第 1 章 序言

"对，要学习的东西太多了." 米洛若有所思的皱起了眉.

"没错." 韵律公主说: "但是，光学习是不够的，关键的是：你要知道学这些有什么用，以及为什么要学这些东西."

--- 摘录自《神奇的收费亭》

WHY

这是一本倡导自主学习的高等数学讲义.

做同样的一件事，带着目标去做和不带目标去做的效果是完全不同的. 打个比方，有两个人各自要砍100棵树，第一个人不知道为什么要砍这么多的树. 而另一个人知道这些树是为他来盖房子的. 可以想象，同样在砍树，这两个人内心的感受是不同的，完成的效果也是不一样的：第一个人也许会砍一些松软有蛀虫的 easy 树充数，而第二个人则会主动去砍粗壮硬实的 hard 树，因为这是为他自己的房子. 我们称前者为**被迫砍树**，后者为**自主砍树**.

跟砍树一样，学习也可以分为**被迫学习**和**自主学习**. 本讲义的**设计理念**是**帮助大学生更好的自主学习**. 我们可以把高数学习看成是为自己盖房子，盖房子当然要砍树(做习题)，但我会先把房子的**设计图纸**给大家看，在介绍每个数学概念时，首先让大家明白这些部分是为了造窗，那些部分是为了造门. 当我们明白了所学内容在整个知识体系中的**目的和意义**，自然就会有大局观，有参与感，从而把**被迫砍树**变为**主动砍树**，把**被迫学习**变为**主动学习**.

总之，希望每个同学都把高数学习当成是一场辛苦却有意义的旅程，你的世界观也将因这次旅程而变得更加深刻和丰满.

HOW

如何才能做到自主学习?

长期以来我们的数学教学往往对 `Why` 强调得不够：**为什么要学**? 更多的时候我们是在强调 `What` 和 `How`：先介绍某某定理，然后做习题. 这就像只让我们去砍树，而不告诉我们砍树是为了什么. 中学时代为了练基本功这样做也无可厚非，但在注重知识体系，强调自主探索的大学时代，再这样做就不合时宜了.

自主学习的关键是要告诉学生**为什么要学**，不能只是空洞的说数学很重要，而应该是首先把数学知识体系的设计图纸展示给大家，让大家明白 为什么 要去学某个知识点，以及这个知识点 有什么用 .

高等数学 的主要内容是 **微积分** . 微积分是一个强大的数学工具. **牛顿**借助微积分成功解释了行星运动，这是人类文明历史上浓墨重彩的一笔. 本教材将会围绕**运用微积分解释行星运行规律**这一主线进行展开，我们所学的知识点都能够顺着这条主线串起来. 尽管有些内容会包含一些繁琐的推演和计算，但我相信我们每个人潜意识里对真理的渴望能够克服这些困难，最后让我么不得不感慨微积分的强大力量.

WHAT

如何学好高数

数学直觉的培养和建立.

bilibili 杨振宁：最重要的学习方法

不知名先生影视 关注

00:01 / 02:46 自动 倍速

请大家记住，数学公式本身不值得炫耀，公式背后所蕴含的直觉和图像才价值千金！

如何使用本讲义

本讲义的特点：

- 使用HTML5技术，注重视觉上的舒适性.
- 可在电脑，pad和手机端观看，带有夜晚模式，**对手机用户友好**.
- 手机端可以安装本讲义的APP版本.

为了便于阅读，在讲解每个知识点时，我们大致会按照下面的顺序：

- `Why`：为什么要学它？
- `What`：它是什么？
- `How`：怎么算或怎么用？
- `Exercise`：相关例题
- `Extension`：背景知识或小故事

这五个模块我们会用不同的颜色标记.

EXAMPLE

人工智能与高等数学

人工智能的核心数学基础包括**线性代数**，**微积分**和**概率论**. 线性代数是骨架，微积分是肌肉，概率论是灵魂.

编程与高等数学

数学对于计算机编程的重要性不言而喻，本课程的授课对象为计算机专业本科一年级学生，因此我们在设计讲义的时候会更多的建议数学与编程的联系.

EXTENSION

关于考试

- 平时成绩20%：作业
- 期中考试30%：闭卷
- 期末考试50%：闭卷

无考勤，考试本身保证公平性，但是课堂上讲的内容会对考试有帮助.

致谢：

- 首都师范大学数学科学学院
- 首都师范大学交叉科学研究院
- 北京国家应用数学中心
- Typora
- Vlook

参考书目：

- 《高等数学》(第七版)上册， 同济大学数学教研组主编， 高等教育出版社.
- 部分图片和视频来自于 Wikipedia 等网络资源.

第 2 章 集合与映射

WHY

集合与映射是数学研究从具体到抽象的第一步.

举个例子，比如我们上这门高数课，最后需要给每个上课的学生一个成绩，这是我们的具体任务. 为了从数学上来更加严格的描述这个任务，我们可以把所有选课的同学构造成一个**集合** S，同时把所有可能的成绩（比如A，B，C，D四个档次）构造成另一个**集合** G，那么给学生成绩的这个任务在数学上就可以看成是**从集合 S 到集合 G 的一个映射**. 这个映射具体怎么实现是有讲究的，而通过数学的办法可以让这个映射变得更方便，更直观，也更公平，这个我们后面再展开.

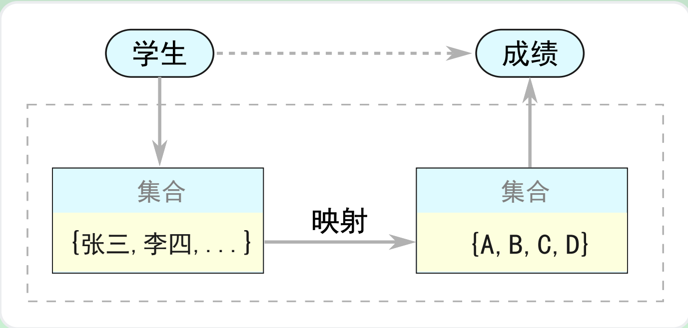


图 1. 集合是数学抽象

2.1 集合

2.1.1 集合的概念

WHY

当我们用**数学语言**来描述世界时，首先要把我们**感兴趣的对象**给拿出来，进行适当的抽象，然后再研究它们的规律. **集合**就是数学中用来界定对象的一个概念.

EXAMPLE

集合举例

1. 太阳系八大行星 --- {水星, 金星, 地球, 火星, 木星, 土星, 天王星, 海王星}
2. 10个阿拉伯数字 --- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
3. 一个班所有男生的姓氏 --- {李, 王, 张, 杨, 周, 诸葛, 徐, 孙, 胡}
4. 1 ~ 10 之间的所有偶数 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
5. 自然数集 --- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$
6. 整数集 --- $\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots\}$
7. 实数集 --- $\mathbb{R} = \{x : -\infty < x < \infty\}$
8. 满足不等式 x-3<10 的所有实数 x --- $A = \{x < 7\}$

HOW

我们把所要研究的对象统称为**元素**（element），这些元素所组成的总体叫做**集合**（set）.

描述集合的方式既可以通过文字叙述，也可以把所有的元素写在 {} 里面，不管用那种方式，一定要让人能够判断某个对象是不是在这个集合里.

集合需要满足下面两个性质：

1. **互异性**：集合中的任何两个元素都是不同的.比如在集合3的例子中，即使这个班里有3个同学姓“王”，在集合3中“王”姓也只出现一次，重复的不算.
2. **无序性**：集合中的元素没有顺序之分. 所以集合 {水星, 金星, 地球} 与集合 {地球, 水星, 金星} 是没有区别的.

WHAT

一般用大写字母如 A, B, C 表示集合，用小写字母如 x 或 a, b, c 来表示集合中的元素.

我们说一个对象**在**或**不在**一个集合中，用数学术语就是**属于**或**不属于**：

- 如果 x 是集合 A 的元素，就说 x **属于** 集合 A ，记作 $x \in A$;
- 如果 x 不是集合 A 中的元素，就说 x **不属于** 集合 A，记作 $a \notin A$.

