UNIVERSIDAD ABIERTA Y A DISTANCIA DE MÉXICO

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

ALUMNO

URIEL SOLIS PROCOPIO

MATRICULA

ES1821017223

DOCENTE

LUIS FERNANDO OROZCO CORTES

ASIGNATURA

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

UNIDAD 1

EVIDENCIA DE APRENDIZAJE

1 de mayo de 2023

1. $\varphi_x + y\varphi_y = 0$

   Solución:

   Como podemos ver se trata de una EDP de primer orden lineal, por lo que podemos tener el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = 1 \tag{1}$$
$$\frac{dy}{dt} = y \tag{2}$$

   Aplicamos la regla de la cadena para obtener

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y}{1} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = y$$

   Resolviendo la EDO por el método de variables separables

$$\frac{dy}{dx} = y \Longrightarrow \frac{dy}{y} = dx$$

   Integrando

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx \Longrightarrow \ln(y) = x + cte \Longrightarrow cte = \ln(y) - x$$

   Así entonces la solución es

$$\varphi(x, y) = f(cte) = f(\ln(y) - x)$$

   Comprobación

   Las derivadas parciales quedan como

$$\begin{aligned}\varphi_x &= f'(\ln(y) - x)(-1) = -f'(\ln(y) - x)\\ \varphi_y &= f'(\ln(y) - x)\left(\frac{1}{y}\right)\end{aligned}$$

   Sustituyendo en la EDP original obtendremos

$$\begin{aligned}&-f'(\ln(y) - x) + y\left(\frac{1}{y}\right)f'(\ln(y) - x) = 0\\ &-f'(\ln(y) - x) + f'(\ln(y) - x) = 0\\ &0 = 0\end{aligned}$$

2. $xy(\Psi_x - \Psi_y) = (x - y)\Psi$

   Solución:

   La EDP podemos verla como

$$xy\Psi_x - xy\Psi_y = (x - y)\Psi$$

   Establecemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = xy \tag{3}$$
$$\frac{dy}{dt} = -xy \tag{4}$$
$$\frac{d\Psi}{dt} = (x-y)\Psi \tag{5}$$

Aplicamos la regla de la cadena para obtener

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx} = \frac{-xy}{xy} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -1$$

Resolviendo la EDO por el método de variables separables

$$\frac{dy}{dx} = -1 \Longrightarrow dy = -dx$$

Integrando obtendremos

$$\int dy = -\int dx \Longrightarrow y = -x + cte_1 \Longrightarrow cte_1 = y + x$$

Estas son las curvas características.

Resolvemos a (5) por el método de de separación de variables

$$\frac{d\Psi}{dt} = (x-y)\Psi \Longrightarrow \frac{d\Psi}{\Psi} = (x-y)dt$$

Integrando

$$\int \frac{d\Psi}{\Psi} = (x-y)\int dt \Longrightarrow \ln(\Psi) = (x-y)t + cte_2 \tag{6}$$

Resolvemos a (3) por el método de separación de variables

$$\frac{dx}{dt} = xy \Longrightarrow \frac{dx}{x} = ydt$$

Integrando

$$\int \frac{dx}{x} = y\int dt \Longrightarrow \ln(x) = yt + cte_3 \Longrightarrow \frac{\ln(x) - cte_3}{y} = t$$

Sustituimos el valor de t en (6) para obtener

$$\begin{aligned}
\ln(\Psi) &= (x-y)\left(\frac{\ln(x) - cte_3}{y}\right) + cte_2 \\
\ln(\Psi) &= \frac{x\ln(x) - xcte_3 - y\ln(x) + ycte_3}{y} + cte_2 \\
\ln(\Psi) &= \frac{x}{y}\ln(x) - \ln(x) + cte_4\left(1 - \frac{x}{y}\right) \\
\ln(\Psi) &= \frac{x}{y}\ln(x) - \ln(x) + f(x+y)\left(1 - \frac{x}{y}\right) \\
e^{\ln(\Psi)} &= e^{\frac{x}{y}\ln(x) - \ln(x) + f(x+y)\left(1 - \frac{x}{y}\right)} \\
\Psi &= e^{\frac{x}{y}\ln(x) - \ln(x) + f(x+y)\left(1 - \frac{x}{y}\right)}
\end{aligned}$$

