生物实验设计
第三章　概率和概率分布

王超

广东药科大学中医药研究院

Email: wangchao@gdpu.edu.cn

2023-09-05

第三章　概率与概率分布

目的和要求

为什么学习概率？

- 进行资料统计的目的不在于描述部分样本
- 而是通过样本统计数来推断数据总体的参数（统计推断）
- 统计推断的基础是：概率和概率分布

学习要求

- 掌握：事件、频率、概率的定义
- 熟悉：正态分布

（一）事件

在一定条件下，某种事物出现与否被称为是**事件**。

- 确定事件：
  - 必然事件 U：在一定条件下必然出现的现象。
  - 不可能事件 V：在一定条件下必然不出现的事件。
- 随机事件：
  - 有可能发生，也可能不发生。

（二）频率

- 在 n 次试验中，事件 A 出现的次数 m 称为事件 A 出现的频数，比值 $\frac{m}{n}$ 称为事件 A 出现的频率

$$W(A) = \frac{m}{n}, 0 \leq W(A) \leq 1$$

为测定某批玉米种子的发芽率，分别取 10，20，50，100，200，500，1000 粒种子。在相同条件下进行发芽试验：

Table 1: 某批种子的发芽试验结果

种子总数	发芽种子总数	种子发芽率
10	9	0.900
20	19	0.950
50	47	0.940
100	91	0.910
200	186	0.930
500	459	0.918
1000	920	0.920

（三）概率

- 假设在相同的条件下，进行大量重复试验，若事件 A 的频率稳定地在某一确定值 p 的附近摆动，则称 p 为事件 A 出现的概率

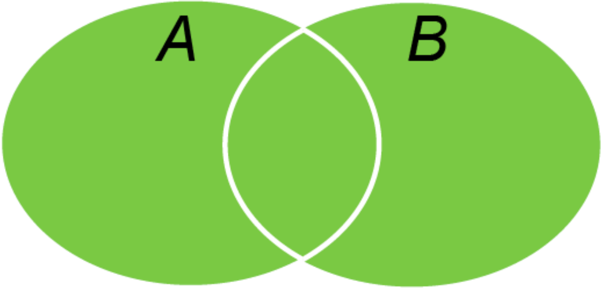
$$P(A) = p = \lim_{x \to \infty} \frac{m}{n}$$

不可能完全准确得到 p，在 n 充分大时，频率 $W(A)$ 作为 $P(A)$ 的近似值。

- 概率的基本性质：
  1. 任何事件的概率都在 0 和 1 之间 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;
  2. 必然事件的概率等于 1 $P(U) = 1$
  3. 不可能事件的概率等于 0 $P(V) = 0$

（一）事件的相互关系

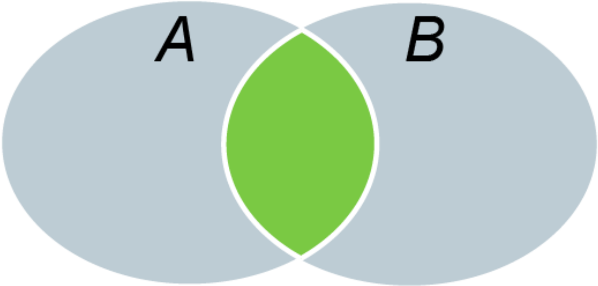
- 和事件
  - 事件 A 和事件 B 至少有一件发生而构成的新事件，$A+B$



$A \cup B$

（一）事件的相互关系

- 积事件
  - 事件 A 和事件 B 同时发生而构成的新事件，$A \cdot B$

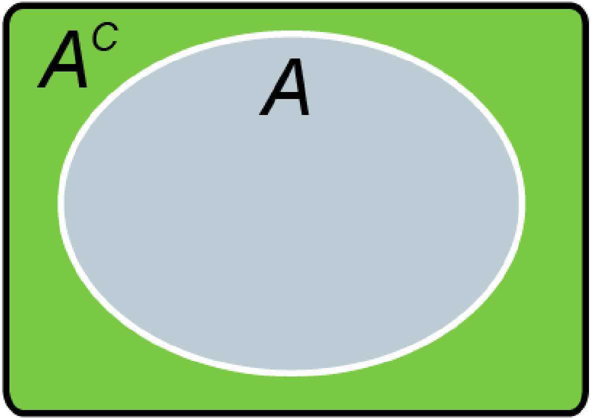


$A \cap B$

- 互斥事件
  - 事件 A 和事件 B 不能同时发生，$A \cdot B = V$

（一）事件的相互关系

- 对立事件
  - 事件 A 和事件 B 必有一个事件发生，但二者不能同时发生，$A \cap B = V, A \cup B = U, \bar{A} = B, \bar{B} = A$
  - 新生儿要么为男孩，要么为女孩



