Лабораторная работа №5

Модель хищник-жертва

Монастырская Кристина Владимировна

Содержание

Цель работы

Изучить построение модели хищник-жертва, используя средства OpenModelica

Задание

Вариант 23

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.38x(t) + 0.037x(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.36y(t) - 0.035x(t)y(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 4, y_0 = 14$ Найдите стационарное состояние системы.

Теоретическое введение

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях: 1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории) 2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает 3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными 4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается 5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

(1)

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) + bx(t)y(t)$$
$$\frac{dy}{dt} = -cx(t) + dx(t)y(t)$$

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, с - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены -bxy и dxy в правой части уравнения).

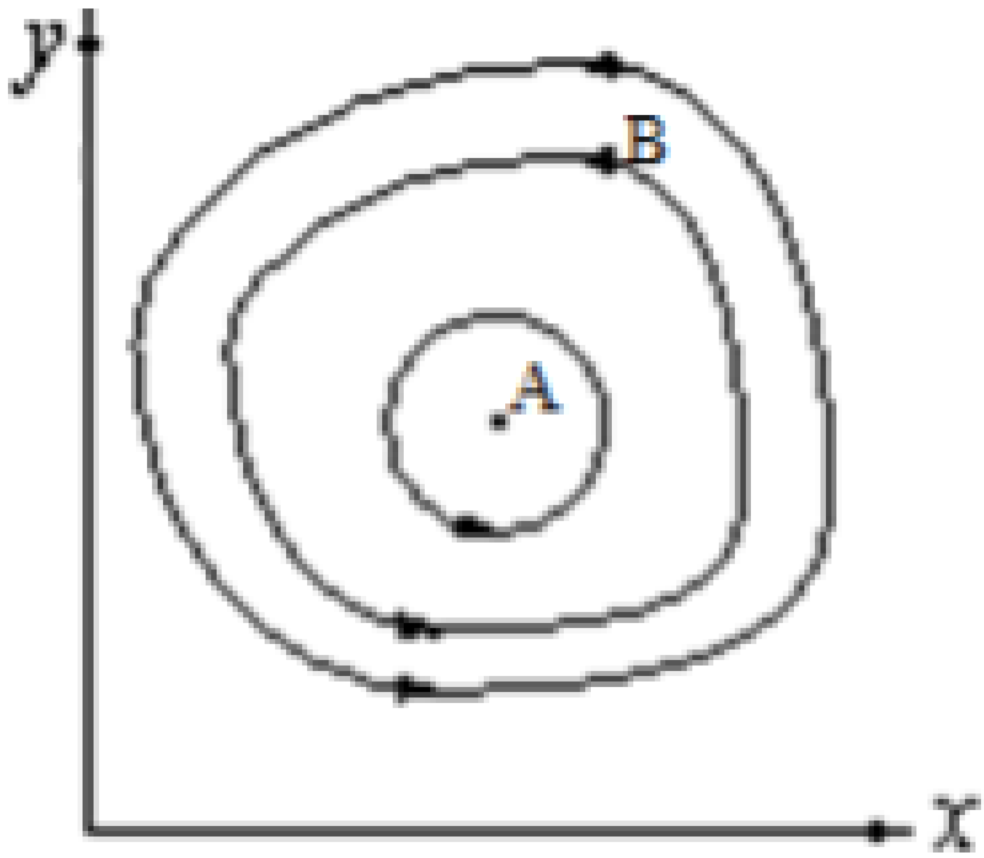

Рис. 1: Эволюция популяции жертв и хищников в модели Лотки-Вольтерры.

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние (A на рис. 1.), всякое же другое начальное состояние (B) приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в состояние B.

Стационарное состояние системы (1) (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке: $x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей x(0), y(0). Колебания совершаются в противофазе.

При малом изменении модели

(2)

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) + \varepsilon f(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = -cx(t) - dx(t)y(t) + \varepsilon g(x, y), \varepsilon << 1$$

(прибавление к правым частям малые члены, учитывающие, например, конкуренцию жертв за пищу и хищников за жертв), вывод о периодичности (возвращении системы в исходное состояние B), справедливый для жесткой системы Лотки-Вольтерры, теряет силу. Таким образом, мы получаем так называемую мягкую модель «хищник-жертва». В зависимости от вида малых поправок f и g возможны следующие сценарии 1-3.

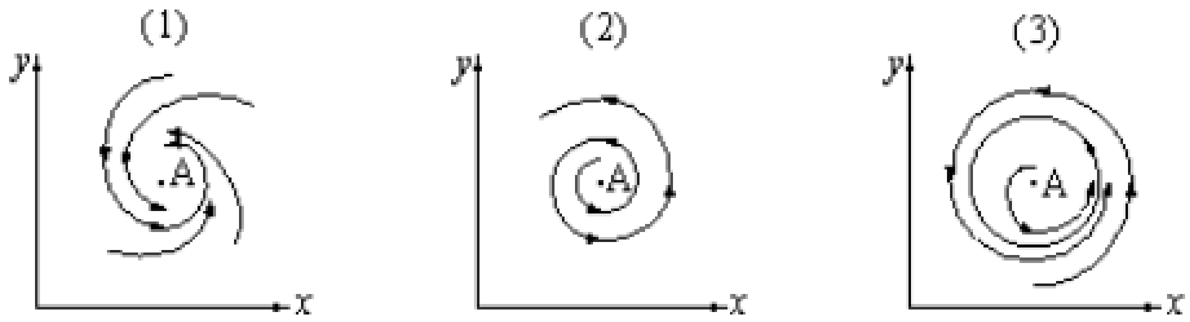

Рис. 2: Мягкая модель борьбы за существование.