EXTENSION

图像掩码是计算机视觉中的重要概念. 掩码 (mask) 通常是一个二值 (0或1) 图像, 像素值为0表示不关心的区域, 1表示感兴趣的区域. 因此所有像素值为1的像素点构成的集合就是我们感兴趣的区域 (ROI, Region of Interest). 比如下图中, 左侧是我们拿到的一张图片, 我们只关心图片中花朵的区域, 因此对应的掩码就是中间的一个二值图像 (黑色区域的像素值为0, 白色区域的像素值为1), 将这个掩码逐像素的跟原图相乘, 得到的结果就是右边的这张只有花朵的图 (花朵部分的值跟原图一样, 花朵部分之外的值都等于0).

图 2. 图像掩码

2.1.2 单个集合的性质

WHY

集合是一个包罗万象, 不同的集合可能包含截然不同对象, 我们在研究集合的时候, 首先要搞清楚**集合内部元素的性质**.

HOW

有序性

如果一个集合中的元素可以排序, 那么这个集合就是**有序集**, 否则就是**无序集**.

注意这个并不是一个严格的数学定义, 即使在实际操作中也是模糊的, 比如集合 $\{红, 绿, 蓝\}$, 理解成三个汉字的话可能无法排序, 但理解成颜色所对应的波长则可以间接的通过波长大小进行排序. 所以关键的问题是, 你在建立这个集合时所关心的**具体问题**是什么. 我们在使用集合这个工具的时候一定要先想清楚这一点, 这很重要, 尤其是对于学习**编程**的同学! 例如, 在程序里, 有序集中的元素可以通过指标很方便的访问, 还可以使用 **QuickSort** 算法; 而访问无序集中的元素则需要一个一个去比较, 也无法使用 QuickSort 算法!

EXAMPLE

有序性

有些集合中的元素之间是可以比较大小的, 如:

- 实数集 $\mathbb{R}$
- 音阶集 $\{哆, 来, 咪, 发, 嗦, 啦, 西\}$

也有些集合中的元素之间是不能比较大小的(至少并不明显), 如:

- 天气集 $\{天晴, 多云, 下雨, 雾霾\}$
- 动物集 $\{猫, 狗\}$

HOW

等价关系

如果我们能够在一个集合上定义某种**等价关系**, 那么凡是“等价”的元素都可以划分到一个子集中, 而这些子集也被称为**等价类**. **等价关系**是集合元素间的一种二元关系, 以符号 $\sim$ 表示, 它满足以下三个条件:

1. **自反性**: 对于所有 $a \in A$, 有 $a \sim a$.
2. **对称性**: 对于所有 $a, b \in A$, 如果 $a \sim b$, 则 $b \sim a$.
3. **传递性**: 对于所有 $a, b, c \in A$, 如果 $a \sim b$ 且 $b \sim c$, 则 $a \sim c$.

EXAMPLE

等价关系

- 整数集 $\mathbb{Z}$ 模 2 的等价关系: 如果 a, b 除 2 的余数相等则 a 和 b 等价. 在该等价关系下, 所有偶数 (除2余0) 构成了一个等价类, 所有奇数 (除2余1) 构成了另一个等价类.

- 记某个班全体同学构成的集合为 A，如果 a,b 两位同学坐在同一列则 a 和 b 等价．在该等价关系下，每一列的同学构成一个等价类．

HOW

一些常用的集合性质

- 有限集（有穷集）：含有有限个元素的集合，如 $\{2,4,5,8\}$．
- 无限集（无穷集）：含有无穷多个元素的集合，如自然数集 $\mathbb{N}$．

数集中常用的性质还有

- 有界集：集合中的所有元素 x 的绝对值都小于 M，如开区间 $(0,1)$．
- 无界集：如 $(0,+\infty)$．

2.1.3 集合之间的关系

WHY

集合 A 和 B 之间能不能进行比较?有没有大小关系?

HOW

两个集合之间可以的包含关系

如果集合 A 中**任意**一个元素都是集合 B 中的元素，则称 A **包含于** B（或 B **包含**A），记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$，此时称 A 为 B 的 **子集**（subset）．

基于集合的包含关系我们再引入两个概念：

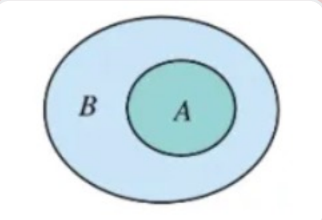
1. **空集**：不包含任何元素的集合叫做 **空集**（emptyset），记为 ϕ，空集是任何集合的子集．
2. **集合相等**：如果 $A \subseteq B$，同时 $B \subseteq A$，则集合 A，B 中的元素是完全一样的，此时我们说集合 A 等于集合 B，记作$A = B$．

WHAT

借助图像表示集合间的包含关系

集合 A 包含于集合 B 可以用下图表示

图 3．集合的包含关系



EXAMPLE

下面例子中的 A 和 B 存在包含关系：

1. $A = \{1,2,3\}$，$B = \{1,2,3,4,5\}$．
2. A 为一个班所有男生，B 为该班所有学生．
3. A 为所有等腰三角形，B 为所有三角形．

下面例子中的 A 和 B 不存在包含关系（找反例）：

1. $A = \{1,2,6\}$，$B = \{1,2,3,4,5\}$．
2. A 为一个班所有男生，B 为该班所有女生．
3. A 为所有等腰三角形，B 为锐角三角形．

2.1.4 集合之间的运算

WHY

集合 A 和 B 之间能不能做运算? 加 减 法是没有的，但是有 交 并 补 运算．

HOW

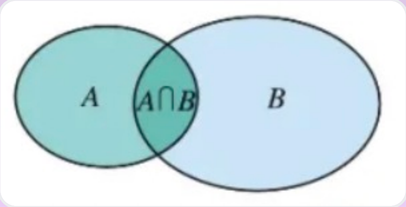
交集

所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的 **交集** (intersection set)，记作 $A \cap B$ (读作"A 交 B")，即

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ and } x \in B\}$$

下图展示了交集运算：

图 4. 交集



EXAMPLE

1. $A=\{2,4,6,8,10\}$，$B=\{3,5,8,12\}$，则 $A \cap B=\{8\}$.
2. $A=\{$全校女同学$\}$，$B=\{$所有高一级同学$\}$，$A \cap B=\{$高一级全体女同学$\}$.

HOW

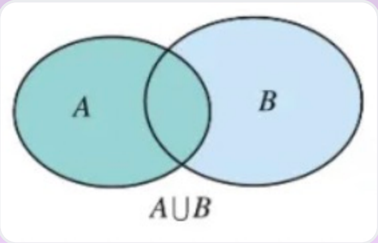
并集

所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的 **并集** (union set)，记作 $A \cup B$ (读作" A 并 B ")，即

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B\}$$

下图展示了并集运算：

图 5. 并集



EXAMPLE

1. $A=\{1,3,5\}$，$B=\{2,4,6\}$，$A \cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$;
2. $A=\{$有理数$\}$，$B=\{$无理数$\}$，$A \cup B=\{$实数$\}$.

HOW

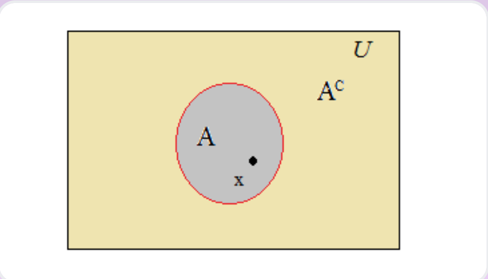
补集

如果集合 A 是集合 B 的子集，则所有 B 中不属于 A 的所有元素构成的集合称为 A 相对于 B 的 **补集** (complementary set)，记作 A^C 或 $\bar{A}$ 或 $C_B A$，即