（一）事件的相互关系

- 独立事件
  - 事件 A 的发生与事件 B 的发生毫无关系
  - 独立事件群：多个事件 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ 彼此独立
  - 条件概率：当 A 发生时，B 发生的概率 $P(B|A)$
- 完全事件系
  - 多个事件 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ 两两相斥，且每次试验结果必然发生其一

（二）概率计算法则

- 乘法定理
  - 如果事件 A 和事件 B 为独立事件，则事件 A 与事件 B 同时发生的概率等于事件 A 和事件 B 各自概率的乘积，称为**乘法定理**。

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

    - 推理：如果 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ 彼此独立，则 $P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$
  - 如果是非独立事件，则 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

（二）概率计算法则

- 加法定理
  - 互斥事件A 和 B 的和事件的概率等于事件 A 和事件 B 的概率之和，称为**加法定理**。

    $$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

    - 推理 1：如果 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ 为 n 个互斥事件，则其和事件的概率为 $P(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$
    - 推理 2：对立事件 $\bar{A}$ 的概率为 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
    - 推理 3：完全事件系和事件的概率等于 1
  - 如果事件 A 和 B 不互斥，那需要减去两个事件的交集

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

（二）概率计算法则

- 贝叶斯定理：事件 A 在事件 B 发生的条件下与事件 B 在事件 A 发生的条件下，它们两者的概率并不相同，但是它们两者之间存在一定的相关性, 并具有以下关系：

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

- 统计学两大学派：贝叶斯学派和频率学派
- 推导过程：
  $P(A \cap B) = P(B \cap A)$
  $P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$
  $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

- 研究随机变量主要是研究变量的取值范围，也就是取值的概率
- 随机变量的概率分布：随机变量的取值与取这些值的概率之间的对应关系
- 随机变量的概率分布可以用分布函数表述
- 离散型变量的概率分布
  - 二项分布
  - 泊松分布
- 连续型变量的概率分布
  - 正态分布

（一）离散型随机变量的概率分布

【复习】离散型变量/非连续变量：在变量数列中仅能取得固定数值，并且通常是整数

- 离散型随机变量 x 所有可能的取值为 $x = x_i(i = 1, 2, \cdots, n)$
- 对于任意一个 x_i，都有一个相应的概率为 $p_i(i = 1, 2, \cdots, n)$

可以用下式表示为，

$$P(x = x_i) = p_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

- x_i 与 p_i 为数值，表示事件“变量 x 取值为 x_i 时”的概率等于 p_i

并且，

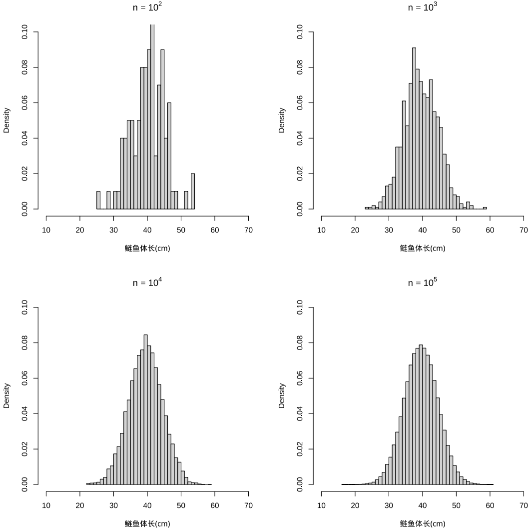
$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

