Formulario Simulación II

Solis Procopio Uriel

1. Funciones Continuas

1.1. Uniforme

Si X es una variable aleatoria continua con distribución uniforme continua entonces escribimos $X \sim U(a, b)$

1.1.1. Función de densidad

Si $X \sim U(a, b)$ entonces la función de densidad es

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}$$

Para $x \in [a, b]$

1.1.2. Función de distribución

Si $X \sim U(a, b)$ entonces la función de distribución es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & si \quad a \leq x < b \\ 1 & si \quad x \geq b \end{cases}$$

1.1.3. Media

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

1.1.4. Varianza

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

1.2. Exponencial

1.2.1. Función de densidad

Se dice que una variable aleatoria continua X tiene una distribución exponencial con parámetros $\lambda > 0$ y escribimos $X \sim Exp(\lambda)$ con función de densidad

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Para $x > 0$

1.2.2. Función de distribución

La función de distribución esta dada por

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Para $x \geq 0$

1.2.3. Media

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

1.2.4. Varianza

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

1.3. Weibull

1.3.1. Función de densidad

Si X es una variable aleatoria continua, se dice que X tiene una distribución Weibull con parámetros $\alpha, \lambda > 0$ y escribimos $X \sim Weibull(\alpha, \lambda)$ y su función de densidad y su función esta dada por

$$f(x) = \lambda\alpha(\lambda x)^{\alpha-1} e^{-(\lambda x)^\alpha}$$

1.3.2. Función de distribución

La función de distribución esta dada por

$$F(x) = 1 - e^{-(\lambda x)^\alpha}$$

Para $x > 0$

1.3.3. Media

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$$

1.3.4. Varianza

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right]$$

1.4. Log-Normal

1.4.1. Función de densidad

Una variable aleatoria positiva X tiene una distribución lognormal con parámetros μ y σ y escribimos $X \sim Lognormal(\mu, \sigma^2)$, si el logaritmo natural de X sigue una distribución normal con media μ y varianza σ^2 esto es $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ para obtener

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi} e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

1.4.2. Función de distribución

La función de distribución esta dada por

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)$$

Donde Φ es la función de distribución acumulada de una normal estándar $N(0, 1)$

1.4.3. Media

$$E[X] = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$$

1.4.4. Varianza

$$\sigma^2 = \left(e^{\sigma^2} - 1\right) e^{2\mu+\sigma^2}$$

1.5. Normal

1.5.1. Función de densidad

Denotaremos a una distribución normal como sigue $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ entonces su función de densidad esta dada por

$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

1.5.2. Función de distribución

La función de distribución esta dada por

$$\Phi_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{2}\left[1 + erf\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right], \quad x \in \mathbb{R}$$

Donde **erf = función error de Gauss** que la podemos expresar como

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

1.5.3. Media

$$E[X] = \mu$$

1.5.4. Varianza

$$\sigma^2$$

2. Funciones discretas

2.1. Bernoulli

Si X es una variable aleatoria discreta que mide el número de éxitos y se realiza un único experimento con dos posibles resultados denotamos éxito y fracaso, se dice que la variable aleatoria X se distribuye como una Bernoulli de parámetros p con $0 < p < 1$ y escribimos $X \sim Bernoulli(p)$

2.1.1. Función de Probabilidad

Su función de probabilidad es

$$P[X = x] = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1$$

2.1.2. Función de distribución

La función de distribución acumulada de una variable aleatoria Bernoulli esta dado por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si & x < 2 \\ 1-p & si & 0 \le x < 1 \\ 1 & si & x \ge 1 \end{cases}$$

2.1.3. Media

$$E[X] = p$$

2.1.4. Varianza

$$\sigma^2 = p(1-p)$$

2.2. Uniforme discreta

Si X es una variable aleatoria discreta cuyo soporte es el conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y tiene una distribución uniforme discreta entonces lo escribiremos como $X \sim Uniforme(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

2.2.1. Función de Probabilidad

La función de probabilidad es

$$P[X = x] = \frac{1}{n}$$

Para $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$

2.2.2. Media

$$E[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

2.2.3. Varianza

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - E[X])^2$$

2.3. Binomial

Si una variable aleatoria discreta X tiene una distribución binomial con parámetros $n \in \mathbb{N}$ y p con $0 < p < 1$ entonces escribiremos $X \sim Bin(n,p)$

2.3.1. Función de Probabilidad

Su función de probabilidad esta dada por

$$P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Para $x = 0, 1, 2, \ldots, n$, donde

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

2.3.2. Función de distribución

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

2.3.3. Media

$$E[X] = np$$

2.3.4. Varianza

$$\sigma^2 = np(1-p)$$

2.4. Geométrica

Si una variable aleatoria discreta X sigue una distribución geométrica con parámetros $0 < p < 1$ entonces escribiremos $X \sim Geometrica(p)$

2.4.1. Función de Probabilidad

La función de probabilidad podemos verla como

$$P[X = x] = p(1-p)^{x-1}$$

Para $x = 1, 2, 3, \ldots$

2.4.2. Función de distribución

La función de distribución esta dada por

$$P[X \leq x] = 1 - (1-p)^x$$

Para $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$

2.4.3. Media

$$E[X] = \frac{1}{p}$$

2.4.4. Varianza

$$\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

2.5. Poisson

Sea $\lambda > 0$ y X una variable aleatoria discreta, si la variable aleatoria X tiene una distribución de Poisson con parámetros λ entonces escribiremos $X \sim Poisson(\lambda)$

2.5.1. Función de Probabilidad

La función de probabilidad esta dada por

$$P[X = x] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Donde $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

2.5.2. Función de distribución

La función de distribución queda de la siguiente manera

$$\frac{\Gamma(\lfloor k+1 \rfloor, \lambda)}{\lfloor k \rfloor !}$$

Para $k \geq 0$ donde $\Gamma(x, y)$ es una función gamma incompleta, es decir

$$\Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$$

2.5.3. Media

$$E[X] = \lambda$$

2.5.4. Varianza

$$\sigma^2 = \lambda$$

3. Metodología de la simulación

1. Identificación de variables: aquellas cuyo comportamiento define el comportamiento o la evolución global del sistema
2. Determine la distribución de probabilidad
3. Modele las variables aleatorias
4. Defina el modelo del sistema y los objetivos de la simulación
5. Diseño del experimento

6. Repita el experimento n veces
7. Obtener la gráfica de estabilización
8. Calculo de probabilidad
9. Hallar el intervalo de confianza