$$C_B A = \{x \in B : \ x \notin A\}$$

下图展示了补集运算：

图 6. 补集



EXAMPLE

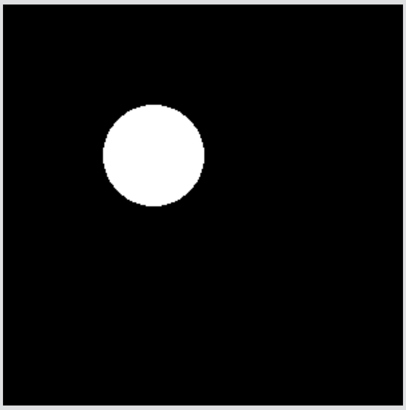
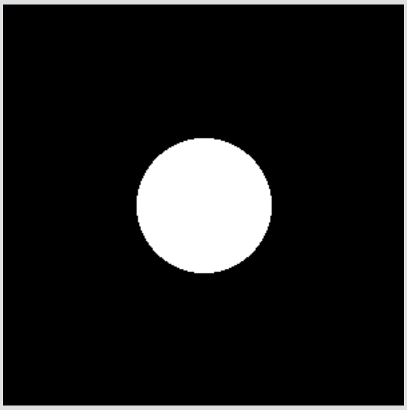
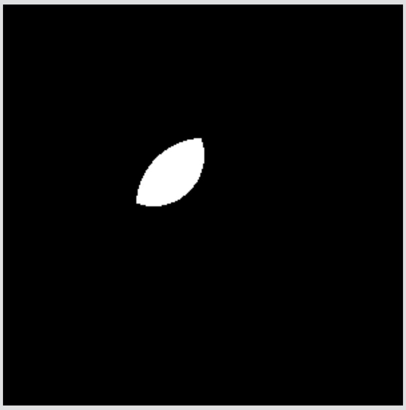
1. $A=\{1,3,5\}$, $B=\{1,2,3,4,5,6\}$, $C_BA=\{2,4,6\}$.
2. $A=\{\text{有理数}\}$, $B=\{\text{实数}\}$, $C_BA=\{\text{无理数}\}$.

EXTENSION

图像掩码与集合的交集

假设在一个图像里面我们有两个感兴趣的区域集合 A 和集合 B，分别对应掩码 M_A 和 M_B，则集合 $A\cap B$ 对应的掩码可以通过逐像素相乘运算得到，即 $M_{A\cap B}=M_A*M_B$，其中 $*$ 表示每个对应位置的像素分别相乘.

表 1. 掩码的交集

		
M_A	M_B	$M_{A\cap B}$

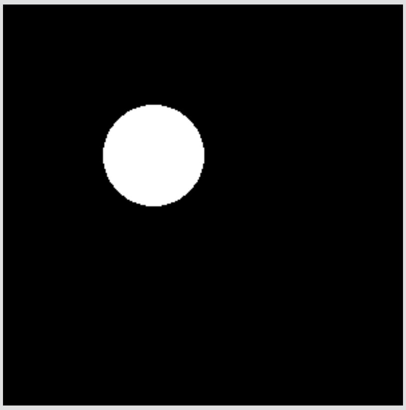
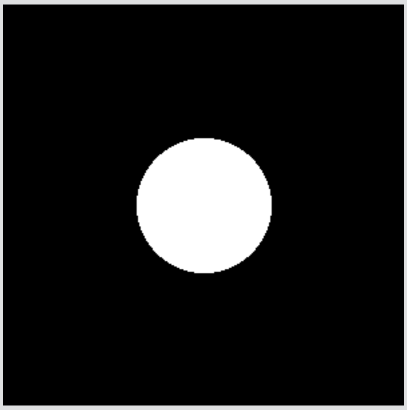
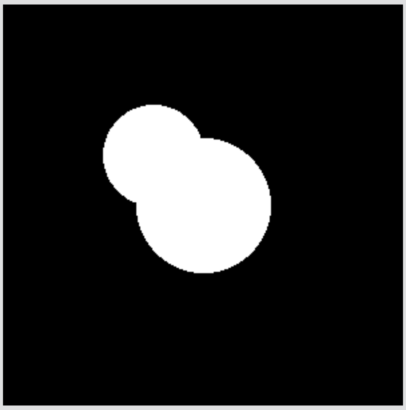
图像掩码中的集合并运算

假设在一个图像里面我们有两个感兴趣的区域集合 A 和集合 B，分别对应掩码 M_A 和 M_B，则集合 $A\cup B$ 对应的掩码可以通过逐像素作"或"运算得到."或"运算的符号为 $\vee$，运算规则为

$$1\vee 1=1,\ 1\vee 0=0\vee 1=1,\ 0\vee 0=0.$$

我们有 $M_{A\cup B}=M_A\vee M_B$.

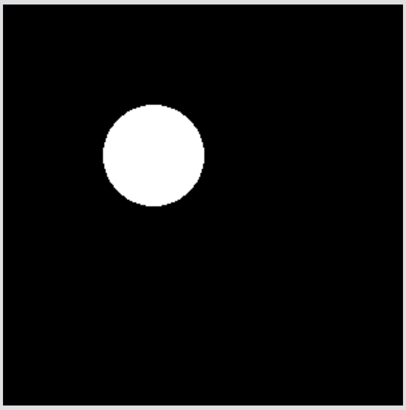
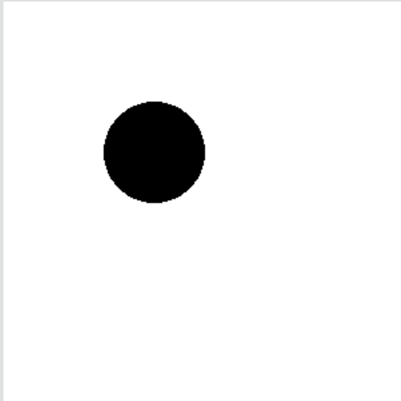
表 2. 掩码的并集

		
M_A	M_B	set $M_{A\cup B}$

图像掩码与集合的补集

如下图，假设在一个图像里面我们有一个感兴趣的区域集合 A，对应掩码 M_A，则图像中我们不感兴趣的区域可以看成是集合 A 在以整个图像为全集的补集 C_MA，C_MA 可以通过取反运算得到，即 $M_{C_MA}=\mathrm{NOT}(M_A)$，其中 NOT 表示每个对应位置的像素分别取反运算 $(\mathrm{NOT}(0)=1,\mathrm{NOT}(1)=0)$.

表 3. 掩码的补集

	
M_A	$M_{C_M A}$

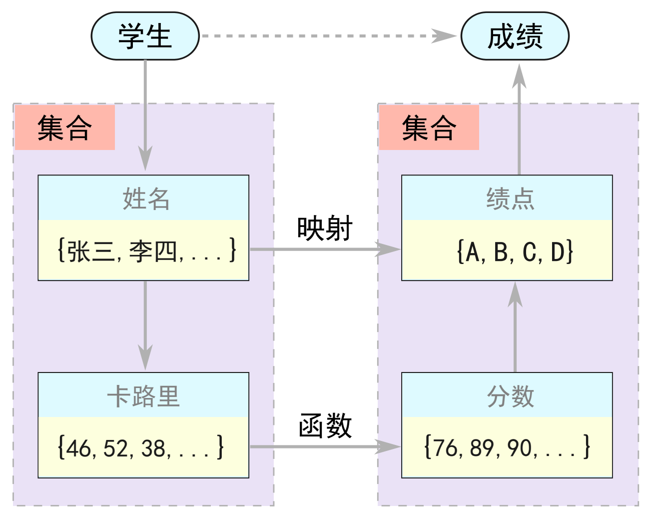
2.2 映射

WHY

前面讲那么多的**集合**，全是为了给**映射**做铺垫．映射是集合与集合之间的关联，集合对数学就好像计算机中的**键盘**，无非就是100多个键；而映射对数学就好像计算机中的**程序**，变幻无穷．

回到我们之前给学生打分的例子，为了更加合理的给学生打分，我们可以把学生努力的程度转化成数值，然后把分数对应成绩点，从而把打分的问题变成了一个从数到数的映射，也就是**函数**．可以看到函数是用来解决具体问题的一个很方便的工具．

