

Solutionnaire 1

Frederic Boileau

28th February 2019

J'introduis quelques notations. En analyse convexe on dénote l'ensemble des fonctions convexes *propres* sur un espace euclidien \mathbb{E} (dans notre cas simplement \mathbb{R}^n) par $\Gamma(\mathbb{E})$.

$$\Gamma(\mathbb{E}) \triangleq \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, f \text{ propre et convexe}\}$$

Une fonction *propre* est une fonction pour laquelle il existe au moins un x t.q. $f(x) < +\infty$ et pour laquelle pour tout x $f(x) > -\infty$. On écarte ainsi certains cas pathologiques.

J'utilise la notation de Evans pour la dérivation. Ainsi $D_x f$ est la dérivée de f par rapport à x , si c'est un nombre, un vecteur (comme pour le gradient) ou une matrice (jacobien) dépend du contexte (de f et de x) dans tous les cas D est toujours une approximation linéaire de f .

Soit A une matrice. Si A est définie positive (resp. semi-définies positives) on écrit $A > 0$ (resp $A \geq 0$).

1 Direction de Descente

Soit f une fonction convexe différentiable sur \mathbb{R}^n et x et y deux points de \mathbb{R}^n t.q. $f(y) < f(x)$. Montrer que $y - x$ est une direction de descente de f en x . Notons qu'aucun ordre n'est imposé sur x et y .

La preuve découle directement de la définition de la convexité donnée en cours:

$$f(\alpha y + (1 - \alpha)x) \leq \alpha f(y) + (1 - \alpha)f(x)$$

$$f(x + \alpha(y - x)) \leq \alpha f(y) + (1 - \alpha)f(x)$$

$$f(x + \alpha(y - x)) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(x)$$

$$f(x + \alpha(y - x)) < f(x)$$

2 Système linéaire et optimisation

Prouvez que tout système linéaire $Ax = b$, avec A définie positive, peut se reformuler comme un problème d'optimisation sans contrainte.

Pour la reformulation nous avons plusieurs critères; premièrement on veut que le minimum global corresponde à la solution, dans un second temps si le problème est convexe nous avons des garanties quant à la recherche de ce minimiseur global. Il y a deux formulations simples, je traite les deux.

2.1 Forme Quadratique

Le reformulation la plus simple est de prendre la forme quadratique suivante:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b \quad (1)$$

Le calcul de dérivés par rapport à des vecteurs ou des matrices peut être laborieux mais l'identité suivante est très importante:

$$D_x(x^T Ax) = x^T(A + A^T) \quad (2)$$

Ainsi nous avons:

$$D_x(f) = Ax - b \quad D_x^2(f) = A > 0 \quad (3)$$

La première équation montre que le gradient de la fonction est nul ssi le x est une solution du système linéaire. La deuxième équation montre que la deuxième dérivée (le hessien) de f par rapport est *définie positive* (par supposition sur A). La fonction est donc strictement convexe et atteint son minimum ssi le gradient est nulle, ce qui n'arrive que lorsque $Ax = b$.

Notons que pour une fonction à une variable $D_x^2(f) > 0$ implique que f est strictement convexe en x . Pour une fonction à plusieurs variables, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, nous avons que $D_x^2(f) = \nabla_x^2(f) > 0$ implique f strictement convexe. Nous voyons donc que la notation est appropriée puisque l'on généralise la notion de 'plus grand que zéro.'