3. $\varphi_x - \varphi_y + (x+y)\varphi = 0$
Solución:

La EDP podemos verla de la siguiente manera

$$\varphi_x - \varphi_y = -(x+y)\varphi$$

Establecemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = 1 \tag{7}$$
$$\frac{dy}{dt} = -1 \tag{8}$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = -(x+y)\varphi \tag{9}$$

Aplicando la regla de la cadena para obtener

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -1$$

Resolvemos la EDO por el método de variables separables

$$\frac{dy}{dx} = -1 \Longrightarrow dy = -dx$$

Integrando

$$\int dy = -\int dx \Longrightarrow y = -x + cte_1 \Longrightarrow cte_1 = y + x \tag{10}$$

Las cuales son las curvas características.

Resolvemos (9) por el método de separación de variables

$$\frac{d\varphi}{dt} = -(x+y)\varphi \Longrightarrow \frac{d\varphi}{\varphi} = -(x+y)dt$$

Integrando

$$\int \frac{d\varphi}{\varphi} = -(x+y)\int dt \Longrightarrow \ln(\varphi) = -(x+y)\cdot t + cte_2 \tag{11}$$

Resolvemos (7) por el método de separación de variables

$$\frac{dx}{dt} = 1 \Longrightarrow dx = dt$$

Integrando

$$\int dx = \int dt \Longrightarrow x = t + cte_3 \Longrightarrow t = x - cte_3$$

Sustituimos el valor de t en (11) para obtener

$$\begin{aligned}
\ln(\varphi) &= (x+y)(x - cte_3) + cte_2 \\
\ln(\varphi) &= -(x^2 - xcte_3 + xy - ycte_3) + cte_2 \\
\ln(\varphi) &= -x^2 + xcte_3 - xy + ycte_3 + cte_2 \\
\ln(\varphi) &= -x^2 - xy + (x+y+1)cte_4
\end{aligned}$$

La cte_4 es constante a lo largo de cada curva característica, es decir, varia de cada curva a otra, si tomamos una sola curva característica entonces cte_4 es constante en toda esa curva tomada, en este sentido si cambiamos de curva característica el valor de cte_4 cambiará en función de la curva característica seleccionada, así podemos decir que cte_4 es una función que depende de las curvas características, de esta forma obtendremos

$$\begin{aligned}\ln(\varphi) &= -x^2 - xy + (x+y+1)f(cte_1)\\ \ln(\varphi) &= -x^2 - xy + (x+y+1)f(x+y)\end{aligned}$$

Aplicamos la exponencial

$$\begin{aligned}&e^{\ln(\varphi)} = e^{-x^2-xy+(x+y+1)f(x+y)}\\ &\varphi = e^{-x^2-xy+(x+y+1)f(x+y)}\end{aligned}$$

Comprobación:
Calculamos la derivadas parciales

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{dx} &= e^{-x^2-xy+(x+y+1)f(x+y)} \cdot (-2x - y + (x+y+1)f'(x+y) + f(x+y))\\ \frac{\partial\varphi}{dy} &= e^{-x^2-xy+(x+y+1)f(x+y)} \cdot (-x + (x+y+1)f'(x+y) + f(x+y))\end{aligned}$$

Sustituyendo las derivadas parciales y la función φ en la EDP principal para obtener

$$\begin{aligned}&\varphi_x - \varphi_y + (x+y)\varphi = 0\\ &e^{-x^2-xy+(x+y+1)f(x+y)} \cdot (-2x - y + (x+y+1)f'(x+y) + f(x+y)) -\\ &\left(e^{-x^2-xy+(x+y+1)f(x+y)} \cdot (-x + (x+y+1)f'(x+y) + f(x+y))\right) + (x+y)(e^{-x^2-xy+(x+y+1)f(x+y)}) = 0\end{aligned}$$

