Esercizio 14, foglio 2 statistica

Tommaso

April 2025

1 Introduction

Partendo dalla funzione di probabilità della distribuzione binomiale:

$$p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k) = \binom{N}{k} q^k (1-q)^{N-k}. \tag{1}$$

Possiamo osservare che, per $k+1$, abbiamo:

$$p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k+1) = \binom{N}{k+1} q^{k+1} (1-q)^{N-(k+1)}. \tag{2}$$

A questo punto possiamo usare la proprietà dei coefficienti binomiali:

$$\binom{N}{k+1} = \frac{N-k}{k+1}\binom{N}{k}, \tag{3}$$

ed ottenere:

$$p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k+1) = \frac{N-k}{k+1}\binom{N}{k} q^{k+1} (1-q)^{N-k-1}. \tag{4}$$

Possiamo dunque riscrivere $q^{k+1} = q \cdot q^k$ e $(1-q)^{N-k-1} = \frac{(1-q)^{N-k}}{1-q}$. E riordinando i termini otteniamo

$$p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k+1) = \frac{N-k}{k+1} \cdot q \cdot \frac{(1-q)^{N-k}}{1-q} \cdot \binom{N}{k} q^k. \tag{5}$$

A questo punto abbiamo verificato il primo punto richiesto, poichè

$$\binom{N}{k} q^k (1-q)^{N-k} = p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k). \tag{6}$$

Avremo che

$$p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k+1) = \frac{q}{1-q} \cdot \frac{N-k}{k+1} \cdot p_{\mathrm{Bin}(N,q)}(k). \tag{7}$$