（二）连续型随机变量的概率分布

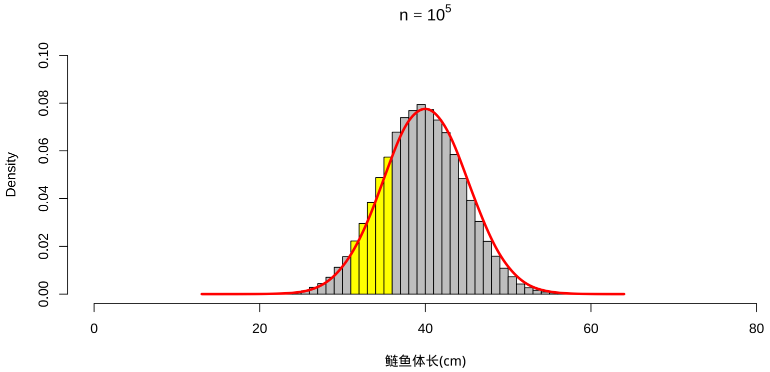
【复习】连续变量：在变量范围内可抽出某一范围内的所有值，变量之间是连续的、无限的

- 对于连续型随机变量，可以通过分组整理成次数分布表
- 如果从总体中抽取样本的容量 n 相当大，则频率分布就趋于稳定，近似地看成总体的概率分布
- 对连续型随机变量的次数分布表作直方图，直方图中同一间距内的频率密度是相等的
- 当 n 无限大，频率转化为概率，频率密度转化为概率密度，直方图逼近光滑连续曲线
  - 概率密度曲线（曲线下的总面积为 1）
  - 概率密度函数 $f(x)$

（二）连续型随机变量的概率分布



（二）连续型随机变量的概率分布



对于一个连续型变量 x，取值于区间内的概率即黄色阴影部分的面积，也就是概率密度函数 $f(x)$ 的积分，即

$$P(x_1 < x < x_2) = \int^{x_2} f(x)dx$$

当 n 足够大的时候，为什么可以用样本中的 $W(A)$ 代替 $P(A)$?

大数定律是用来阐述大量随机现象的平均结果稳定性的一系列定律

- 伯努利大数定律
- 辛钦大数定律

样本容量越大，样本的统计数与总体参数之差越小

（一）伯努利大数定律

- m 是 n 次独立试验中事件 A 出现的次数，p 是事件 A 在每次试验中出现的概率，对于任意小的正数 ϵ，有：

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\epsilon\right\}=1$$

  - 以上，P 为实现 $\left|\frac{m}{n}-p\right|<\epsilon$ 这一事件的概率，$P=1$ 是必然事件。
- n 无限大的情况下，$\frac{m}{n}$ 与理论概率 p 可以基本相等

（二）辛钦大数定律

- 设一个随机变量 x_i，是由一个总体平均数 μ 和随机误差 ϵ_i 构成 $x_i = \mu + \epsilon_i$
- 从总体中抽取 n 个随机变量构成一组样本，样本的平均数是

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mu + \epsilon_i) = \mu + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i$$

- 当样本容量 n 越来越大，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i$ 就越小，使得 $\bar{x}$ 逼近 μ
- 样本容量越大，样本统计数与总体参数之差越小

随机变量的概率分布可以用分布函数来表述。

- 离散型变量的概率分布
  - 二项分布
  - 泊松分布
- 连续型变量的概率分布
  - 正态分布

（一）二项分布的概率函数

- 二项分布是一种离散型随机变量的分布。
  - 每次试验只有两个对立结果，A 和 $\bar{A}$，出现的概率分别记为 p 和 q $(q=1-p)$。
  - 试验具有重复性和独立性。
    - 重复性：每次试验条件不变，在每次试验中事件 A 出现的概率都是 p
    - 独立性：任何一次试验中事件 A 的出现与其余各次试验中出现的任何结果无关。

