

Report of SMFQM (part 1)

Luca Solito

Matricola: 7159517

Corso di laurea: Statistica e Data Science

Anno accademico: 2025–2026

Data di consegna: 09/02/2025

1 Obiettivo dell'Analisi

L'obiettivo dell'analisi è esaminare la volatilità del prezzo dei contratti futures del petrolio greggio negli Stati Uniti, costruendo un modello in grado di prevedere l'intensità delle sue fluttuazioni per il successivo mese finanziario.

2 Descrizione e Analisi dei dati

I dati utilizzati riguardano i prezzi giornalieri, espressi in dollari per barile, dei contratti futures del petrolio greggio statunitense. I dati provengono da Yahoo Finance, punto di riferimento nel settore finanziario per il monitoraggio di asset, indici e listini borsistici mondiali.

Come stimatore di volatilità dell'asset si è utilizzato Garman-Klass. Quest'ultimo fornisce una misura robusta e accurata delle fluttuazioni di prezzo, in quanto sfrutta l'intera struttura informativa giornaliera del titolo finanziario (Open, High, Low, Close). I valori mancanti di tale metrica, causati dai prezzi negativi dei futures relativi allo shock del COVID-19, sono stati imputati tramite il Filtro di Kalman.

Il periodo coperto dai dati va dal "04-01-2010" al "28-01-2026", per un totale di 4042 osservazioni.

3 Analisi Preliminare

La Time Series (Figure 1) della volatilità di Garman-Klass mostra che gli spike di volatilità più marcati coincidono con significativi shock di mercato. L'episodio di maggiore intensità è riconducibile alla crisi pandemica da COVID-19, mentre un secondo evento di rilevante entità si osserva in concomitanza dell'inizio del conflitto russo-ucraino nel 2022.

Dalla relativa ACF (Figure 1), si osserva che le autocorrelazioni partono da circa 0.8 e decrescono molto lentamente. Questo indica che la volatilità del petrolio è estremamente persistente, come generalmente accade per i titoli finanziari.

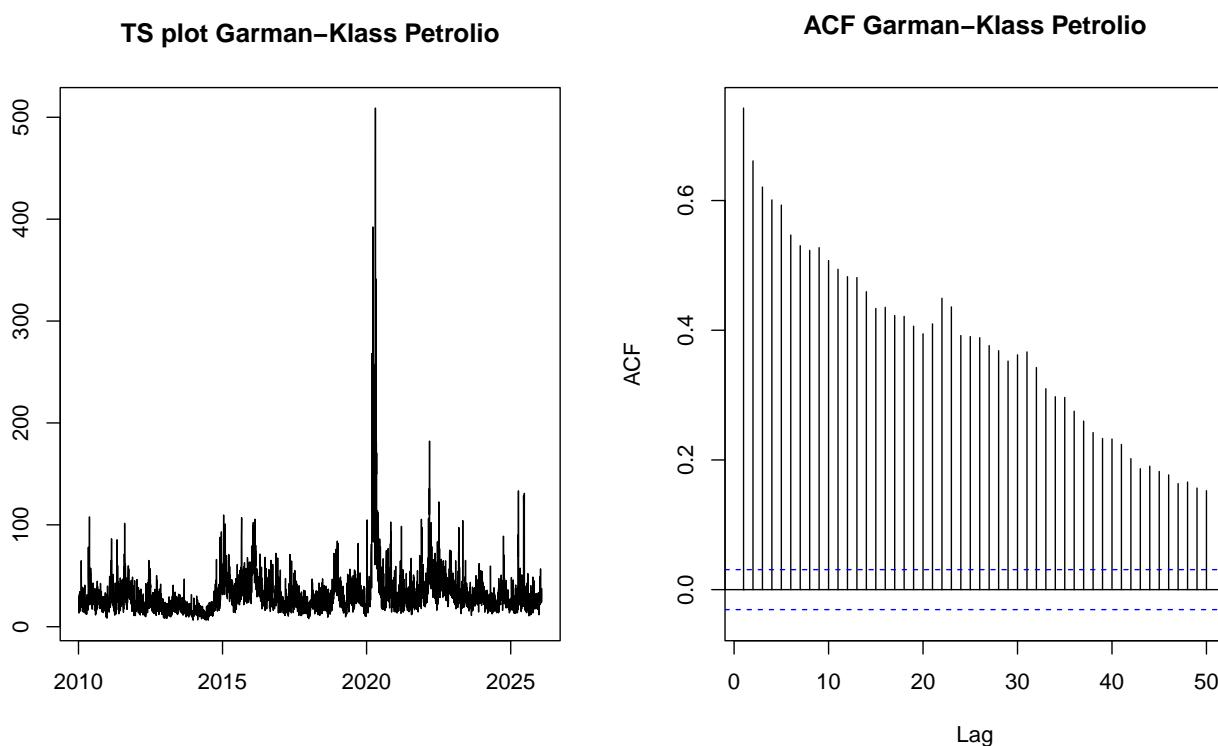


Figure 1: TS plot & ACF volatilità Garman-Klass petrolio greggio USA

Nonostante l'analisi grafica non mostri pattern di stagionalità definiti, sono state predisposte variabili dummy temporali (giornaliere, mensili e annuali) come potenziali regressori esterni, al fine di valutarne l'impatto nelle successive fasi di modellizzazione.