图 7. 图片



HOW

映射的定义

映射（map）描述了从一个集合到另一个集合的某种对映关系．设集合 A 和 集合 B 是两个集合，如果存在一个对映关系 f，使得集合 A 中的每个元素都唯一的对映到 B 中的一个元素，则称 f 为从 A 到 B 的映射，记作

$$f : A \to B$$

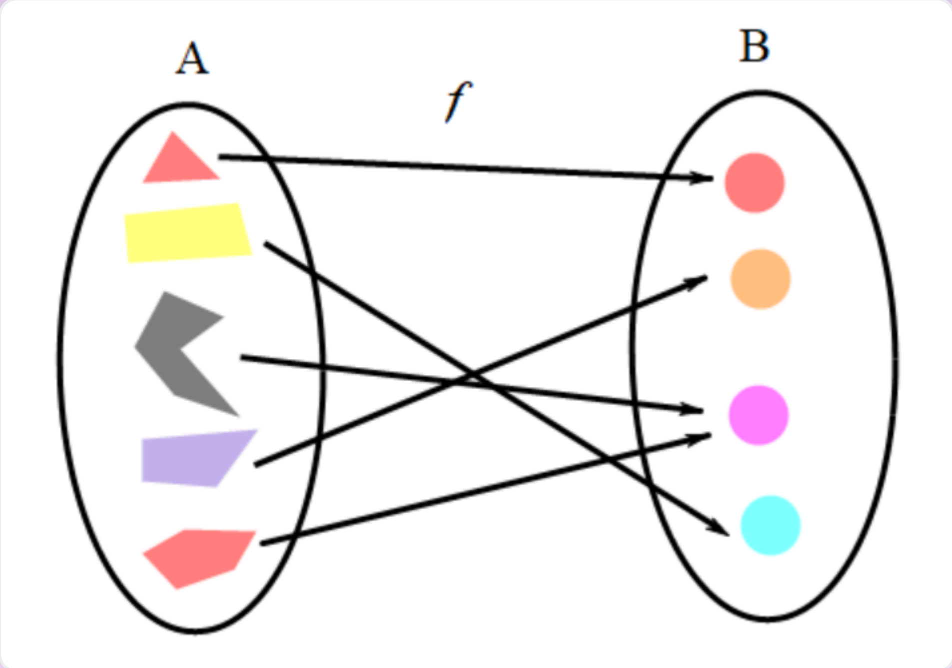
映射 f 把集合 A 中的元素 a 对映到 B 中的元素 b，可记作

$$f(a) = b$$

此时 b 称为 a 的**象**，a 称为 b 的**原象**．

映射可以通过下面的图像来理解：

图 8. 映射



图中箭头表示了集合 A 中元素与集合 B 中元素的对映关系.

根据定义，映射需要满足两个要求：**随处取值**，**唯一对映**.

- **随处取值**是指 A 中的任何一个元素在 B 中都有对映；
- **唯一对映**是指 f 可以把 A 中的不同元素映射到 B 中的同一个元素，但不能把 A 中的一个元素映射到 B 中的多个元素.

WHAT

映射的性质

1. **单射**：如果 A 中的每个元素都对映 B 中的不同元素，则称 f 为单射.
2. **满射**：如果 B 中的每个元素都有原象，则称 f 为满射.
3. **一一映射**：顾名思义，一一映射就是集合 A 中元素与集合 B 中的元素一个对映一个.
   可以证明，f 是一一映射等价于 f 既是单射又是满射.

逆映射

对于一一映射 $f: A \to B$，把映射的象和原象反过来，得到一个把集合 B 映射到集合 A 的新的映射，称为逆映射，记作 $f^{-1}: B \to A$.

EXAMPLE

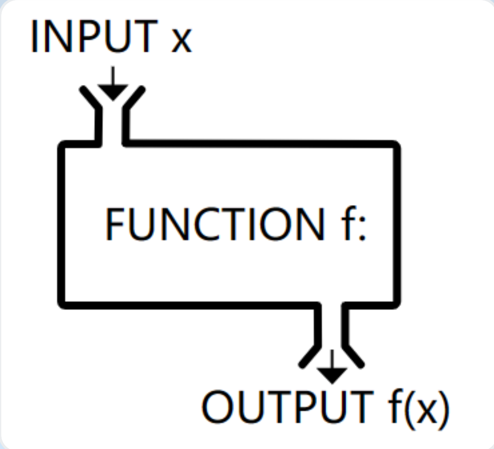
映射的例子

映射的例子在我们的生活中随处可见，例如：

1. **名字**：集合 A 是所有的人，集合 B 是所有的名字. 每个人都有一个名字，我们允许重名，但不允许一个人有2个名字.
2. **地图**：没错，map 本身就是一个 map！（我们希望）这是一个从地图到真实世界的一一映射.
3. **颜色**：为什么我们能看到不同的颜色？颜色是一个从光波长到我们主观感受的映射.

从上面的例子可以感受到，映射的作用在于把集合 A 中的元素作为**输入信号**，例如如不同的人、GPS坐标、光的波长等，经过某种操作，转换成我们关心的输出，如名字、位置和颜色. 从这个意义上理解，映射就是就是把输入 x 转化成 $f(x)$ 的一个机器.

图 9. Function

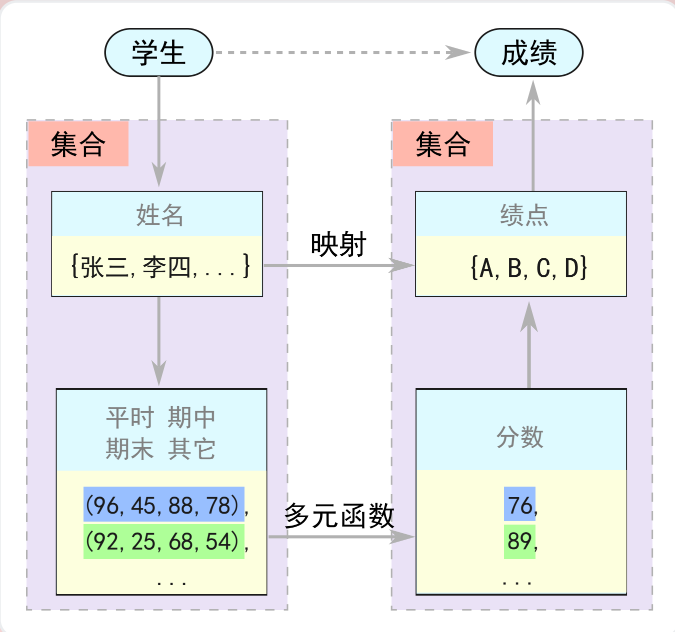


WHAT

映射与函数

映射的概念如此重要，以至于在不同的场合映射还有不同的专业名称．在计算机编程中，**函数**(function) 就是映射，是一个从输入 (可以是数、数组、函数等) 到输出 (也可以是数、数组、函数等) 的一系列操作．在数学里，当集合 A 和 B 都是数集的时候，映射也叫做**函数**(function)，如函数 $f(x) = 2x + 3$ 是一个从实数集到实数集的一个映射．函数是高等数学上册的主要研究对象，而多元函数 (从 n 维实数空间到实数空间的映射，$n > 2$)则是高等数学下册的主要研究对象 (前面的给学生打分的例子可以进一步细化成一个多元函数，也就是把平时，期中，期末和其它因素的成绩统一考虑，然后映射到一个分数上)．

图 10. 图片



2.2.1 数列

WHY

数列是一类特殊的映射，它把自然数集 $\mathbb{N}$ 映射到实数集 $\mathbb{R}$ 中，进一步，这还是一个数到数的映射，因此同时也是一个函数，这个函数可以记作 $a(n)$，不过更多的时候我们会把 n 作为下标，以 a_n 表示数列得第 n 项，并以 $\{a_n\}$ 表示整个数列．

ⓘ EXAMPLE

等差数列

- 首项为 a_1，公差为 d 的等差数列的**通项公式**为

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

- 等差数列的**前 n 项和**为

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

ⓘ EXAMPLE

等比数列

- 首项为 a_1，公比为 q 的等比数列的**通项公式**为

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

- 等比数列的**前 n 项和**为

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1)$$

2.2.2 函数

WHY

函数是用数学解决实际问题的重要**工具**，函数之于数学就像**程序**之于计算机．

学习函数的时候不要去跟冰冷的公式硬刚，而应该把函数的图像放在心里，产生画面感，把公式具象化，成为直觉的一部分．因此，**函数的图像非常非常非常重要**！

HOW

函数的定义

从**数集** A 到**数集** B 的映射 $f: A \to B$ 称为**函数**（function）. 可以把函数写成 $y = f(x)$ 的形式，并把 x 称为**自变量**，y 称为 x 对映的**函数值**．

ⓘ EXAMPLE

初等函数

1. 幂函数：$y = x^\alpha$
2. 指数函数：$y = a^x$，特别的有 $y = \mathrm{e}^x$，后者在 python 中有专门的函数 $numpy.exp(x)$
3. 对数函数：$y = \log_a^x$，特别的有 $y = \ln^x$，后者在 python 中有专门的函数 $numpy.log(x)$
4. 三角函数：$y = \sin(x)$，$y = \cos(x)$，$y = \tan(x)$
5. 反三角函数：$y = \arcsin(x)$