$P(x)$ 为随机变量 x 的二项分布，记为 $B(n,p)$，概率分布函数为：

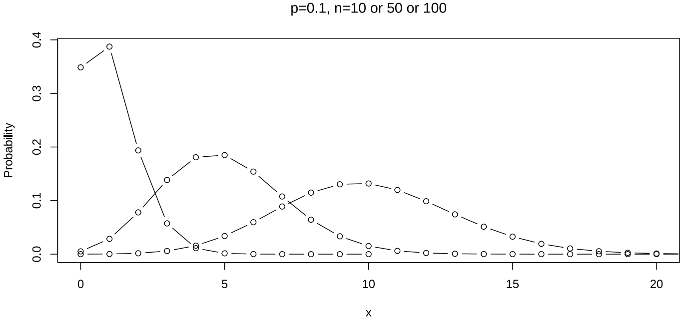
$$P(x)=\mathrm{C}_n^x p^x q^{(n-x)}$$

其中，$\mathrm{C}_n^x=\frac{n!}{x!(n-x)!}$，$q=1-p$。

重复实验 N 次，每次在 n 个试验中出现事件 A 为 x 的理论次数等于 $N\cdot P(x)$

（二）二项分布的的性状和参数

- 二项分布的形状由 n 和 p 两个参数决定
  - n 值不同的情况下，p 值较小的时候，分布是偏倚的。



  - p 值趋于 0.5 的时候，分布趋于对称（如何图形化？）

（二）二项分布的的性状和参数

- 二项分布的参数
  - 二项分布的平均数

$$\mu = np$$

  - 二项分布的总体标准差

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

- 很多事件的发生概率很小，但是样本容量很大，即 n 很大和 p 很小
- 这是二项分布的特殊情况，即泊松分布
- 泊松分布的概率函数由二项分布推导得到：

$$P(x) = \mathrm{C}_n^x p^x (1-p)^{(n-x)}$$

由于是二项分布，所以 $P(x) = np = \mu$，即 $p = \frac{\mu}{n}$：

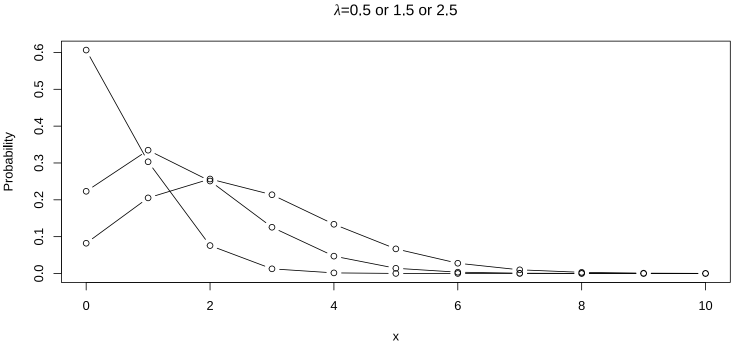
$$P(x) = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} (\frac{\mu}{n})^x (1 - \frac{\mu}{n})^{n-x}$$

考虑到 n 无限大，μ 和 x 相对较小，可以近似后得到：

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

其中 λ 是参数，$\lambda = np$；e 为自然对数，x 为正整数。

- 泊松分布的平均数、方差和标准差为
  - $\mu = \lambda$
  - $\sigma^2 = \lambda$
  - $\sigma = \sqrt{\lambda}$
- 对于泊松分布来说，分布函数形状由 λ 决定。



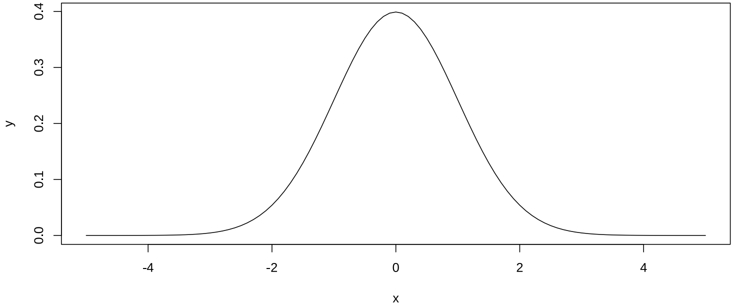
- 正态分布是一种连续型随机变量的概率分布
- 多数变量都围绕在平均值左右，由平均值到分布的两侧，变量数逐渐减少
- 在统计理论和应用上最重要的分布
  - 试验误差的分布一般都服从于这种分布
  - 许多生物现象的计量资料也服从于这种分布
  - 正态分布还可作为离散型随机变量或其他变量的近似分布（中心极限定理）

（一）正态分布概率密度函数

- 正态分布的概率密度函数根据二项分布的函数在 $n \to \infty$ 时推导出

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

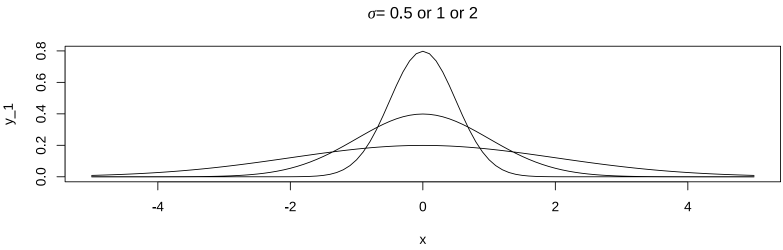
  其中 μ 为总体平均数，π 为圆周率，e 为自然对数底
- 正态分布记为 $N(\mu, \sigma^2)$，表示平均数为 μ，方差为 σ^2 的正态分布