I dati relativi al 2025 e al 2026 vengono esclusi in fase di stima del modello e utilizzati per l'analisi ex-post.

4 Stima del Modello

Al fine di individuare il modello GAS più performante, si sono testate diverse parametrizzazioni. La selezione si è basata sul confronto della bontà di adattamento e complessità del modello tramite gli indici AIC e BIC, e attraverso l'analisi diagnostica dei residui moltiplicativi. Come specifica di base si è adottata una distribuzione condizionata Gamma, definita dal parametro di forma α (shape) e dal parametro di tasso β (rate).

Dopo aver testato modelli con solo regressori esterni, specifiche con solo parte dinamica della serie e configurazioni ibride, i risultati migliori sotto distribuzione Gamma sono emersi dalle parametrizzazioni prive di regressori esterni. In particolare, le specifiche GAS(1,1) e GAS(2,2) sono risultate le più rilevanti, con quest'ultima che mostra una capacità di adattamento ai dati leggermente superiore rispetto alla versione più parsimoniosa. I risultati sono i seguenti:

- Gamma (1,1) -> Log-Likelihood: -13808.91, AIC: 27625.82, BIC: 27650.76;
- Gamma (2,2) -> Log-Likelihood: -13792.27, AIC: 27596.55, BIC: 27633.96.

Table 1 riporta la stima, lo standard error, la statistica test, il p-value e le radici AR per il modello GAS(2,2) con distribuzione condizionata Gamma.

Table 1: : Stima del Modello (2,2) con distribuzione condizionata Gamma, regress = “joint” e scaling = “unit”

Parametro	Stima	Std. Error	Statistica Test	p-value
log(rate)_omega	-0.005212	0.00096061	-5.4261	5.761e-08
log(rate)_alpha1	0.028019	0.00157410	17.8001	< 2.2e-16
log(rate)_alpha2	-0.022152	0.00166473	-13.3068	< 2.2e-16
log(rate)_phi1	1.642356	0.04749416	34.5802	< 2.2e-16
log(rate)_phi2	-0.646929	0.04710167	-13.7347	< 2.2e-16
shape	9.115614	0.20496534	44.4739	< 2.2e-16
Radice AR 1	1.013457	-	-	-
Radice AR 2	1.525238	-	-	-

Data la natura moltiplicativa che caratterizza le distribuzioni definite “duration distributions”, la verifica della corretta specifica è stata condotta attraverso l'analisi diagnostica dei residui moltiplicativi stimati. Di seguito sono presentate le relative ACF:

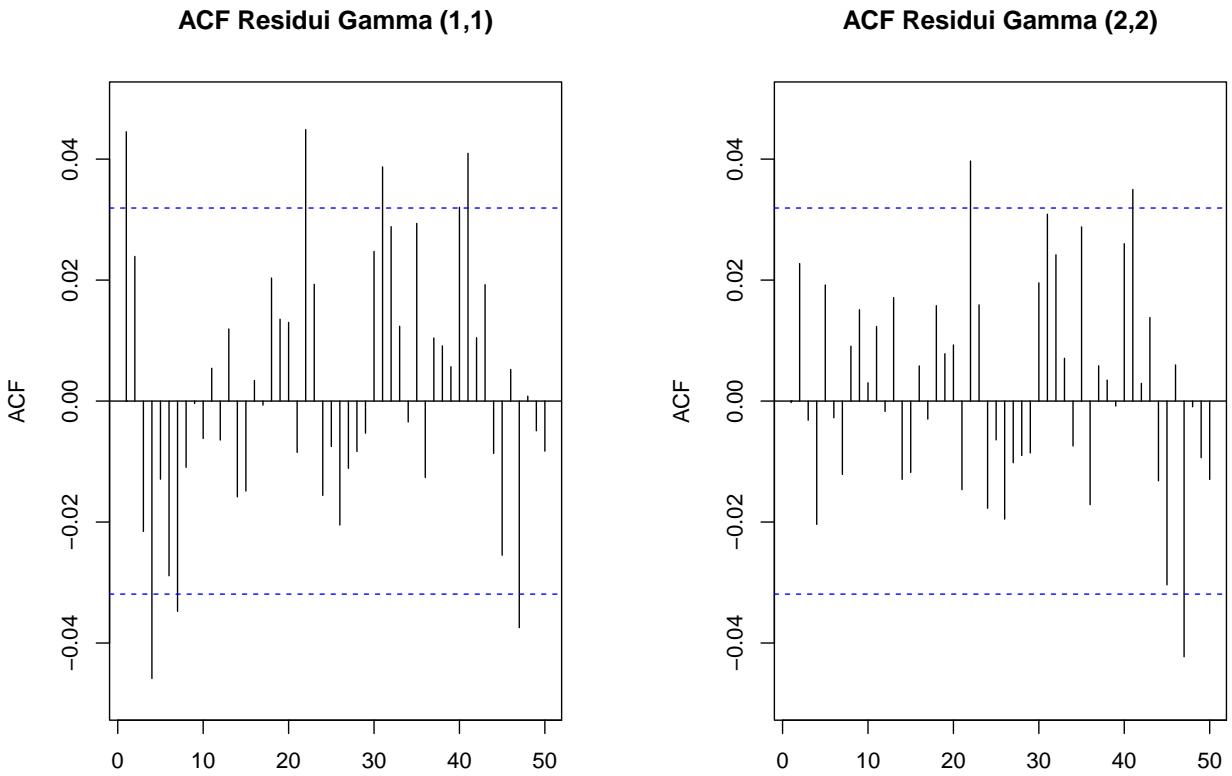


Figure 2: ACF Residui Modelli Gamma (1,1) e Gamma (2,2)

La specifica (2,2) presenta correlazioni dei residui marginalmente più basse rispetto alla parametrizzazione (1,1). In particolare, si osserva la completa attenuazione dell'autocorrelazione al lag 1. Inoltre, il correlogramma rileva la presenza di stagionalità ogni 22 lag. Tale fenomeno è verosimilmente riconducibile alla periodicità mensile del rollover dei contratti futures, che avviene solitamente ogni 22 giorni lavorativi. Nonostante questa componente stagionale residua, il valore trascurabile dei coefficienti di autocorrelazione (circa 0.04) suggerisce che il modello abbia filtrato adeguatamente la struttura di dipendenza dei dati.

Al fine di migliorare ulteriormente la bontà di adattamento, sono state testate altre distribuzioni condizionate coerenti alla tipologia dei dati: Weibull, LogNormale, Burr, Fisk. Per effettuare il confronto, come specifica di riferimento si è utilizzato ARMA(2,2). Di seguito, sono presentate le misure di adattamento:

- Gamma (2,2) -> Log-Likelihood: -13792.27, AIC: 27596.55, BIC: 27633.96;
- Weibull (2,2) -> Log-Likelihood: -14323.33, AIC: 28658.67, BIC: 28696.08;
- LogNormale (2,2) -> Log-Likelihood: -13698.89, AIC: 27409.78, BIC: 27447.2;
- Burr (2,2) -> Log-Likelihood: -13747.91, AIC: 27509.83, BIC: 27553.48;
- Fisk (2,2) -> Log-Likelihood: -13748.47, AIC: 27508.94, BIC: 27546.35.

Dal confronto tra le diverse specifiche, emerge che la distribuzione condizionata che si adatta meglio ai dati è la LogNormale.

Table 2 riporta la stima, lo standard error, la statistica test, il p-value e le radici AR del modello GAS(2,2) con distribuzione condizionata LogNormale.

Table 2: : Stima del Modello (2,2) con distribuzione condizionata LogNormale, regress = “joint” e scaling = “unit”

Parametro	Stima	Std. Error	Statistica Test	p-value
logmean_omega	0.013318	0.0010233	13.015	<2.2e-16
logmean_alpha1	0.029102	0.0017023	17.096	<2.2e-16
logmean_alpha2	-0.022600	0.0018277	-12.366	<2.2e-16
logmean_phi1	1.646722	0.0534096	30.832	<2.2e-16
logmean_phi2	-0.650783	0.0533017	-12.209	<2.2e-16
logvar	0.108287	0.0024819	43.632	<2.2e-16

Parametro	Stima	Std. Error	Statistica Test	p-value
Radice AR 1	1.012041	-	-	-
Radice AR 2	1.518326	-	-	-

Infine, è stata condotta un'analisi di sensitività sulle specifiche tecniche dei modelli Gas. In particolare:

- è stata testata l'opzione regress="sep", in alternativa alla configurazione "joint";
- sono stati considerati approcci con un diverso fattore di scaling rispetto all'iniziale "unit", ovvero l'inversa della matrice d'informazione di Fisher("fisher_inv") e la sua radice quadrata ("fisher_inv_sqrt").

Tuttavia, l'analisi ha dimostrato che la scelta di tali elementi non influisce sulle performance del modello. Pertanto, sono state mantenute le impostazioni di partenza: regress="joint" e scale="unit".

5 Diagnostica

Considerando che le distribuzioni Gamma e LogNormale rappresentano le configurazioni più promettenti, e data la lieve divergenza riscontrata nella capacità di adattamento tra le specifiche (1,1) e (2,2), appare opportuno condurre una diagnostica comparativa dei 4 modelli candidati: Gamma(1,1), LogNormale(1,1), Gamma(2,2) e LogNormale(2,2).

