Anàlisi Complexa - Laboratori 3

Christian José Soler

18 de marzo de 2016

1. *a*) Sigui Log la determinació principal del logaritme. És cert que $\mathrm{Log}(i^3) = 3\mathrm{Log}(i)$? Quina relació hi ha entre els dos termes?

> Calculem cadascun dels logaritmes, suposant l'argument principal en ambdós casos
>
> Sigui $l :=$Log
>
> 1) $l(i^3) = l(-i) = \ln(|-i|) + i\arg(-i) = 0 - \frac{\pi}{2}i = -\frac{\pi}{2}i$
> 2) $3l(i) = 3(\ln(|i|) + i\arg(i)) = 0 + 3\frac{\pi}{2}i = 3\frac{\pi}{2}i$
>
> Veïem que no són les mateixes. La relació entre elles és que $l(i^3) = -3 * 3l(i)$.

b) Trobeu totes les solucions de l'equació $\sin(z) = \cos(z)$.

$$\sin(z) = \cos(z)$$
$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$e^{iz} - e^{-iz} = ie^{iz} + ie^{-iz}$$
$$(1-i)e^{iz} = (1+i)e^{-iz}$$
$$e^{2iz} = \frac{1+i}{1-i} = i$$
$$2iz = \log(i)$$
$$z = \frac{\log(i)}{2i} = -i\frac{\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

2. Trobeu totes les funcions holomorfes $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ tals que

$$f(z)^2 + 2zf(z) + 1 = 0, \forall z \in \mathbb{D}$$

$$f(z)^2 + 2zf(z) + 1 = (f(z) + z)^2 + 1 - z^2 = 0$$
$$f(z) = \pm\sqrt{z^2 - 1} - z$$

Tenim llavors dos candidats:

$$f_1(z) = \sqrt{z^2 - 1} - z$$

$$f_2(z) = -\sqrt{z^2 - 1} - z$$

Anem a veure si són holomorfes. Es pot veure trivialment que ho són ambdós o cap. Estudiem llavors només $f_1(z)$

$$f_1(z) = g(z) - h(z)$$

on $g(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ i $h(z) = z$. $f_1(z)$ és holomorfa llavors si i només si $g(z)$ ho és.

Determinem l'arrel quadrada a $\mathbb{C} \backslash r$ on r és una corba simple qualsevol que uneix el 0 amb l'infinit i triem una branca de l'argument qualsevol. Fent això conseguim que l'arrel quadrada sigui holomorfa a tot arreu on estigui definit.

Si volem que la funció $g(z)$ sigui holomorfa hem de definir la corba r de tal manera que $g(\mathbb{D}) \cap r = \emptyset$.

Tenim llavors que si afegim aquesta condició a r i determinem així l'arrel quadrada, $g(z)$ serà holomorfa (de fet la condició també és necessària).

Hem de veure que existeix almenys un r que compleixi aquestes condicions, per tal de poder dir que hi ha solució. Triem r_1 com la corba que podem identificar amb $[0, \infty)$. Veïem llavors que $\forall z \in \mathbb{D}$, $z^2 - 1 \notin [0, \infty)$.

Notem que perquè $z^2 - 1 \in [0, \infty)$, z ha de ser real.

Però com $z \in \mathbb{D} \cap \mathbb{R} \implies |z| < 1 \implies z^2 < 1 \implies z^2 - 1 \notin [0, \infty)$.

Tenim llavors que existeix almenys un r que compleixi les condicions.

Amb aquest apunt veïem que amb aquestes determinacions possibles de l'arrel quadrada, la funció $g(z)$ és holomorfa a $\mathbb{D}$.

És a dir que per qualsevol d'aquestes determinacions de l'arrel quadrada, i només per aquestes, les funcions candidates $f_1(z)$ i $f_2(z)$ són ambdós holomorfes i solucions del nostre problema.

3. *a*) Considerem la sèrie

$$S(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{(4z-2)^n}{n}$$

Estudieu-ne la convergència i calculeu-ne la suma.

Sigui $\omega = 4z-2$. Estudiem la convergència de $S(\omega) = \sum_{n\geq 1} \frac{\omega^n}{n}$.

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow R = 1$$

Tenim doncs que la sèrie convergeix si $\omega \in \mathbb{D}$. Anem a traspassar aquest domini a z:

$$\omega \in \mathbb{D} \Leftrightarrow |\omega| < 1 \Leftrightarrow |4z-2| < 1 \Leftrightarrow \left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{4}$$

És a dir que la sèrie convergeix si $z \in B_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}\right)$ on $B_r(p)$ denota la bola de radi r i centre p.

Ara anem a calcular la suma fent el canvi per ω d'abans.

Notem que si derivem un cop els termes de la sèrie ens resultarà en una sèrie geomètrica que sabrem sumar:

$$S(\omega) = \sum_{n\geq 1} \frac{\omega^n}{n}$$

$$S'(\omega) = \sum_{n\geq 1} \omega^{n-1}$$

Fent servir la fòrmula de la suma geomètrica, trobem que $S'(\omega) = \frac{1}{1-\omega}$.

Ara usant el teorema fomental del càlcul tornem enrere per trobar $S(\omega)$:

$$S(\omega) - S(0) = \int_0^\omega S'(\omega)d\omega$$

$$S(\omega) - 0 = \int_0^\omega \frac{1}{1-\omega}d\omega = -\log(1-\omega)$$

És a dir que la suma en z dóna:

$$S(z) = -\log(1-4z+2) = -\log(3-4z)$$

b) Sigui $l(z)$ la determinació del logaritme en $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ tal que $l(1) = -2\pi i$. Definim $f(z) = -l(3-4z)$. Digueu on és holomorfa la funció f. Calculeu el valor de $f(-3i/4)$

El logaritme per enunciat és holomorfa a $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ (ja que és on és contínua i holomorfa).

La funció f és holomorfa si i només si l'és $-f = l(3-4z)$. Hem de veure llavors per quins $z \in \mathbb{C}$ $3-4z \in (-\infty, 0]$.

Observem primer, que z ha de ser real per a què això passi. Llavors:

$$3 - 4z \leq 0 \implies \frac{3}{4} \leq z$$

Llavors f és holomorfa a $\mathbb{C}\backslash[\frac{3}{4}, \infty)$.

Per calcular el valor de $f(-3i/4)$ farem servir la determinació del logaritme de l'enunciat. Notem que $l(1)$ és justament el desplaçament de l'argument que ens acaba determinant el logaritme. (És a dir que la part de $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ de la fórmula del logaritme és exactament $l(1)$):

$$f(-3i/4) = -l(3+3i) = -(\ln(|3+3i|) + \arg(3+3i)i + l(1)) =$$

$$= -\left(\frac{1}{2}\ln(18) + \left(\frac{\pi}{4}\right)i - 2\pi i\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(18) + \frac{7\pi}{4}i$$

c) Quina relació hi ha entre $S(z)$ i $f(z)$?

La relació entre ells és que ambdós són logaritmes composats amb $3-4z$, però $S(z)$ és amb l'argument principal i $f(z)$ és amb un desplaçament de $-2\pi i$.