Anàlisi Complexa - Laboratori 7

Christian José Soler

28 de abril de 2016

1. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ una regió que conté el disc unitat tancat $\mathbb{D}$. Sigui f una funció holomorfa en Ω tal que $f(z) \neq 0$ per a $z \in \Omega \backslash \{0\}$ i a més $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$.

   a) Proveu que existeixen $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i una funció holomorfa g en Ω tals que $g(0) \neq 0$ i $f(z) = z^n g(z)$.

   b) Demostreu que $|g(z)| = 1$ si $z \in \mathbb{D}$.

   c) Deduïu que existeix $\lambda \in \mathbb{C}$ amb $|\lambda| = 1$ tal que $f(z) = \lambda z^n$ si $z \in \mathbb{D}$.

   d) Es compleix la igualtat en c) per a tot $z \in \Omega$?

2. Sigui $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una funció holomorfa tal que $f(0) = 0$. Proveu que

   a) $|f(z)| \leq |z|$ per tot $z \in \mathbb{D}$ i $|f'(0)| \leq 1$

   b) Si a més, $|f(z)| = |z|$ per algun $z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ o bé $|f'(0)| = 1$, aleshores $f(z) = \lambda z$ per alguna $\lambda \in \mathbb{C}$ amb $|\lambda| = 1$.