Anàlisi Complexa - Laboratori 1

Christian José Soler

28 de febrero de 2016

1. **Demostreu que per tot** $z \in \mathbb{C}$

$$|Re(z)| + |Im(z)| \leq \sqrt{2}|z|$$

<u>Resolució:</u>

Sigui z un nombre complex de la forma $z = x + iy = |z|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$.
Amb aquestes notacions, $|Re(z)| = |x|$ i $|Im(z)| = |y|$.

Ara bé, tenim que:

$$|x| = |z||\cos(\alpha)|$$
$$|y| = |z||\sin(\alpha)|$$

A més a més,

$$|x| + |y| = |z|(|\cos(\alpha)| + |\sin(\alpha)|)$$

Per arribar a la desigualtat que volem, busquem els màxims de l'expressió $|\cos(\alpha)| + |\sin(\alpha)|$. Per fer-ho, notem que podem treure els valors absoluts i suposar que α és del primer quadrant per la periodicitat de les funcions sin i cos.

Definim llavors $f(\alpha) = \cos(\alpha) + \sin(\alpha)$. Derivem i igualem a 0:

$$f'(\alpha) = \cos(\alpha) - \sin(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \sin(\alpha)$$

que ens dóna la solució $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Podem comprovar que és el màxim absolut.

Tenim llavors que

$$|x| + |y| = |z|\left(|\cos(\alpha)| + |\sin(\alpha)|\right) \leq |z|\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= |z|\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = |z|\sqrt{2}$$

Com volíem veure.

2. **Sigui Ω un domini i f una funció holomorfa en Ω. Proveu que les següents condicions són equivalents.**

   a) $Re(f)$ **és constant en** Ω
   b) $Im(f)$ **és constant en** Ω
   c) **La funció conjugada de f, $\bar{f}$, és holomorfa en** Ω

d) f **és constant en** Ω

e) $|f|$ **és constant en** Ω

<u>Resolució:</u>

Per veure les equivalències, es veu trivialment que l'enunciat d) implica tota la resta de enunciats. Ara veïem les implicacions contràries:

a) $(a) \Rightarrow (d)$:
Tenim que $f(x + yi) = k_1 + v(x, y)i,\ k_1 \in \mathbb{C}$
Llavors

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_x(x, y) & v_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

D'aquí veiem que $v_x(x, y) = v_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow v(x, y) = k_2 \in \mathbb{C}$
Com volíem veure.

b) $(b) \Rightarrow (d)$:
Es pot veure anàlogament, però en aquest cas és la segona fila de la matriu jacobiana que és de 0s.

c) $(c) \Rightarrow (d)$:
Si $Df(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ Tenim que: $D\bar{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}$
Perquè la matriu compleixi les equacions de Cauchy Riemann, tenim que $\alpha = -\alpha$ i $-\beta = \beta$ que només pot passar si $\alpha = \beta = 0 \Rightarrow f$ és constant.

d) $(e) \Rightarrow (d)$:
Si $|f|$ és constant també l'és $|f|^2(x, y) = u(x, y)^2 + v(x, y)^2 = K \in \mathbb{C}$
Llavors

$$\frac{\partial(u^2 + v^2)}{\partial x} = 0 = \frac{\partial(u^2 + v^2)}{\partial y}$$

Això implica que:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0 = u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y}$$

Si apliquem les equacions de Cauchy-Riemann arribem a:

$$u\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0 = -u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$(u^2 + v^2)\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Si $u^2 + v^2 = 0$, llavors $f = 0$ i ja tenim que f és constant.
Si $u^2 + v^2 \neq 0$, llavors $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ que ens dóna $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$. D'aqui veïem un altre cop que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ que ens torna a donar que f és constant.

3. **Sigui** $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$**. Trobeu** $v(x,y)$ **de manera que la funció** $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ **sigui holomorfa a** $\mathbb{C}$ **i compleixi** $f(0) = i$**.**

Resolució:

Anem a escriure la matriu jacobiana de f:

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} u_x(x,y & u_y(x,y) \\ v_x(x,y & v_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(x,y) & u_y(x,y) \\ -u_y(x,y) & u_x(x,y) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2x+1 & -2y \\ 2y & 2x+1 \end{pmatrix}$$

Tenim llavors que

a) $v_x(x,y) = 2y \Rightarrow v(x,y) = y^2 + c(x)$

b) $v_y(x,y) = 2x+1 \Rightarrow v(x,y) = x^2 + x + c(y)$

on $c(x)$, $c(y)$ són constants que depenen només de x i de y respectivament.

D'aqui podem concluïr que $v(x,y) = y^2 + x^2 + x + K$ on K és una constant que no depèn ni de x ni de y. Fem servir la última hipòtesi per trobar aquesta K:

$$f(0+0i) = i = u(0,1) + iv(0,1) \Rightarrow v(0,1) = 1$$

Trobem que $K = 0 \Rightarrow v(x,y) = y^2 + x^2 + x$