

Esercizio 15* del Foglio 1

Lorenzo Soligo 2101057, Tommaso Ceron 2101045,
Dennis Parolin 2113203, Giuliano Banchieri 2101081

Marzo 2025

1 Introduzione

Il **Gradient Descent** è un algoritmo di ottimizzazione iterativo utilizzato per trovare il minimo di una funzione, affrontato nel corso di Introduzione al ***Machine Learning*** del professor **Ballan**. Nel contesto della regressione lineare, l'obiettivo è minimizzare la funzione di errore quadratico medio, definita come:

$$\phi(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - (a \cdot x_i + b))^2$$

dove (x_i, y_i) sono i dati del campione e a e b sono i coefficienti della retta di regressione $y = a \cdot x + b$.

2 Giustificazione Matematica

Per trovare il minimo di $\phi(a, b)$, calcoliamo le derivate parziali rispetto a a e b :

$$\frac{\partial \phi}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - (a \cdot x_i + b))$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - (a \cdot x_i + b))$$

Queste derivate rappresentano la direzione di massima crescita della funzione $\phi(a, b)$. Per minimizzare la funzione, ci muoviamo nella direzione opposta al gradiente, aggiornando a e b come segue:

$$a_{\text{new}} = a_{\text{old}} - \alpha \cdot \frac{\partial \phi}{\partial a}$$

$$b_{\text{new}} = b_{\text{old}} - \alpha \cdot \frac{\partial \phi}{\partial b}$$

dove α è il **learning rate**, un parametro che controlla la dimensione dei passi dell'aggiornamento. Questo parametro è fondamentale per garantire che il metodo converga. Se infatti assumesse un valore troppo grande il rischio è che il passo risulti troppo grande portando alla divergenza del metodo. Questo perchè la funzione in questione è convessa e quindi un passo troppo ampio porterebbe a risalire la parabola invece che portare alla "naturale" convergenza per valori $0 < \alpha < 1/\max \text{Autovalore}$.

E' anche necessario che il passo α non sia però troppo piccolo perchè in tal caso il metodo potrebbe convergere troppo lentamente.

3 Pseudocodice

Lo pseudocodice per il Gradient Descent è il seguente:

Input: Vettori x e y , learning rate, numero di iterazioni T
Output: Coefficienti a e b della retta di regressione

1. Inizializza $a = 0$ e $b = 0$
2. Ripeti per T iterazioni:

```

a. Calcola le derivate parziali:
  /a = -2 * (x_i * (y_i - (a * x_i + b)))
  /b = -2 * (y_i - (a * x_i + b))
b. Aggiorna a e b:
  a = a - * /a
  b = b - * /b
3. Restituisci a e b

```

4 Spiegazione dello Pseudocodice

- **Inizializzazione:** I coefficienti a e b sono inizializzati a zero.
- **Calcolo del gradiente:** Ad ogni iterazione, le derivate parziali $\frac{\partial \phi}{\partial a}$ e $\frac{\partial \phi}{\partial b}$ sono calcolate utilizzando i valori correnti di a e b .
- **Aggiornamento dei parametri:** I coefficienti a e b sono aggiornati spostandosi nella direzione opposta al gradiente, con un passo proporzionale al learning rate α .
- **Convergenza:** Dopo un numero sufficiente di iterazioni T , i valori di a e b convergono ai coefficienti ottimali della retta di regressione.

5 Risultati

I risultati ottenuti applicando il Gradient Descent ai campioni $(Tmin, Tmed)$ e $(Tmin, Ptot)$ sono mostrati nei grafici seguenti:

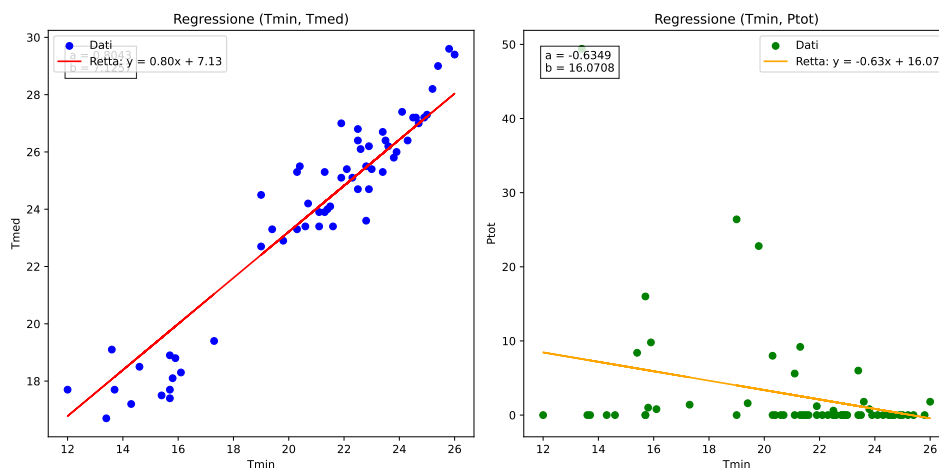


Figure 1: Diagrammi di dispersione con le rette di regressione ottenute tramite Gradient Descent.

I valori ottimali dei coefficienti sono:

Punto di minimo per $(Tmin, Tmed)$: $a^* = 0,8043, b^* = 7,125$

Punto di minimo per $(Tmin, Ptot)$: $a^* = -0,6349, b^* = 16,0708$

6 Conclusioni

Il Gradient Descent è un metodo efficace per trovare il minimo della funzione di errore quadratico medio nella regressione lineare. La scelta del learning rate α e del numero di iterazioni T è cruciale per garantire una convergenza rapida e stabile.

7 Covarianza

Vengono qui riportate le due matrici ricavate dall'analisi dei dati:

$$\begin{array}{l} \text{MATRICE DIAGONALE DI AUTOVALORI } (\lambda) : \begin{bmatrix} 72.4721 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 30.3224 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.7106 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1237 \end{bmatrix} \\ \\ \text{MATRICE ORTONORMALE DI AUTOVETTORI:} \begin{bmatrix} 0.2544 & 0.5123 & -0.7127 & -0.4060 \\ 0.2453 & 0.5217 & -0.0029 & 0.8171 \\ 0.2463 & 0.5291 & 0.7013 & -0.4093 \\ -0.9025 & 0.4306 & -0.0103 & -0.0041 \end{bmatrix} \end{array}$$