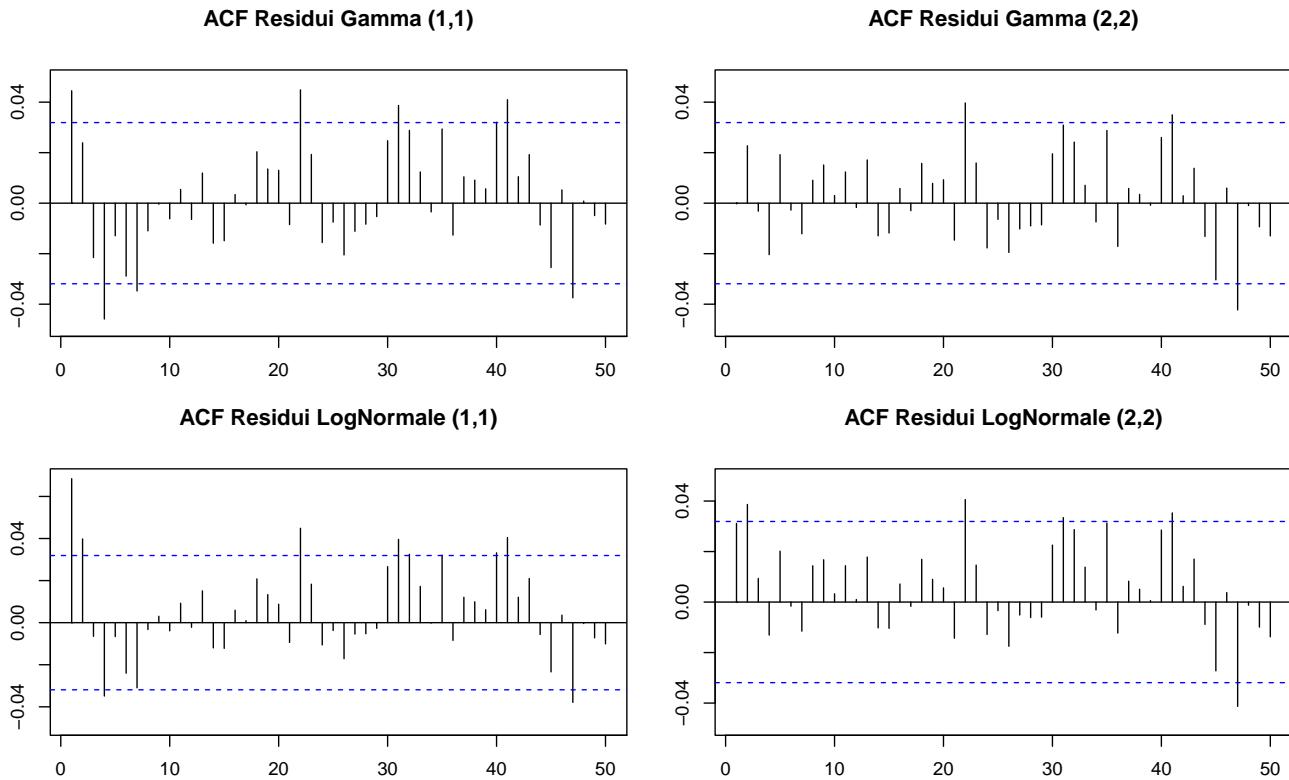


Figure 3: ACF Residui dei modelli considerati

Le funzioni di autocorrelazione mostrano che le parametrizzazioni Gamma hanno una maggiore efficacia nel mitigare l'autocorrelazione presente al lag 1, mentre le specifiche LogNormali sembrano gestire leggermente meglio la persistenza ciclica riscontrata ogni 22 lag.

Si procede coi QQ-Plot, volti a verificare il grado di aderenza dei residui moltiplicativi empirici rispetto alle distribuzioni teoriche di riferimento.