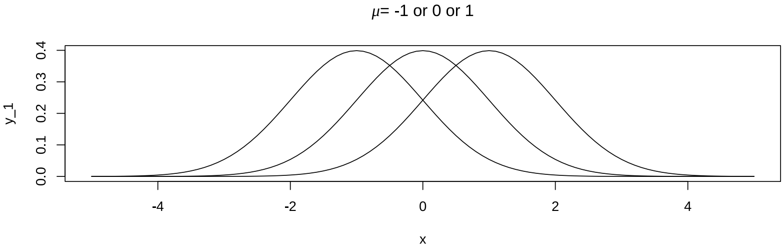


（二）正态分布特征

- 当 $x=\mu$ 时，$f(x)$ 有最大值为 $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$
- 当 $x-\mu$ 的绝对值相等，$f(x)$ 值也相等
- $\frac{x-\mu}{\sigma}$ 的绝对值越大，$f(x)$ 的值越小，逼近但不等于 0
- 正态分布曲线完全由参数 μ 和 σ 决定
- 正态分布在 $x=\mu\pm\sigma$ 处各有一个拐点
- 正态分布曲线在 $x\in(-\infty,\infty)$ 皆能取值（x 取值的完全事件系）

（二）正态分布特征

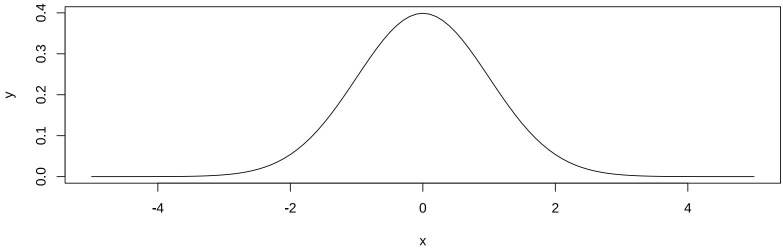

σ= 0.5 or 1 or 2
y_1
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
-4
-2
0
2
4
x


μ= -1 or 0 or 1
y_1
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
-4
-2
0
2
4
x

（三）标准正态分布

- μ 确定了分布曲线的中心位置
- σ 确定了分布曲线的变异度
- 对于 $N(\mu,\sigma^2)$ 来说，是一条曲线系
- 为了便于一般化应用，令 $\mu=0,\sigma=1$，则

$$f(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2}$$



（三）标准正态分布

- 对于任何一个服从 $N(\mu, \sigma^2)$ 的随机变量，都可以通过 u 进行标准化变换

$$u = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

- u 为标准正态离差，表示离开平均数 μ 几个标准差 σ

第三节　统计数的分布

统计学研究的两个方向：

- 由总体到样本（一般到特殊）
  - 从总体到总体抽样的变异特点
- 由样本到总体（特殊到一般）
  - 从一系列样本的统计数推断总体
  - 统计推断

- 理论上，从总体抽取所有可能的样本，就能获得有关统计数变异的全部信息
- 部分抽样或者复置抽样（小的有限总体）
- 复置抽样的样本容量可以是无限的，具有无限总体抽样的性质

近似正态总体：[3,4,5]

```
x <- c(3, 4, 5)
x_var <- mean((x-mean(x))^2) #population
x_var
```

```
## [1] 0.6666667
```

```
x_sd <- sqrt(x_var) #population
x_sd
```

```
## [1] 0.8164966
```

```
x_VAR <- var(x) #sampling
x_VAR
```

```
## [1] 1
```

```
x_SD<- sd(x) #sampling
x_SD
```

```
## [1] 1
```

以 $n = 2$ 作独立的放回式抽样

Var1	Var2	mean	var	sd
3	3	3.0	0.0	0.0000000
4	3	3.5	0.5	0.7071068
5	3	4.0	2.0	1.4142136
3	4	3.5	0.5	0.7071068
4	4	4.0	0.0	0.0000000
5	4	4.5	0.5	0.7071068
3	5	4.0	2.0	1.4142136
4	5	4.5	0.5	0.7071068
5	5	5.0	0.0	0.0000000

