

Esercizio 15* del Foglio 1

Lorenzo Soligo 2101057

Marzo 2025

1 Introduzione

Il **Gradient Descent** è un algoritmo di ottimizzazione iterativo utilizzato per trovare il minimo di una funzione, affrontato nel corso di Introduzione al ***Machine Learning*** del professor **Ballan**. Nel contesto della regressione lineare, l'obiettivo è minimizzare la funzione di errore quadratico medio, definita come:

$$\phi(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - (a \cdot x_i + b))^2$$

dove (x_i, y_i) sono i dati del campione e a e b sono i coefficienti della retta di regressione $y = a \cdot x + b$.

2 Giustificazione Matematica

Per trovare il minimo di $\phi(a, b)$, calcoliamo le derivate parziali rispetto a a e b :

$$\frac{\partial \phi}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - (a \cdot x_i + b))$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - (a \cdot x_i + b))$$

Queste derivate rappresentano la direzione di massima crescita della funzione $\phi(a, b)$. Per minimizzare la funzione, ci muoviamo nella direzione opposta al gradiente, aggiornando a e b come segue:

$$a_{\text{new}} = a_{\text{old}} - \alpha \cdot \frac{\partial \phi}{\partial a}$$

$$b_{\text{new}} = b_{\text{old}} - \alpha \cdot \frac{\partial \phi}{\partial b}$$

dove α è il **learning rate**, un parametro che controlla la dimensione dei passi dell'aggiornamento.

3 Pseudocodice

Lo pseudocodice per il Gradient Descent è il seguente:

Input: Vettori x e y , learning rate, numero di iterazioni T

Output: Coefficienti a e b della retta di regressione

1. Inizializza $a = 0$ e $b = 0$
2. Ripeti per T iterazioni:
 - a. Calcola le derivate parziali:
$$\begin{aligned} /a &= -2 * (x_i * (y_i - (a * x_i + b))) \\ /b &= -2 * (y_i - (a * x_i + b)) \end{aligned}$$
 - b. Aggiorna a e b :
$$\begin{aligned} a &= a - * /a \\ b &= b - * /b \end{aligned}$$
3. Restituisci a e b

4 Spiegazione dello Pseudocodice

- **Inizializzazione:** I coefficienti a e b sono inizializzati a zero.
- **Calcolo del gradiente:** Ad ogni iterazione, le derivate parziali $\frac{\partial \phi}{\partial a}$ e $\frac{\partial \phi}{\partial b}$ sono calcolate utilizzando i valori correnti di a e b .
- **Aggiornamento dei parametri:** I coefficienti a e b sono aggiornati spostandosi nella direzione opposta al gradiente, con un passo proporzionale al learning rate α .
- **Convergenza:** Dopo un numero sufficiente di iterazioni T , i valori di a e b convergono ai coefficienti ottimali della retta di regressione.

5 Risultati

I risultati ottenuti applicando il Gradient Descent ai campioni $(Tmin, Tmed)$ e $(Tmin, Ptot)$ sono mostrati nei grafici seguenti:

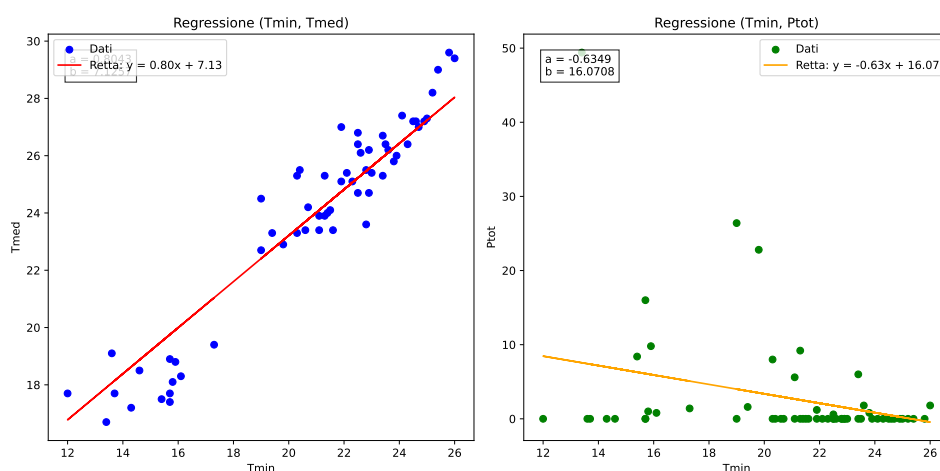


Figure 1: Diagrammi di dispersione con le rette di regressione ottenute tramite Gradient Descent.

I valori ottimali dei coefficienti sono:

Punto di minimo per $(Tmin, Tmed)$: $a^* = \mathbf{a1}, b^* = \mathbf{b1}$

Punto di minimo per $(Tmin, Ptot)$: $a^* = \mathbf{a2}, b^* = \mathbf{b2}$

6 Conclusioni

Il Gradient Descent è un metodo efficace per trovare il minimo della funzione di errore quadratico medio nella regressione lineare. La scelta del learning rate α e del numero di iterazioni T è cruciale per garantire una convergenza rapida e stabile.