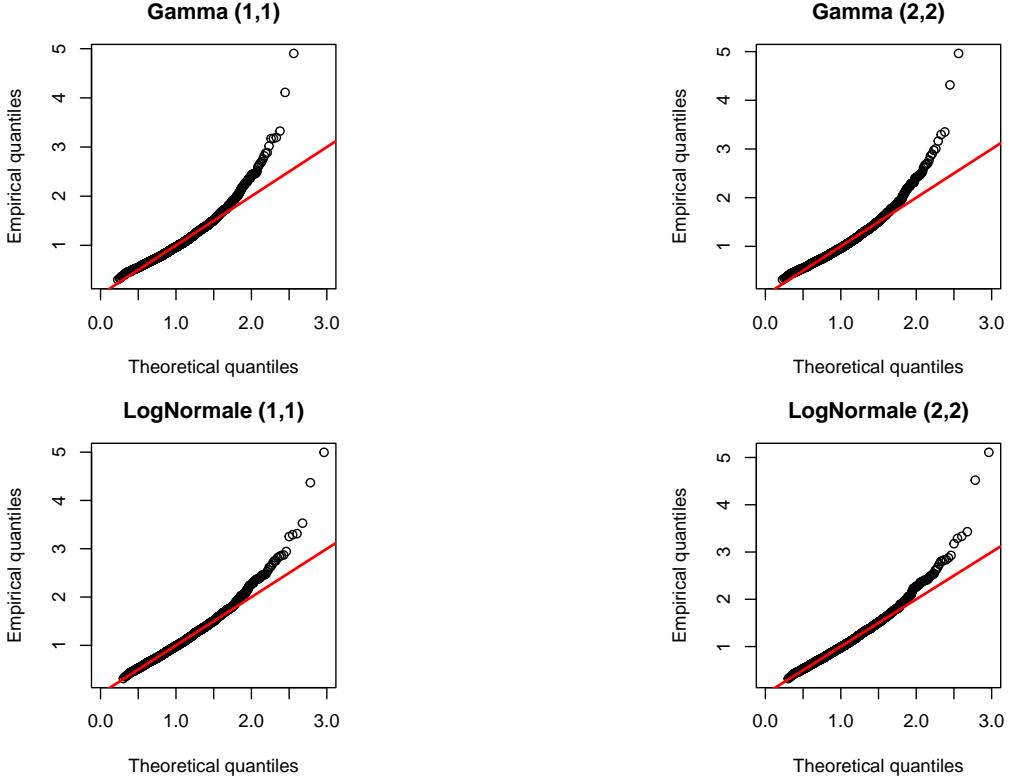


Figure 4: QQ-Plot dei modelli considerati

La Figure 4 evidenzia come entrambe le distribuzioni condizionate incontrino difficoltà nel modellare accuratamente la coda destra della distribuzione empirica. Tuttavia, il modello LogNormale risulta preferibile poiché la divergenza tra quantili teorici ed empirici si manifesta più tardi rispetto alla specifica Gamma. Questa maggiore capacità di seguire la dinamica dei valori estremi giustifica la maggiore bontà di adattamento osservata nel modello con distribuzione LogNormale.

6 Previsioni

6.1 Analisi ex-post

Sebbene la diagnostica condotta in precedenza evidenzi una superiorità statistica delle specifiche (2,2), nel contesto della previsione risulta interessante includere anche le parametrizzazioni (1,1), al fine di verificare se il vantaggio statistico riscontrato sia utile anche in termini previsivi.

Per valutare la capacità predittiva di questi modelli vengono calcolate le previsioni ex-post relative al periodo dal “02-01-2025” al “28-01-2026”.

Table 3: Misure di errore di previsioni per i modelli considerati ($\max(h) = 5$)

Distribuzione condizionata	Orizzonte (h)	MAE	RMSE	MAPE	RMSPE	LLE
Gamma	1	9.0505	14.3816	0.3163	0.4145	0.0725
Gamma	2	9.4960	15.5481	0.3261	0.4353	0.0832
Gamma	3	9.7529	16.1184	0.3371	0.4584	0.0930
Gamma	4	10.0680	16.6257	0.3504	0.4804	0.1031
Gamma	5	10.3735	17.0574	0.3596	0.4874	0.1127
LogNormale	1	8.9449	14.5365	0.3073	0.3974	0.0734
LogNormale	2	9.1707	15.3995	0.3116	0.4096	0.0825
LogNormale	3	9.5312	16.0607	0.3257	0.4346	0.0933
LogNormale	4	9.8735	16.5409	0.3387	0.4537	0.1033

Distribuzione condizionata	Orizzonte (h)	MAE	RMSE	MAPE	RMSPE	LLE
LogNormale	5	10.1776	16.9951	0.3480	0.4631	0.1125
Gamma	1	9.3617	14.7185	0.3262	0.4330	0.0705
Gamma	2	9.8528	15.8588	0.3391	0.4595	0.0809
Gamma	3	10.2022	16.5382	0.3534	0.4889	0.0899
Gamma	4	10.5785	17.1644	0.3691	0.5161	0.0988
Gamma	5	10.9620	17.7461	0.3811	0.5258	0.1067
LogNormale	1	9.0975	14.7273	0.3125	0.4068	0.0718
LogNormale	2	9.4421	15.5824	0.3213	0.4245	0.0807
LogNormale	3	9.8559	16.3101	0.3377	0.4546	0.0909
LogNormale	4	10.2855	16.8771	0.3541	0.4772	0.0997
LogNormale	5	10.6309	17.4272	0.3649	0.4887	0.1077

Le misure sintetizzate in Table 3 confermano la superiorità dei modelli Log-normali rispetto alle specifiche Gamma anche in sede previsiva. Tale dominanza si manifesta, in generale, per ogni misura d'errore e indipendentemente dall'orizzonte temporale. Tuttavia, è opportuno sottolineare che i margini di miglioramento, seppur sistematici, sono piuttosto lievi.