对以上数据列进行求和

	x
Var1	36.000000
Var2	36.000000
mean	36.000000
var	6.000000
sd	5.656854

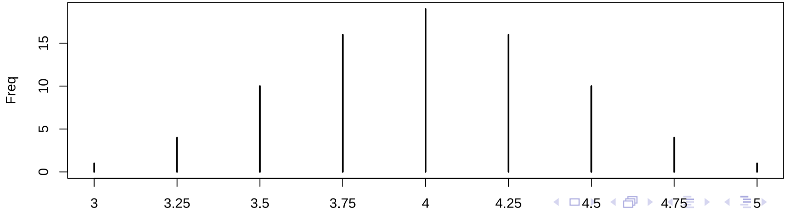
- 样本平均数 $\bar{x}$ 的平均数 $\mu_{\bar{x}} = \frac{36}{9} = 4 = \mu$
- 样本方差 s^2 的平均数 $\mu_{s^2} = \frac{6}{9} = 0.6667 = \sigma^2$
- 样本标准差 s 的平均数 $\mu_s = \frac{5.6568}{9} = 0.6285 \neq \sigma$

无偏估计值：样本某一统计数的平均数等于总体的相应参数，该统计数为总体相应参数的无偏估计值

样本容量 $n = 2$ 情况下样本平均数的概率分布

Var1	Freq
3	1
3.5	2
4	3
4.5	2
5	1

样本容量 $n = 4$ 情况下样本平均数的概率分布



样本平均数分布的性质:

- 样本平均数分布的平均数等于总体平均数: $\mu_{\bar{x}} = \mu$
- 样本平均数分布的方差等于总体方差除以样本容量，即: $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$; 平均数标准误: $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- 从正态总体 $N(N, \sigma^2)$ 抽样，样本平均数 $\bar{x}$ 是一个正态分布 $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$
- 如果不是正态总体，当样本容量 n 不断增大，样本平均数 $\bar{x}$ 的分布也接近正态分布 $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$，这就是**中心极限定理**

无论何种分布，只要样本容量 $n \geq 30$，认为样本平均数的分布是正态分布，可以对样本平均数进行标准化 $u = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

样本平均数差数分布的性质:

- 样本平均数差数的平均数等于总体平均数的差数:
  $\mu_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \mu_{\bar{x}_1} - \mu_{\bar{x}_2}$
- 样本平均数差数的方差等于总体方差除以各自样本容量之和:
  $\sigma^2_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sigma^2_{\bar{x}_1} + \sigma^2_{\bar{x}_2}$
- 样本平均数差数的标准误: $\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

如果：

- 总体方差 σ^2 未知，且
- 样本容量不大（$n < 30$）的情况

则，$\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ 不再服从正态分布

这时候，样本平均数服从 $df = n - 1$ 的 t 分布

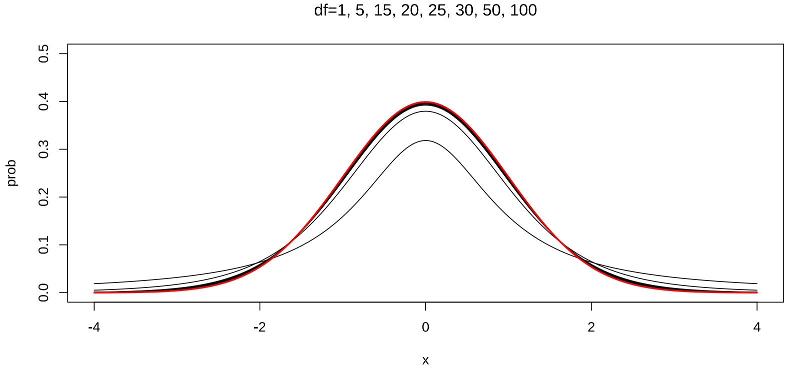
t 分布

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

t 分布的特征

- t 分布曲线左右对称
- 受到自由度 $df = n - 1$ 的制约，每个自由度都有一条曲线
- 和正态分布相比，t 分布的顶部偏低，尾部偏高



总结

- 介绍概率的基础知识
- 大数定律：当 n 充分大，可以用样本统计数对总体参数做出估计
- 常见的理论分布（前两种分布在特殊情况下可以向正态分布逼近）
    - 二项分布
    - 泊松分
    - 正态分布