Anàlisi Complexa - Laboratori 6

Christian José Soler

19 de abril de 2016

1. Sigui f una funció holomorfa en $\mathbb{D}$ tal que existeix una constant $C > 0$ de manera que per tot $z \in \mathbb{D}$,
$$|f(z)| \sin(1 - |z|) \leq C$$
Proveu que per tot natural n,
$$|f^{(n)}(0)| \leq Cn! \frac{2}{(1-r)r^n}, \forall r \in (0,1)$$
Finalment, proveu que per tot natural n,
$$|f^{(n)}(0)| \leq 2Cn! \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$$

Per la desigualtat de Cauchy tenim que
$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!M}{r^n}$$
On $M = \sup_{|z|=r} |f(z)|$. Hem d'arribar desde aquesta desigualtat al que volem. Anem a operar primer sobre l'hipòtesi:
$$|f(z)| \leq \frac{C}{\sin(1-|z|)} \leq \frac{2C}{1-|z|}$$
L'última desigualtat el veïem examinant el signe la funció $\sin(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)$ amb $x \in (0,1)$. Derivem la funció i igualem a 0:
$$-\cos(1-x) + \frac{1}{2} = 0 \implies \cos(1-x) = \frac{1}{2}$$
Les dues solucions més properes a $(0,1)$ són $x_1 = \frac{-5\pi}{3} + 1 = \frac{-2\pi}{3}, x_2 = \frac{-\pi}{3} + 1 = \frac{2\pi}{3}$ És a dir que a l'interval $(\frac{-2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ la funció és monòtona. Anem a veure el quant val la funció en $x = \frac{-2\pi}{3}$ i en $x = 1$:
$$x = \frac{-\pi}{3} \implies \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{5\pi}{6} < 0$$
$$x = 1 \implies \sin(0) = 0$$
D'aqui veïem que si $x \in (0,1)$, $\sin(1-x) \leq \frac{1}{2}(1-x) \implies \frac{1}{\sin(1-x)} \leq \frac{2}{(1-x)}$.

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!M}{r^n} = \frac{n!(\sup_{|z|=r}|f(z)|)}{r^n} \leq Cn!\frac{2}{(1-r)r^n}$$

Ara anem a veure l'altre que se'ns demana:

Com la desigualtat d'abans ens serveix per qualsevol $r \in (0,1)$, prenem $r = \frac{n}{n+1} < 1$, $\forall n$:

$$|f^{(n)}(0)| \leq Cn!\frac{2}{\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n} = 2Cn!\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$$

Com volíem veure.

2. Sigui $a \in \mathbb{R}$ i f i g dues funcions enteres tals que $Ref(z) \leq aReg(z)$. Proveu que existeix una constant $C \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = ag(z) + C$.

$$Ref(z) \leq aReg(z) \implies Ref(z) - aReg(z) \leq 0 \implies Re(f(z) - ag(z)) \leq 0$$

Considerem ara $t(z) = e^{f(z)-ag(z)}$.

$$|t(z)| = |e^{f(z)-ag(z)}| = e^{Re(f(z)-ag(z))} \leq e^0 = 1$$

Per teorema de Liouville, tenim que $t(z) = e^{f(z)-ag(z)} = C_1 \in \mathbb{C}$, és a dir que $f(z) - ag(z)$ és constant, com volíem veure.

3. Sigui $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funció entera i suposem que existeixen $M > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ tals que $|f(z)| \leq M|z|^n$ per a tot $z \in \mathbb{C}$. Demostreu f és un polinomi de grau menor o igual que n.

Considerem l'expansió en sèrie al voltant del 0 de $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^n$. Per la desigualtat de Cauchy tenim que

$$\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \leq \frac{\sup_{|z|=r}(|f(z)|)}{r^k} \leq M\frac{r^n}{r^k} = Mr^{n-k}$$

Com la desigualtat es compleix per qualsevol $r > 0$, fem $r \to \infty$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} = \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \leq \lim_{r\to\infty} Mr^{n-k}$$

Tenim que $\lim_{r\to\infty} Mr^{n-k} = 0$ si $k > n$, llavors tots els coeficients de Taylor són 0 a partir de $k = n$, és a dir que f és un polinomi de grau menor o igual que n.

4. Sigui f una funció entera tal que $|f(z)| \leq Ce^{Rez}$ per tot $z \in \mathbb{C}$, on $C > 0$ és una constant. Què es pot dir de f?

$$|f(z)| \leq Ce^{Rez} = C|e^z| \implies \left|\frac{f(z)}{e^z}\right| \leq C$$

Aplicant el teorema de Liouville com $\frac{f(z)}{e^z}$ és holomorfa en tot el domini, tenim que $\frac{f(z)}{e^z} = C_1 \in \mathbb{C}$. D'aqui deduïm $f(z) = C_1e^z$