Dal test di Diebold-Mariano emerge come la lieve superiorità previsiva osservata nei modelli LogNormali non presenti rilevanza statistica. In altre parole, le abilità predittive dei modelli Gamma e Lognormale con stessa specificazione non sono statisticamente diverse, con eccezioni limitate a orizzonti temporali brevi e alla metrica dell'Errore Assoluto (AE).

Table 4: Risultati del test di Diebold-Mariano: Gamma(2,2) vs LogNormale (2,2)

Confronto	Misura	Orizzonte (h)	Statistica DM
Gamma vs LogNormale	SE	1	-0.4932
Gamma vs LogNormale	AE	1	0.7494
Gamma vs LogNormale	LLE	1	-0.7083
Gamma vs LogNormale	SE	2	0.5230
Gamma vs LogNormale	AE	2	2.0249
Gamma vs LogNormale	LLE	2	0.1181
Gamma vs LogNormale	SE	3	0.2124
Gamma vs LogNormale	AE	3	1.4450
Gamma vs LogNormale	LLE	3	-0.3391
Gamma vs LogNormale	SE	4	0.3428
Gamma vs LogNormale	AE	4	1.2493
Gamma vs LogNormale	LLE	4	-0.3445
Gamma vs LogNormale	SE	5	0.2583
Gamma vs LogNormale	AE	5	1.2047
Gamma vs LogNormale	LLE	5	-0.3826

Inoltre, i risultati del test presentati in Table 5 confermano che i modelli più complessi hanno abilità predittive statisticamente migliori rispetto a quelli più parsimoniosi.

Table 5: Risultati del test di Diebold-Mariano: Lognormale (1,1) vs LogNormale (2,2)

Confronto	Misura	Orizzonte (h)	Statistica DM
LogNormale vs LogNormale	SE	1	1.5642
LogNormale vs LogNormale	AE	1	2.2158
LogNormale vs LogNormale	LLE	1	1.6915
LogNormale vs LogNormale	SE	2	1.0344
LogNormale vs LogNormale	AE	2	2.4998
LogNormale vs LogNormale	LLE	2	1.4514
LogNormale vs LogNormale	SE	3	1.1760

Confronto	Misura	Orizzonte (h)	Statistica DM
LogNormale vs LogNormale	AE	3	2.1633
LogNormale vs LogNormale	LLE	3	1.5232
LogNormale vs LogNormale	SE	4	1.5210
LogNormale vs LogNormale	AE	4	2.3219
LogNormale vs LogNormale	LLE	4	2.1492
LogNormale vs LogNormale	SE	5	1.9369
LogNormale vs LogNormale	AE	5	2.4845
LogNormale vs LogNormale	LLE	5	3.0295

Sebbene gli ultimi risultati suggeriscano un'equivalente potere predittivo tra Gamma e LogNormale, alla luce della superiorità statistica evidenziata dal BIC e della migliore aderenza alla coda destra della distribuzione empirica emersa dai QQ-plot, si è scelto il modello LogNormale (2,2) come specifica ottimale per la generazione delle previsioni ex-ante.

6.2 Previsioni ex-ante

L'obiettivo è cercare di prevedere quale possa essere l'andamento della volatilità dei prezzi del petrolio greggio negli Stati Uniti.