其它常用函数

1. 绝对值函数：$y = |x|$
2. 符号函数

$$y = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

3. Sigmoid函数

$$\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

ⓘ EXAMPLE

函数的性质

- 单调性
- 奇偶性
- 周期性

WHAT

反函数

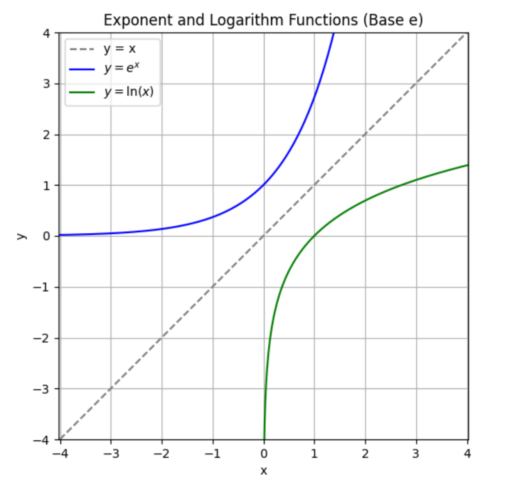
反函数是**逆映射**的一个特例，对于函数 $f: x \to y$（也要求 f 是一一映射），其反函数为 $f^{-1}: y \to x$.

EXAMPLE

- $y = 3x + 1$ 的反函数为 $y = (x-1)/3$
- $y = \mathrm{e}^x$ 的反函数为 $y = \ln x$.

反函数本质上是把 x 和 y 的顺序对调了一下，因此不难发现原函数与反函数的图像是关于直线 $y = x$ 对称的.

图 11. 反函数图形的对称性



WHAT

复合函数

对于函数 f 和 g，我们可以构造一个**新的函数** $y = f[g(x)]$，它把自变量 x 通过函数 g 映射到 $u = g(x)$，再把 u 视作自变量（也称为**中间变量**）通过函数 f 映射到 $y = y = f[g(x)]$. 这个过程可以表示为：

$$x \xrightarrow{g} u \xrightarrow{f} y.$$

我们把这个新函数 $y = f[g(x)]$ 称为函数 f 和 g 的**复合函数**，记作 $f \circ g$. 注意函数复合是讲顺序的，一般来说 $f \circ g \neq g \circ f$.

EXAMPLE

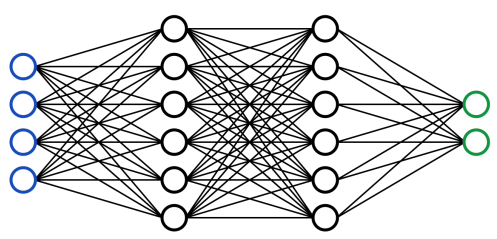
假设 $f(x) = x + 2$, $g(x) = x^2$，则

$$f \circ g = g(x) + 2 = x^2 + 2, \qquad (1)$$
$$g \circ f = [f(x)]^2 = (x+2)^2. \qquad (2)$$

EXTENSION

深度学习与复合函数

图 12. 神经网络



人工智能中的核心技术为**深度学习**，深度学习的背后其实就是有很多层（从几十到几千层都有）的**神经网络**（Neuron Network）. 神经网络的本质正是复合函数. 对于图中所示的神经网络，从最左端的**输入信号**开始，之后每一层都是上一层信号的复合，因此神经网络就是一个复合了很多次的函数，这个函数把输入（比如一张图片）映射到我们关心的结果（比如图像中有只猫的概率）.

第 3 章 极限

WHY

极限是高等数学有别于初等数学的核心概念. 极限的出现代表了数学思想的一次转变，而促成这一转变的动机来自于现实问题中对**曲线**相关问题的需求. 在初等数学中我们会计算矩形的周长和面积，会计算三角形的周长和面积，甚至是任意多边形的周长和面积，但是，这些都是由直线构成的结构，而到了曲线大家就不会了. 曲线的长度怎么算？由曲线构成区域的面积怎么算？尽管我们初中就知道圆的周长是 $2\pi r$，面积是 πr^2，但是为什么是这样，只有运用微积分才能给出严格的证明.

如果我们拿西游记作为类比，那初等数学就是**小乘佛法**，可以修身养性，而微积分则是**大乘佛法**，可以普度众生．数学史上，微积分的确立历经了千难万险，九九八十一难，要说这里面的**孙悟空**之名，我认为当属**牛顿**：牛顿的时代还没有微积分，正是他开创性的运用我们今天微积分中的各种思想和方法，成功的解决了**天体运行理论**（注意天体运行的轨迹就是**曲线**），开启了人类理性思潮的革命．

今天，我们将追随西天取经的足迹，开启一场精神朝圣之旅．一路上我们会经历重重磨难，但最终我们会穿上牛顿的衣钵，运用我们所学的微积分，来推导**天体运行理论**，揭示宇宙运行的奥义．而**极限**是我们西行路上的第一难，这个**观念上的转变**是重要的，我们一开始慢慢来，好好的理解，这个转变做得**越深刻越彻底**，对以后的学习就越有帮助．

3.1 数列极限

WHY

极限与圆的面积

圆的面积怎么算？我们来看教材 P18 的例子．这个例子体现了极限中从有限到无限再到极限的思想：为了计算圆的面积，我们构造了一**系列**圆的内接正多边形，这些正多边形的面积是可以通过初等数学计算的，我们把它们的面积记作 $A_n, n = 1, 2, \cdots$．通过**直觉**我们能感受到，**当 n 趋于无穷大时，A_n 的面积会无限接近圆的面积**．接下来我们要做的就是**把这个直觉通过数学语言给严格化**．

极限是一个**动中取静**的过程．

- 什么在动？
  在上面的例子中，我们构造了一个数列 $\{A_n\}$，前面说过数列是个从自然数集 $\mathbb{N}$ 到实数集 $\mathbb{R}$ 的映射．我们说的**动**发生在集合 $\mathbb{N}$ 中，指标 n 从 1，2 直到 1千，一万 ...，这是**数列极限**概念中**动**的部分．
- 什么是静？
  数列极限概念中**静**的部分来自于集合 $\mathbb{R}$ 中，它表示 A_n 的取值会慢慢**趋于稳定**，到最后**几乎不变**了，数学上我们称这种行为叫**收敛**．

EXAMPLE

极限存在的例子

一尺之捶，日取其半（版本1）

站在棒子的角度，这个过程可以用一个数列描述．n 代表天数，a_n 代表杠剩下的长度．

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= 1/2, \\ a_2 &= 1/4, \\ &\cdots \\ a_n &= 1/2^n, \\ &\cdots \end{aligned}$$

随着 n 的增加（**动**），a_n 的值不断靠近0（**静**），直觉告诉我们当 n 区域无穷大时 a_n 的极限是0．

一尺之捶，日取其半（版本2）

站在砍棒人的角度，这个过程也可以用一个数列描述．n 代表天数，b_n 代表到第 n 天为止所取的棒子的总数．

$$\begin{aligned} b_0 &= 0, \\ b_1 &= 1/2, \\ b_2 &= 1/2 + 1/4 = 3/4, \\ &\cdots \\ b_n &= 1/2 + 1/4 + \cdots + 1/2^n = 1 - \frac{1}{2^n}, \\ &\cdots \end{aligned}$$

随着 n 的增加（**动**），b_n 的值不断靠近1（**静**），直觉告诉我们当 n 区域无穷大时 b_n 的极限是1．

P21 例1

$$a_n = \frac{n + (-1)^{n-1}}{n}$$

随着 n 的增加（**动**），a_n 的值不断靠近1（**静**），直觉告诉我们当 n 区域无穷大时 a_n 的极限是1．

P22 例2

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^2},$$

随着 n 的增加（**动**），a_n 的值不断靠近0（**静**），直觉告诉我们当 n 区域无穷大时 a_n 的极限是0．

EXAMPLE

极限不存在的例子

例3

数列 $\{1, -1, 1, -1, \cdots\}$ 不收敛，因为直觉告诉我们这个数列**静**不下来．

例4

数列 $\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$ 不收敛，这个数列不断增长，直觉告诉我们这个数列也**静**不下来．

直觉：所以数列 $\{a_n\}$ 有极限就是，当 n 足够大时，a_n 的值无限接近某个数 A.

