L（或空间曲线）上沿起点到终点所做功 | 向量函数通过有向曲面的通量 |
| 普通对称性 | 积分区域关于面对称&& | | —— | —— |
| 轮换对称性 | 对调后，积分区域不变 | | —— | —— |
| 计算 | 化为定积分  一投二代三计算 | 化为二重积分  一投二代三计算 | ①平面问题  ②空间问题 |  |

* 1. 一投二代三计算

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  | 一投 | 二代 | 三计算 | |
| Ⅰ型曲线 | 平面 |  |  |  |  | |
|  |  |  |  | |
|  |  |  |  | |
| 空间 |  |  |  |  | |
| Ⅰ型曲面 | |  |  |  |  | |
| Ⅱ型曲线 | | |  |  | | |
| Ⅱ型曲面 | | 拆成三个积分，一个一个算 | 将投到相应坐标面上，若投成直线，则积分为0，若上两个不同的点投到一起了，则将剖成无重合点的若干曲面片 | 将  带入  （若投到面上） | | 将，若的法向量与z轴成锐角，也即的指定侧为上侧时，取+ |

(2)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 格林公式 | 光滑平面曲线L围成平面闭区域D，  P、Q在D上具有一阶连续偏导，  L取正向（人沿L正向前进时左手始终在D内） |  |  | | |
| 斯托克斯公式 | 光滑空间曲线围成光滑有向曲面片，  P、Q、R在空间区域内具有一阶连续偏导，  的方向与的法向量成右手系 |  | | |  |
| 高斯公式 | 有向分片光滑闭曲面围成空间有界闭区域，  P、Q、R在上具有一阶连续偏导，  取外侧 |  | |  | |

* + 1. 格林公式

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 曲线封闭，且无奇点在内部 | 直接用公式 |  |
| 曲线封闭，但有奇点在内部，且除奇点外 | 换路径 |  |
| 非封闭曲线，且 | 换简单路径 | （ 0，0） |
| 非封闭曲线，且 | 加减线使封闭 | （±由L的方向决定） |

注：

1. 单连通区域D内P、Q具有一阶连续偏导，则与路径无关 沿D内任意分段光滑闭曲线L都有 为某二元函数的全微分 为全微分方程 为某二元函数的梯度 在D内处处成立
2. 和，均是指所给场无旋，而无旋场内积分与路径无关
   * 1. 高斯公式

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 曲面封闭，且无奇点在内部 | 直接用公式 |  |
| 曲面封闭，但有奇点在内部，且除奇点外 | 换面（新面的边界无需与原曲面重合） |  |
| 非封闭曲面，且 | 换面（新面的边界需与原曲面重合） |  |
| 非封闭曲面，且 | 加减面使封闭 |  |

* 1. 要求：曲面投到坐标面上不是一条线，且曲面上不同点投到坐标面上不重叠

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Ⅱ型曲面 | 一投二代三计算 |  |
| 转换投影法 |  |

* 1. 型的关系

1. 应用

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 长度 | 曲杆长度（弧长） |  |
| 空间曲线长度 |  |
| 面积 | 平面面积 |  |
| 曲面面积 |  |
| 体积 | 曲顶柱体体积 |  |
| 空间物体体积 |  |
| 引力 | 体积密度为的质量为的质点的引力 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | 平面薄片 | | 空间物体 | | 光滑曲杆 | | 光滑曲面薄片 | |
| 总质量 | |  | |  | | s | |  | |
| 重心/质心  与形心 | |  | |  | |  | |  | |
| 转动惯量 | 对X轴 | |  | |  | | s | |  | |
| 对原点O | |  | |  | | s | |  | |