В случае 1 равновесное состояние A устойчиво. При любых других начальных условиях через большое время устанавливается именно оно. В случае 2 система стационарное состояние неустойчиво. Эволюция приводит то к резкому увеличению числа хищников, то к их почти полному вымиранию. Такая система в конце концов попадает в область столь больших или столь малых значений x и y, что модель перестает быть применимой. В случае 3 в системе с неустойчивым стационарным состоянием A с течением времени устанавливается периодический режим. В отличие от исходной жесткой модели Лотки-Вольтерры, в этой модели установившийся периодический режим не зависит от начального условия. Первоначально незначительное отклонение от стационарного состояния A приводит не к малым колебаниям около A, как в модели Лотки-Вольтерры, а к колебаниям вполне определенной (и не зависящей от малости отклонения) амплитуды. Возможны и другие структурно устойчивые сценарии (например, с несколькими периодическими режимами).

Вывод: жесткую модель всегда надлежит исследовать на структурную устойчивость полученных при ее изучении результатов по отношению к малым изменениям модели (делающим ее мягкой).

В случае модели Лотки-Вольтерры для суждения о том, какой же из сценариев 1-3 (или иных возможных) реализуется в данной системе, совершенно необходима дополнительная информация о системе (о виде малых поправок f и g в нашей формуле). Математическая теория мягких моделей указывает, какую именно информацию для этого нужно иметь. Без этой информации жесткая модель может привести к качественно ошибочным предсказаниям. Доверять выводам, сделанным на основании жесткой модели, можно лишь тогда, когда они подтверждаются исследованием их структурной устойчивости

Выполнение лабораторной работы

Написание программного кода в OpenModelica для создания модели:

```
model lab5
  // стационарное состояние:
  // x=10.29, y=10.27
  Real x(start = 4);
  Real y(start = 14);
  Real a, b, c, d;
equation
  a = 0.38;
  b = 0.037;
  c = 0.36;
  d = 0.035;
  der(x) = -a*x + b*x*y;
  der(y) = c*y - d*x*y;
end lab5;
```

Рис. 1: Двувидовая модель “хищник-жертва”, программный код

Построение графика зависимости численности хищников от численности жертв:

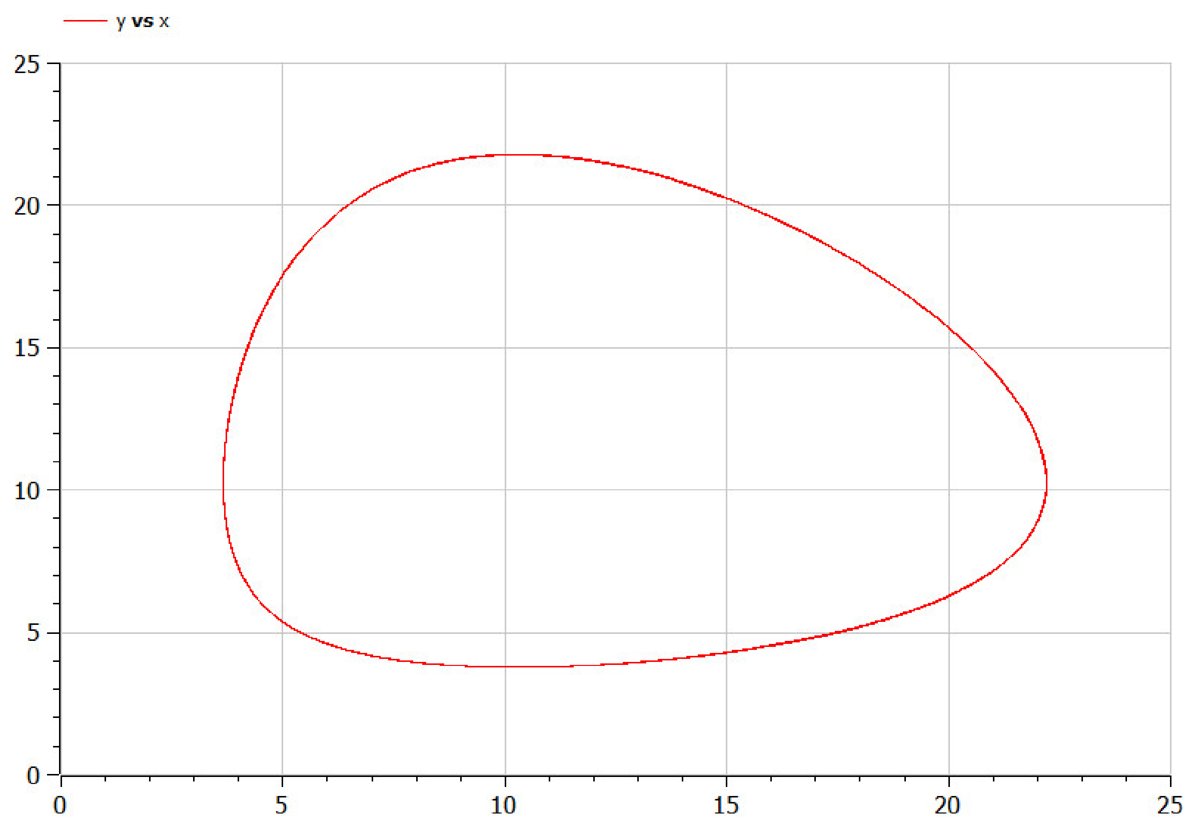

Рис. 2: Зависимость численности хищников от численности жертв

Построение графика изменения численности хищников и численности жертв:

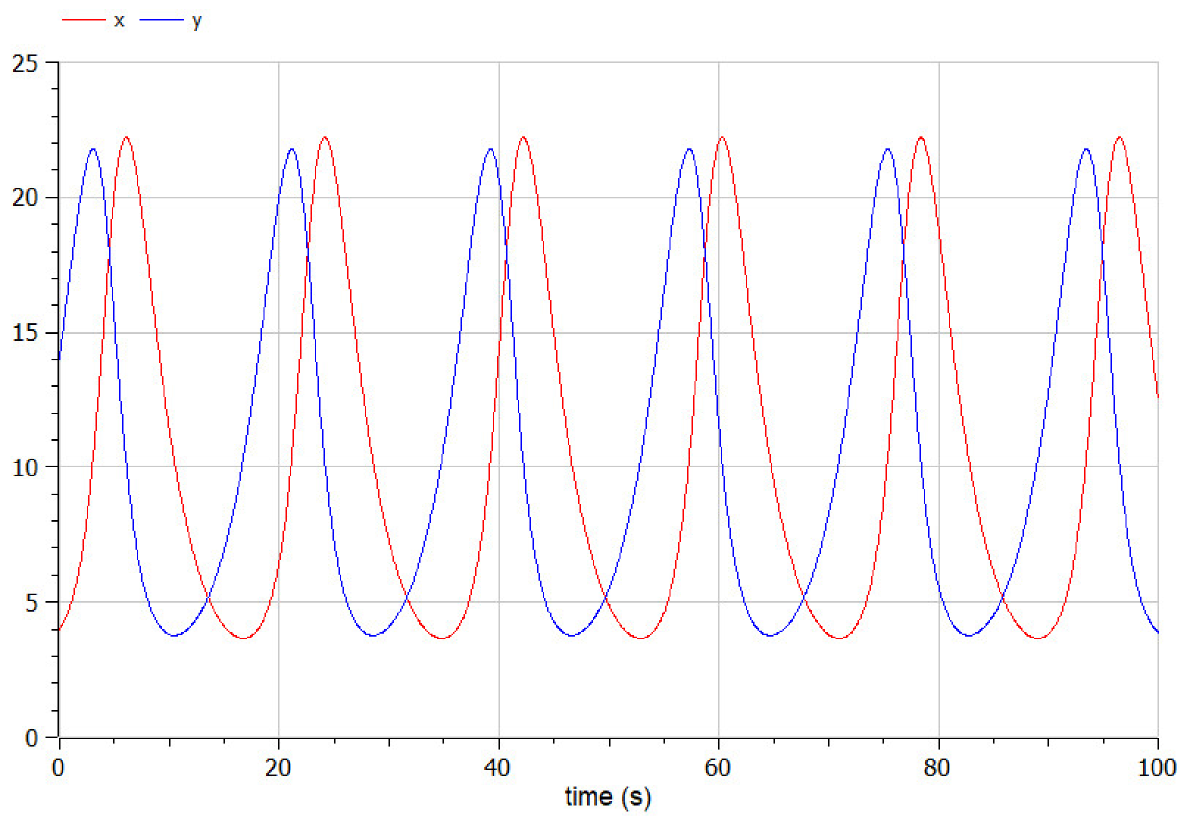

Рис. 3: Изменение численности хищников и жертв

Нахождение стационарного состояния системы:

Воспользуемся формулой поиска точек *x* и *y* в стационарном состоянии системы.

$x_0 = \frac{c}{d}$; $y_0 = \frac{a}{b}$.

Подставим данные мне начальные значения a = 0.38, b = 0.037, c = 0.36, d = 0.035:

$x_0 = \frac{0.36}{0.035} \approx 10.29$, $y_0 = \frac{0.38}{0.037} \approx 10.27$.

Выводы

Я построила модель “хищник-жертва”, смогла получить графики зависимостей популяций хищников и жертв друг от друга и с течением времени.