HOW

数列极限的定义（非常重要！！！）

设 $\{a_n\}$ 为一数列，A 为一常数，如果**对于任意给定的正数** ε，**总存在正整数** N，使得当 $n > N$ 时有

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

则称 A 为数列 $\{a_n\}$ 的**极限**，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

EXAMPLE

上述定义把数列极限的直觉具象化了，从而使得直觉变得可操作了. 根据定义，我们现在可以严格的判断前面例子中数列的极限.

一尺之捶，日取其半（版本1）

直觉：$a_n = 1/2^n$ 的极限为0.

证明：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，要找到 N 使得 $|1/2^N - 0| = 1/2^N < \varepsilon$，取 $N = [-\ln\varepsilon/\ln 2] + 1$，可知当 $n > N$ 时，总有 $|a_n - 0| < \varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

一尺之捶，日取其半（版本2）

直觉：$b_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ 的极限为1.

证明：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，要找到 N 使得 $|1 - 1/2^N - 1| = 1/2^N < \varepsilon$，取 $N = [-\ln\varepsilon/\ln 2] + 1$，可知当 $n > N$ 时，总有 $|b_n - 1| < \varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$.

P21 例1

直觉：$a_n = \dfrac{n + (-1)^{n-1}}{n}$ 的极限为1.

证明：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，要找到 N 使得 $\left|\dfrac{n + (-1)^{n-1}}{n} - 1\right| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$，取 $N = [1/\varepsilon] + 1$，可知当 $n > N$ 时，总有 $|a_n - 1| < \varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

P22 例2

直觉：$a_n = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ 的极限为0.

证明：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，要找到 N 使得 $\left|\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2} - 0\right| = \dfrac{1}{(n+1)^2} < \varepsilon$，取 $N = \left[\sqrt{1/\varepsilon}\right]$，可知当 $n > N$ 时，总有 $|a_n - 0| < \varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

EXTENSION

在极限的概念里，**有限**和**无限**，**动**和**静**交汇到了一起.

- 任意改变数列的有限多项，不影响极限的收敛.

WHAT

数列极限的几条性质（了解，不需要证明）

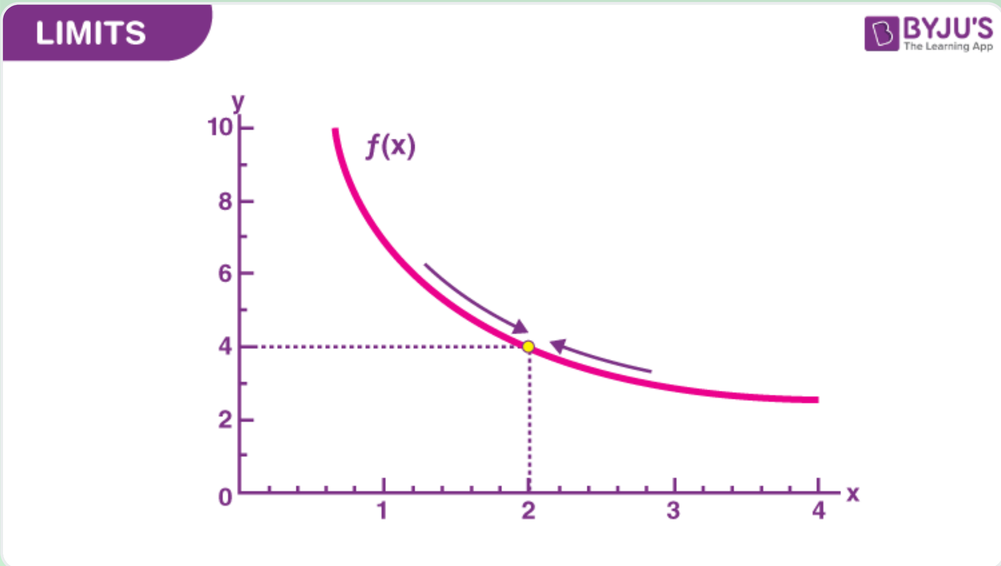
1. 如果数列 a_n 有极限，那么它的极限唯一.
2. 如果数列 a_n 有极限，那么数列 a_n 一定有界.
3. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，且 $A > 0$，那么存在正整数 N，当 $n > N$ 时有 $x_n > 0$.
4. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，那么 a_n 的任一子数列的极限也是 A.

3.2 函数极限

WHY

函数极限跟数列极限本质上都是极限，都是**动中取静**，只不过数列极限中动的是 n，而函数极限中动的是自变量 x. 之前我们强调过**函数图像**的重要性，函数的极限过程同样可以通过函数图像来理解. 下面这张图可以作为我们对函数极限的**直觉**，图中展示了 $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$，请大家想想在这个极限过程中什么在**动**，什么是**静**？

图 13. 函数极限



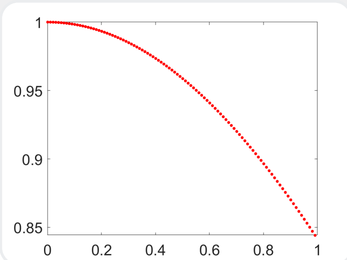
EXAMPLE

考虑函数 $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$ 在 $x\to 0$ 时的极限. 从下面的表格和图像中我们**感觉**这个极限等于1.

表 4. 函数极限举例

x	$\dfrac{\sin(x)}{x}$
1	0.841471...
0.1	0.998334...
0.01	0.999983...

图 14. 函数图像



直觉: 所以函数 $\{f(x)\}$ 在 $x\to x_0$ 时有极限就是, 当 x 足够接近 x_0 时, $f(x)$ 的值无限接近某个数 A.

注意跟数列极限进行对比:

> 数列 $\{a_n\}$ 有极限就是, 当 n 足够大时, a_n 的值无限接近某个数 A.

HOW

函数极限的定义 (非常重要!!!)

设函数 $\{f(x)\}$ 在点 x_0 的某一去心领域内有定义 (为了让 x 能够动起来), A 为一常数. 如果**对于任意给定的正数** ε, **总存在正数** δ, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有

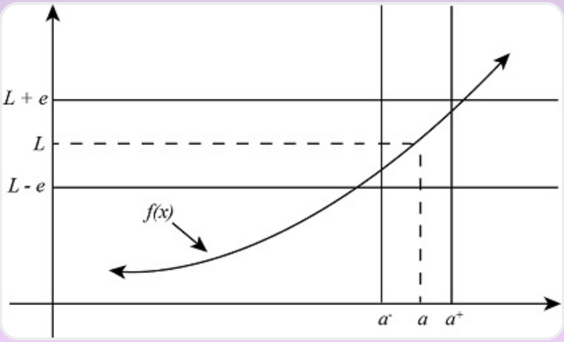
$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 为函数 $\{f(x)\}$ 在 x_0 的**极限**, 记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

上述定义可以通过下图来理解

图 15. 函数极限



EXAMPLE

跟数列极限的定义一样，上面关于函数极限的定义提供了一个**可操作的流程**，能够将我们关于函数极限的直观**具象化**.

例1

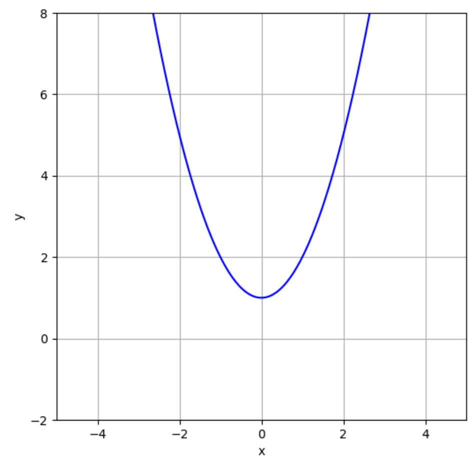
直觉：$f(x) = x^2 + 1$ 在 $x_0 = 2$ 的极限为5.

证明：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，要找到 δ 使得只要 $0 < |x - 2| < \delta$，总有

$$\begin{aligned} |f(x) - 5| &= \left|x^2 + 1 - 5\right| \\ &= \left|x^2 - 4\right| \\ &= |x - 2|\,|x + 2| \\ &< 2.5|x - 2| < \varepsilon \end{aligned}$$

取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2.5}$，可知当 $0 < |x - 2| < \delta$ 时，总有 $|f(x) - 5| < \varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$.