Factorizamos como termino común a $e^{-x^2-xy+(x+y+1)f(x+y)}$, entonces

$$\begin{aligned}&e^{-x^2-xy+(x+y+1)f(x+y)}\left[-2x - y + (x+y+1)f'(x+y) + f(x+y) + x - (x+y+1)f'(x+y) - f(x+y) + x + y\right] = 0\\ &e^{-x^2-xy+(x+y+1)f(x+y)}[0] = 0\\ &0 = 0\end{aligned}$$

Por tanto la solución a la que llegamos es valida.

4. $\varphi_x + 2\varphi_y + 2x\varphi - y\varphi = 0$
Solución:

La EDP podemos reescribirla como

$$\varphi_x + 2\varphi_y = (y - 2x)\varphi$$

Establecemos el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = 1 \tag{12}$$

$$\frac{dy}{dt} = 2 \tag{13}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = (y - 2x)\varphi \tag{14}$$

Aplicamos regla de la cadena para obtener

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2}{1} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = 2$$

Resolvemos la EDO por el método de variables separables

$$\frac{dy}{dx} = 2 \Longrightarrow dy = 2dx$$

Integrando

$$\int dy = 2\int dx \Longrightarrow y = 2x + cte_1 \Longrightarrow cte_1 = y - 2x$$

Las cuales son nuestras curvas características

Resolvemos a (14) por separación de variables

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = (y-2x)dt$$

Integrando

$$\int \frac{d\varphi}{\varphi} = (y-2x)\int dt \Longrightarrow \ln(\varphi) = (y-2x)t + cte_2 \tag{15}$$

Resolvemos a (12) por separación de variables para obtener

$$dx = dt$$

Integrando

$$\int dx = \int dt \Longrightarrow x = t + cte_3 \Longrightarrow t = x - cte_3$$

Sustituyendo el valor de t en (15) obtendremos

$$\begin{aligned}
\ln(\varphi) &= (y-2x)(x-cte_3) + cte_2 \\
\ln(\varphi) &= yx - ycte_3 - 2x^2 + 2xcte_3 + cte_2 \\
\ln(\varphi) &= yx - 2x^2 + 2xcte_3 - ycte_3 + cte_2 \\
\ln(\varphi) &= yx - 2x^2 + (2x - y + 1)cte_4
\end{aligned}$$

La cte_4 es constante a lo largo de cada curva característica, es decir, varia de cada curva a otra, si tomamos una sola curva característica entonces cte_4 es constante en toda esa curva tomada, en este sentido si cambiamos de curva característica el valor de cte_4 cambiará en función de la curva característica seleccionada, así podemos decir que cte_4 es una función que depende de las curvas características, de esta forma obtendremos

$$\begin{aligned}
\ln(\varphi) &= yx - 2x^2 + (2x - y + 1)f(cte_1) \\
\ln(\varphi) &= yx - 2x^2 + (2x - y + 1)f(y - 2x)
\end{aligned}$$

Aplicamos la exponencial

$$\begin{aligned}
e^{\ln(\varphi)} &= e^{yx - 2x^2 + (2x-y+1)f(y-2x)} \\
\varphi &= e^{yx - 2x^2 + (2x-y+1)f(y-2x)}
\end{aligned}$$

Referencias:

- UNADM. (s.f.). Unidad 1. Introducción a las ecuaciones diferenciales parciales. En Módulo de Ecuaciones Diferenciales Parciales (pp. 1-48). Universidad Abierta y a Distancia de México. Recuperado de

  https://dmd.unadmexico.mx/contenidos/DCEIT/BLOQUE2/MT/06/MEDP/U1/descargables/MEDP_U1_contenido.pdf