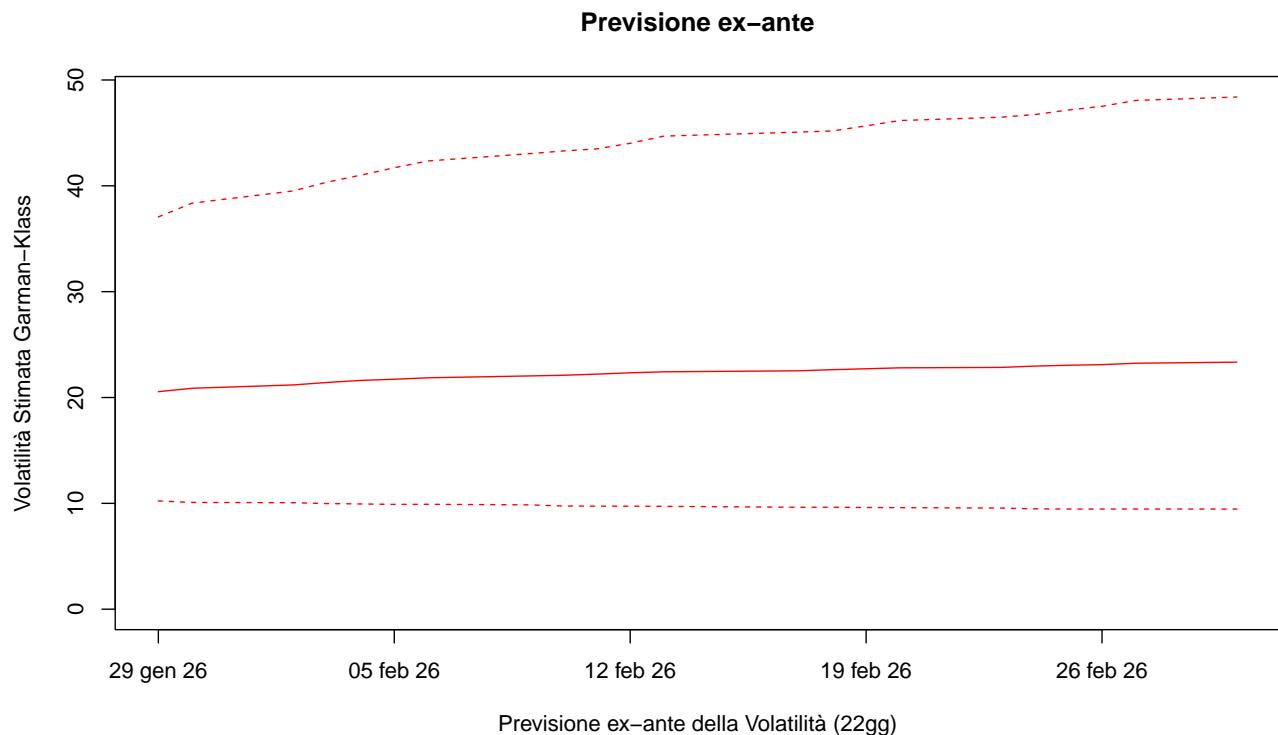


Figure 5: Previsione ex-ante

La Figura 5 mostra le previsioni per il mese finanziario successivo, nello specifico dal “29-01-2026” al “02-03-2026”. Il metodo applicato per calcolare le previsioni (“simulated_paths”) non è analitico, per questo il grafico prodotto mostra fluttuazioni prive di significato economico, dettate solo dal “rumore” statistico delle simulazioni. Per mitigare tale artefatto, è stato elevato il numero di iterazioni, garantendo comunque l’efficienza computazionale. Poiché l’ultimo valore osservato (24.915) risulta inferiore al valore atteso incondizionato della volatilità (pari a 31.936), il modello proietta un progressivo riallineamento della serie verso il suo equilibrio teorico. In altre parole, questa situazione determina il trend moderatamente crescente della stima puntuale. Per quanto riguarda l’intervallo di confidenza, mentre la banda inferiore rimane piatta e stabile a valore 10, la banda superiore, al crescere dell’orizzonte temporale, si allontana sempre di più dalla stima puntuale. Dunque, il modello segnala che

la volatilità del petrolio potrà essere soggetta a spike improvvisi e relativamente violenti verso l'alto durante il mese prossimo, confermando la natura rischiosa dell'asset finanziario.

7 Conclusioni

L'analisi ha esaminato la volatilità del prezzo dei contratti futures del petrolio greggio negli Stati Uniti, considerando le osservazioni da “04-01-2010” al “28-01-2026”, con l’obiettivo di costruire un modello in grado di fornire previsioni accurate per l’intero mese successivo. Per questo sono stati testati diversi modelli GAS con distribuzioni condizionate differenti, confrontandone bontà di adattamento e accuratezza previsionale.

La specifica che fornisce il miglior compromesso tra bontà di adattamento, complessità del modello e controllo dei residui è il modello GAS (2,2) con distribuzione condizionata LogNormale, senza l’utilizzo di regressori esterni. Per questo motivo, tale parametrizzazione è stata utilizzata per la previsione ex-ante.

Appendice

Table 6: Stima del Modello (1,1) con distribuzione condizionata Gamma, regress = “joint” e scaling = “unit”

Parametro	Stima	Std. Error	Statistica Test	p-value
log(rate)_omega	-0.026532	0.0047332	-5.6056	2.075e-08
log(rate)_alpha1	0.023771	0.0013943	17.0495	<2.2e-16
log(rate)_phi1	0.977055	0.0038125	256.2788	<2.2e-16
shape	9.038364	0.2042912	44.2426	<2.2e-16

Table 7: Stima del Modello (1,1) con distribuzione condizionata Lognormale, regress = “joint” e scaling = “unit”

Parametro	Stima	Std. Error	Statistica Test	p-value
logmean_omega	0.066015	0.0122725	5.3791	2.075e-08
logmean_alpha1	0.025179	0.0014973	16.8171	<2.2e-16
logmean_phi1	0.979943	0.0036507	268.4290	<2.2e-16
logvar	0.108979	0.0025075	43.4612	<2.2e-16

Table 8: Risultati del test di Diebold-Mariano: Gamma (1,1) vs LogNormale (1,1)