图 16. 函数极限例1

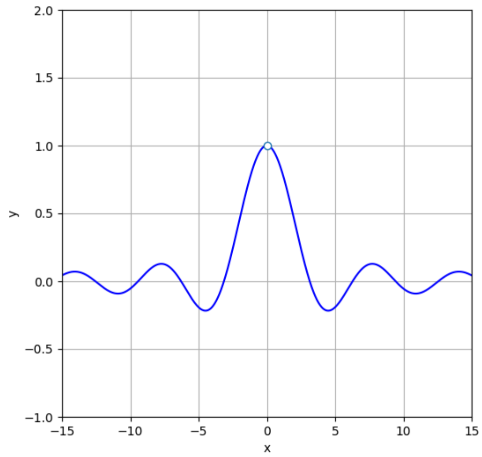


例2

直觉：$\dfrac{\sin(x)}{x}$ 的极限为1.

证明：根据定义来证明这个极限比较困难，后面我们会介绍更加强大的方法.

图 17. 一个重要的函数极限



WHAT

函数极限的性质

1. 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，则极限唯一.
2. 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则 $f(x)$ 在 x_0 周围有界，即存在 $M > 0$ 和 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $|f(x)| < M$.
3. 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A > 0$，则 $f(x)$ 在 x_0 周围一定大于0，即存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $f(x) > 0$.

EXTENSION

$\varepsilon - \delta$ 语言

本章的主要内容是**数列极限**和**函数极限**的**定义**，在数学上我们也把这套定义极限的方法称为 $\varepsilon - N$ 语言（数列）或 $\varepsilon - \delta$ 语言（函数）. 这样的定义看似繁缛，但只有这样才能把极限的本质说清楚. 初学者不要怕麻烦，做题时应该一字一句的把极限的定义写清楚. 怕麻烦不想写字的同学，在熟练掌握了极限的定义之后，可以使用两个约定的缩写符号：

1. $\forall$: **对于任意**
2. $\exists$: **存在**

使用这两个符号，数列极限和函数极限的定义可以写成下面的形式（仅仅是少几个字而已）.

数列极限的定义

$\lim_{n\to\infty} a_n = A \iff \forall\varepsilon > 0, \exists N, \text{s.t.}, |a_n - A| < \varepsilon$ if $n > N$.

函数极限的定义

$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \iff \forall\varepsilon > 0, \exists\delta, \text{s.t.}, |f(x) - A| < \varepsilon$ if $0 < |x - x_0| < \delta$.

EXTENSION

对无穷大的描述

我们有时候会说一个数列或函数**趋于无穷大**，也会写 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ 或 $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$，请注意，这只是一种**习惯**上的说法，并**不是**真正意义上的（有限的）极限. 尽管如此，我们可以借用类似 $\varepsilon - N$ 语言的做法来从数学上定义什么叫**趋于无穷大**，例如：

数列趋于无穷大

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \iff \forall M > 0, \exists N, \text{s.t.}, |a_n| > M$ if $n > N$.

函数趋于无穷大

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \iff \forall M > 0, \exists\delta, \text{s.t.}, |f(x)| > M$ if $0 < |x - x_0| < \delta$.

第 4 章 极限的运算

WHY

这一讲我们主要关心如何计算极限.

- 对于一些简单的极限计算，每次都用直觉和 $\varepsilon - \delta$ 语言来计算极限太繁琐，也没有必要. 很多时候**极限的四则运算**能够帮上大忙.
- 有一些困难的极限问题，我们需要跟强大的数学结论和工具，本讲介绍的**三明治定理**和**单调有界数列有极限**请收好.

注意，本讲的性质和定理全部都建立在上一讲**极限定义**的基础之上，其根本还是 $\varepsilon - \delta$ 语言.

EXTENSION

希尔伯特的旅店

极限运算涉及到了**无限**的概念，对初学者来说这是一个之前从未踏足过的位置领域，一些**有限世界中的直觉**将不再成立. **希尔伯特的旅店**是一个有趣的故事，通过这个故事希望能让大家对**无限**有一颗**敬畏之心**.

[待补充]

4.1 极限的四则运算

WHAT

数列极限四则运算

加减法: 如果 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, 则 $\lim_{n\to\infty} [a_n \pm b_n] = A \pm B$.
[根据定义证明，待补充]

乘法: 如果 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$.
[根据定义证明，待补充]

除法: 如果 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, 且 $B \neq 0$, 则 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.
[根据定义证明，待补充]

函数极限四则运算

加减法: 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, 则 $\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$.
[根据定义证明，待补充]

乘法: 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, 则 $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = AB$.
[根据定义证明，待补充]

除法: 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, 且 $B \neq 0$, 则 $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.
[根据定义证明，待补充]

EXAMPLE

极限四则运算的例子

例1

证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

[用定义证明，待补充]

例2

计算 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}$

[待补充]

例3

计算 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}$

[待补充]

例4

计算 $\lim_{x\to 1} (2x-1)$

[待补充]

例5

计算 $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-1}{x^2-5x+3}$

[待补充]

例6

计算 $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-9}$

[待补充]

4.2 两个重要的极限

4.2.1 重要极限一

WHY

还记得"割圆法"求圆面积的例子吗？圆的内接正 n 边形的面积当 $n \to \infty$ 的极限的计算最后就会落到极限 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ 的计算，这个极限与圆周率 π (**阿基米德数**)有着深刻的联系.

EXTENSION

圆内接正多边形的面积

HOW

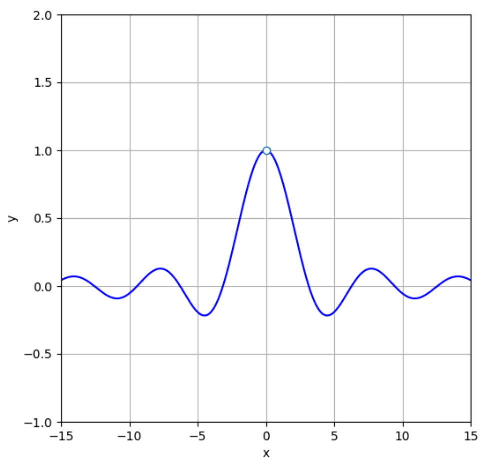
三明治定理

[待补充]

WHAT

证明 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

图 18. 一个重要的函数极限



[证明待补充]

4.2.2 重要极限二

WHY

极限 $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ 与无理数 e (**欧拉数**)有密切的联系. Jacob Bernoulli 于1683年在研究**复利**的时候考虑过这个数列的极限.

复利与无理数 e

图 19. Jakob Bernoulli

[故事待补充，下面的图片来自网络]

图 20. 复利的故事

7. 雅各布·伯努利(Jacob Bernoulli)最终“发现”了数 e，不过不是通过对数，而是通过复利发现——1683年

著名的Bernoulli(见图 10)家族有许多成功的数学家，但Jacob Bernoulli是其中最成功的一位。他对微积分的多项贡献使他在数学界广为人知。事实表明，他也是第一个确定非比率数 e 的基本性质的数学家。

e的发现令人着迷的地方在于，尽管对数进行了大量的工作和研究，但以前的数学家并没有在这些对数计算过程中识别出数e。 事实上，这是两个完全不同的领域；通过Jacob Bernoulli 关于复利的研究，e最终被“发现”了。

Jacob Bernoulli于1683年在研究有关复利的问题时偶然发现了数e。

他的主要研究基于复利的问题，并探索连续复利的性质。他在寻找极限 $\lim_{n->\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

的答案。根据他使用二项式定理(binomial theorem)[10] 的计算，极限一定介于 2 和 3 之间。下面将解释类似于他的复利计算的扩展。

想象一下，一个银行账户的初始存款总额为 1.00 美元，每年支付 100% 的利息。在第一笔利息记入帐户后，该帐户的余额将在年底时计算为 2.00 美元。Bernoulli心中的问题是，如果银行提供的利息在下一个财政年度更频繁地记入帐户，会发生什么情况?

