dove $\lambda$ è un parametro fissato, e ciascun figlio è maschio con probabilità $1/2$, indipendentemente da tutti gli altri. Consideriamo l'evento

$$A_k \doteq \text{"il nucleo familiare scelto (a caso) ha esattamente } k \text{ figli maschi"},$$

per $k \in \mathbb{N}_0$. Si mostri che la probabilità di $A_k$ è uguale a $e^{-\lambda/2}\frac{(\lambda/2)^k}{k!}$."

**Esercizio 14.** Siano $N \in \mathbb{N}$, $q \in (0,1)$. Sia $p_{Bin(N,q)}$ la densità discreta della distribuzione binomiale di parametri $N$ e $q$:

$$p_{Bin(N,q)}(k) \doteq \begin{cases} \binom{N}{k} \cdot q^k \cdot (1-q)^{N-k} & \text{se } k \in \{0, \ldots, N\}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si mostri che, per $k \in \{0, \ldots, N-1\}$,

$$p_{Bin(N,q)}(k+1) = \frac{q}{1-q} \cdot \frac{N-k}{k+1} \cdot p_{Bin(N,q)}(k).$$

Si verifichi inoltre che, per $k \in \{0, \ldots, N\}$,

$$p_{Bin(N,q)}(k) = p_{Bin(N,1-q)}(N-k).$$

**Esercizio 15 ($*$).** In un ballottaggio tra due candidati, A e B, votano $N+M$ persone, con $N \in \mathbb{N}$, $M \in \{0, \ldots, N\}$: $N$ elettori sono completamente indecisi e votano a caso, senza preferenza tra A e B, mentre il gruppo di $M$ persone sostiene il candidato A. Vogliamo trovare la probabilità che vinca A.

Possiamo descrivere il comportamento elettorale delle $N$ persone indecise tramite una variabile aleatoria $S_N$ con distribuzione binomiale di parametri $N$ e $1/2$, definita su un opportuno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$; $S_N$ rappresenta il numero di voti che il candidato A riceve dal gruppo delle persone indecise. La probabilità che vinca A è allora data da

$$\mathbf{P}\left(S_N + M > \frac{N+M}{2}\right) = \mathbf{P}\left(S_N > \frac{N-M}{2}\right) = \sum_{k=\lfloor \frac{N-M}{2} \rfloor + 1}^{N} p_{Bin(N,1/2)}(k).$$

Si scriva un programma che calcoli numericamente questa probabilità in funzione di $N$, $M$ come sopra, in grado di trattare il caso $N+M = 10^6$, $M \leq 5000$.

Per la consegna servono:

- lo svolgimento dell'Esercizio 14 e una giustificazione matematica della procedura utilizzata per il calcolo della probabilità di vittoria elettorale richiesta;
- lo pseudo-codice del programma e il codice commentato in un linguaggio standard come `C++` o Python (il codice anche in un file separato);
- un grafico in formato `pdf` che riporti la probabilità di vittoria elettorale in funzione di $M$ quando $N+M = 10^6$ e $M$ varia da 0 a 5000 (in passi da dieci).

Contatto: Markus Fischer (fischer@math.unipd.it)