Confronto	Misura	Orizzonte (h)	Statistica DM
Gamma vs Lognormale	SE	1	-0.025759
Gamma vs Lognormale	AE	1	1.722874
Gamma vs Lognormale	LLE	1	-0.400673
Gamma vs Lognormale	SE	2	0.674016
Gamma vs Lognormale	AE	2	1.938870
Gamma vs Lognormale	LLE	2	0.260462
Gamma vs Lognormale	SE	3	0.570775
Gamma vs Lognormale	AE	3	1.607752
Gamma vs Lognormale	LLE	3	-0.078715
Gamma vs Lognormale	SE	4	0.738803
Gamma vs Lognormale	AE	4	1.298270
Gamma vs Lognormale	LLE	4	-0.039420
Gamma vs Lognormale	SE	5	0.855378
Gamma vs Lognormale	AE	5	1.380085
Gamma vs Lognormale	LLE	5	0.086751

Table 9: Risultati del test di Diebold-Mariano: Gamma (1,1) vs Gamma (2,2)

Confronto	Misura	Orizzonte (h)	Statistica DM
Gamma vs Gamma	SE	1	1.564291
Gamma vs Gamma	AE	1	2.215865
Gamma vs Gamma	LLE	1	1.691564
Gamma vs Gamma	SE	2	1.034429
Gamma vs Gamma	AE	2	2.499834

Confronto	Misura	Orizzonte (h)	Statistica DM
Gamma vs Gamma	LLE	2	1.451492
Gamma vs Gamma	SE	3	1.176084
Gamma vs Gamma	AE	3	2.163350
Gamma vs Gamma	LLE	3	1.523274
Gamma vs Gamma	SE	4	1.521063
Gamma vs Gamma	AE	4	2.321972
Gamma vs Gamma	LLE	4	2.149218
Gamma vs Gamma	SE	5	1.936970
Gamma vs Gamma	AE	5	2.484506
Gamma vs Gamma	LLE	5	3.029538

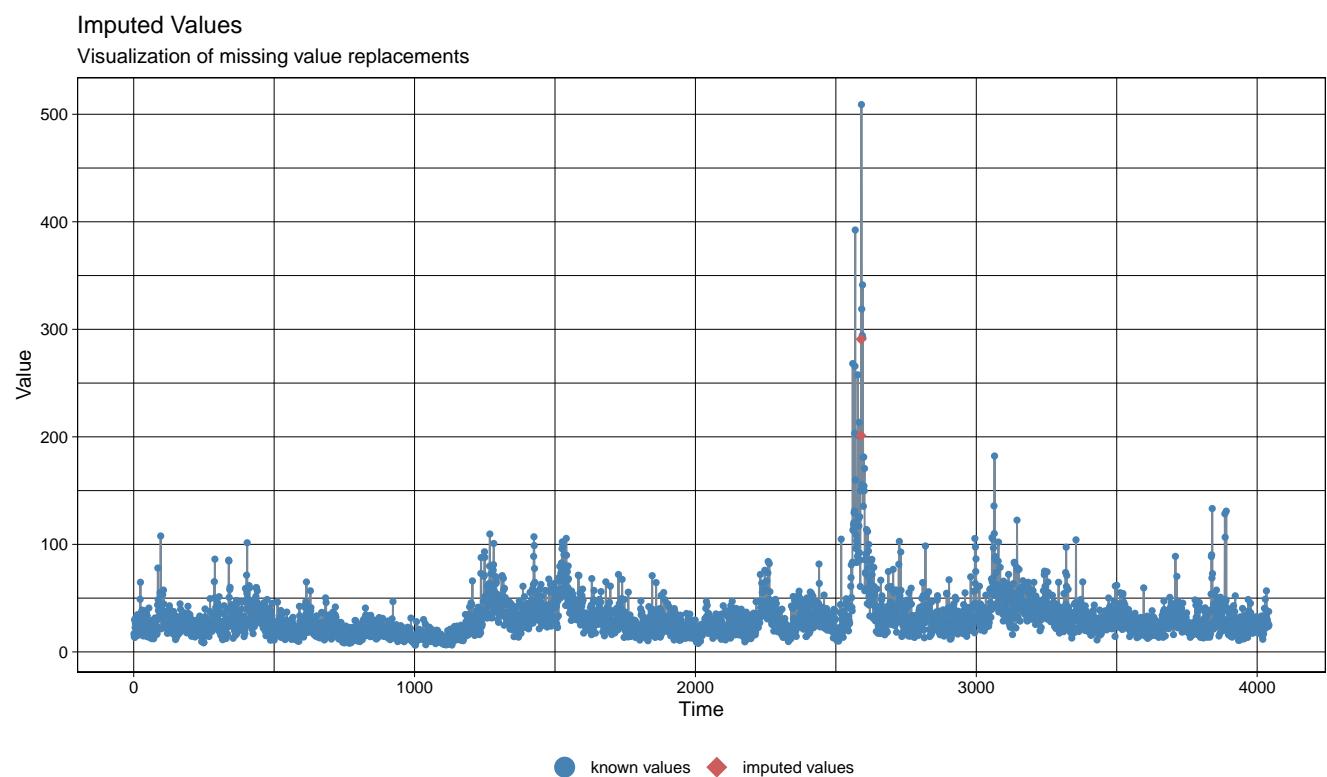


Figure 6: Grafico Filtro di Kalman