Bernoulli计算出，如果利息在任何特定年份记入两次，则利率为 50%，为期 6 个月。 结果，开户时的 1 美元每年乘以 1.5 两次，使银行账户的余额为：

$1.0\times(1.5)^2=2.25$ (美元)

如果采用类似的方法，但现在利息按季度计复利，它将产生

$1.0\times(1.25)^4=2.4114...$ (美元)

假设利息每月计复利会产生

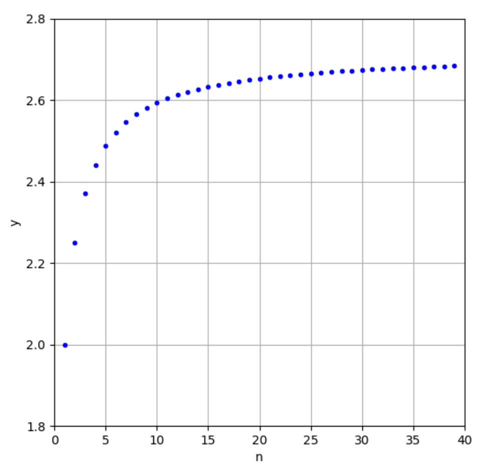
$1.0\times(1+\frac{1}{12})^{12}=2.613035...$ (美元)

如果采用 n 个复利时间范围和间隔，则可以通过将 100% 除以n个时间范围来计算每个间隔的利息，这会在财政年度结束时产生余额为 (1 + 1/n) 的总账户自乘以n次，即得到 $(1+\frac{1}{n})^n$ 。

Bernoulli发现，当n 接近一个非常高的值时，序列达到一个特定的数。当每周计算复利间隔时，年末账户的余额为 2.692597 美元。 当时间范围进一步缩短至每日间隔时，它在本财年末的收益率为 2.714567 美元。

在采取非常小的时间间隔后，伯努利发现序列极限接近 2.7182818美元的值 [7]。 **这在数学史上可以作为e的一阶近似。另外，这也可以说是数学史上第一次用极限过程来定义一个数，并且用这个极限过程定义了e。**当时Bernoulli并没有意识到他的工作与对数的工作有关。

图 21. 数列的值



HOW

单调有界数列有极限

[待补充]

WHAT

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$

[证明待补充]

WHAT

证明 $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$

[证明待补充]

EXTENSION

可以证明

$$\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

证明的方法也是用**单调有界数列有极限**.

中学学过**导数**的同学可以算一下展开式

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

的导数，看看会发现什么有趣的现象？

4.3 复合函数的极限

WHY

下面的结论相当于极限运算中的换元法，在计算极限的时候十分有用.

WHAT

假设 $y = f[g(x)]$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = u_0$，$\lim\limits_{u \to u_0} f(x) = A$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f[g(x)] = A$.

这个结论请自行根据直觉理解，证明略.

EXAMPLE

综合运用 **极限的定义**，**极限的四则运算** 和 **复合函数的极限 (换元法)**，以及 **三明治定理** 和 **单调有界数列有极限** 等结论，我们现在可以计算很多数列和函数的极限.

例1

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x)}{x}$ (P48：例1)

例2

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ (P48：例2)

例3

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin(x)}{x}$ (P48：例3)

例4

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x$ (P51：例4)

例5

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(2x)}{\sin(5x)}$ (P55：例3)

例6

$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}$ (习题1-2：5(3))

- 方法一：用定义证明.
- 方法二：用极限运算和复合函数的极限证明.
- 方法三：用极限运算证明

第 5 章 连续函数

WHY

我们研究**极限**的一个出发点是为了研究 函数的极大值极小值 或 曲线包含区域的面积，要实现这一目的我们还需要引入 微分 和 积分 等数学工具，这是后面几章的内容，所以我们离这个目标还有一定的距离．但是，仅用极限的概念，我们也能初步刻画曲线（或函数）本身的一些基本性质，比如这一讲要讲的**连续性**．

5.1 连续和间断

WHY

所谓**连续函数**，直白的说就是能笔不离开纸面一气画出来的函数，下面我们就来运用**极限**的概念把这个**连续的直观**给**数学化**．

HOW

函数在某一点的连续

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续．

连续函数

如果函数在某个区域上**每一点都连续**，则称 $f(x)$ 是该区域上的**连续函数**．

EXAMPLE

连续函数

例1 $f(x)=|x|$

$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续．

[补充函数图像]

例2： $f(x)=\dfrac{1}{|x|}$

$f(x)$ 在 $(-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)$ 上连续，但是在 0 点处不连续．

[补充函数图像]

WHAT

间断函数

不连续的函数就是**间断函数**．间断函数一定有某处是不连续的，造成不连续的原因很多，其中有些间断点还能够被挽救回来变成连续的（**可去间断点**），有些则挽救不回来．

EXAMPLE

间断函数的例子

例3 $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$

这个函数在 $x=0$ 处不连续，造成不连续的原因是 $f(0)$ 没有定义，从而 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$ 无从说起．幸运的是，$f(x)$ 在 $x=0$ 处的极限等于1，只要令 $f(0)=1$ 就可以让 $f(x)$ 在0点也连续了，从而**改良**后的 $f(x)$ 对任意 $x\in(-\infty,\infty)$ 都连续．

例4： $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$f(x)$ 在 $x=0$ 点处不连续．造成不连续的原因跟 例3 一样也是 $f(0)$ 没有定义．不幸的是，$f(x)$ 在 $x=0$ 处无限震荡，没有极限，所以这个函数没法像 例3 一样简单的补上一个点就成为连续函数．

[补充函数图像]

WHAT

单侧极限

- **左连续**（注意极限记号下方的 $-$ 号）

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \iff \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{s.t.},|f(x)-A|<\varepsilon \text{ if } -\delta<x-x_0<0.$$

- **右连续**（注意极限记号下方的 $+$ 号）

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{s.t.}, |f(x) - A| < \varepsilon \text{ if } 0 < x - x_0 < \delta.$$

造成函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的极限不存在的一个常见原因是 $f(x)$ 的**左右极限不相等**.

EXAMPLE

更多间断函数的例子

例5：符号函数 $\operatorname{sgn}(x)$

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x > 0, \\ 0, & \text{if } x = 0, \\ -1, & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

该函数在 $x_0 = 0$ 处不连续，造成不连续的原因是函数在该点的左极限（x 从左往右趋于0）等于 -1，右极限（x 从右往左趋于0）等于 1，左右极限不相等. 这种情况也没有办法通过简单的修改 $f(0)$ 的值来让函数连续.

例6： $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$

$f(x)$ 在 $x = 0$ 点处不连续，造成不连续的原因是 $f(0)$ 没有定义，而且 $f(x)$ 在 $x = 0$ 左右极限都趋于无穷大，没有（有限的）极限. 这种情况也没有办法通过简单的修改 $f(0)$ 的值来让函数连续.

EXTENSION

函数的连续性是一个很**自然**的性质，我们所感受到的世界就是连续的：物体运动的轨迹，温度的变化，甚至计算机里的0-1也是用连续函数来近似的.

- 在做**目标追踪**问题的时候，连续是一个很重要的**先验**；
- 在求解**物理方程**的时候，解的连续性是一个很重要的**约束**；
- 在人工智能里，连续性是解决高维问题的一个**核心底层逻辑**.

5.2 闭区间上连续函数的性质

WHY

闭区间上的连续函数是函数中的**乖宝宝**，因为这类函数的值总是可以被**控制**住.

HOW

闭区间上连续函数的定义

如果函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续，在 a 处右连续，在 b 处左连续，则 $f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数.

HOW

维尔斯特拉斯（Weierstrass）极值定理/极大极小值定理

闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数有界，且至少有一点 $x_1 \in [a, b]$ 使得 $f(x_1)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值，也至少有一点 $x_2 \in [a, b]$ 使得 $f(x_2)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值.

EXTENSION

Karl Weierstrass

图 22. Karl Weierstrass

EXAMPLE

两个反例

例1：$f(x) = \dfrac{1}{x}$

[待补充]

例2：符号函数

[待补充]

HOW

布尔查诺（Bolzano）定理/介值定理

设闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 在端点的值分别为 $f(a) < 0$，$f(b) > 0$，则一定存在 $x_0 \in [a,b]$ 使得 $f(x_0) = 0$.

EXTENSION

Bernard Bolzano

图 23. Bernard Bolzano

EXAMPLE

[P68 例1]

[待补充]

[习题1-10：1]

借助**介值定理**可以很容易证明上述定理，其中的 c 也称为函数 $f(x)$ 的不动点.

导数