Análise Numérica

Série de Exercícios sobre o Capítulo 1

Erros

1. Apresente uma definição de **erro de arredondamento** e mostre que a representação numérica em computadores está sujeita a este tipo de erros.

2. Converta para a base binária os seguintes números na base decimal:
   a) $(100)_{10}$
   b) $(29.25)_{10}$
   c) $(42.77)_{10}$
   d) $(3.75)_{10}$

3. Converta para a base decimal os seguintes números na base binária:
   a) $(11100.1)_2$
   b) $(0.00101)_2$
   c) $(1.10111)_2$,
   d) $(0.1111111\ldots)_2$
   e) $(-11.01101)_2$

4. A série harmónica dada por $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ é um exemplo clássico de série divergente, ou seja, $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$. Esta série ao ser calculada num computador digital converge. Explique este facto.

5. Explique o que se entende por "**underflow**" e "**overflow**" num sistema de virgula flutuante.

6. Compare as diferentes técnicas de **arredondamento** (para cima, para baixo e simétrico) utilizadas na representação numérica em computadores.

7. O cálculo da solução da equação $ax^2 + bx + c = 0$ pela fórmula resolvente pode conduzir a erros numéricos significativos quando $|b| >> |a|$ e $|b| >> |c|$ devido ao problema da diferença de dois números muito próximos. Proponha uma formulação alternativa ao problema e aplique no cálculo das raízes de $x^2 - 5000000.0000002x + 1 = 0$.

8. O cálculo do valor de π foi um grande desafio para Arquimedes e outras figuras célebres da história que o sucederam. Nos nossos dias, com a ajuda dos computadores digitais, existem várias formas de o estimar. Uma destas alternativas pode ser desenvolvida a partir do resultado:

$$\frac{\pi}{6} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{e} \quad \arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt\,.$$

De facto, temos que $|t| < 1$, logo,

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i t^{2i}$$

(resultado da soma de uma progressão geométrica cujo o primeiro termo é 1 e a razão é $-t^2$). Substituindo e integrando obtemos:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{2i+1}$$

Decorre da proposição inicial que:

$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)3^i}$$

A $\sqrt{3}$ pode ser calculada a partir da sucessão:

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{3}{x_{n-1}}\right) \quad \text{com } x_0 = 1{,}7.$$

   a) Calcule o valor de $\sqrt{3}$ a partir da sucessão proposta.
   b) Calcule o valor de π a partir da série proposta e fazendo uso do resultado da alínea anterior.

9. A mais significativa obra de trigonometria da antiguidade foi a "Síntese Matemática", obra em treze livros escrita por Ptolomeu de Alexandria no século II, sendo mais tarde baptizada pelos Árabes de Almagest ("O Grande Compêndio"). Nesta obra o valor de π é aproximado por $(3{,}8\underline{30})_{60}$. Esta aproximação foi utilizada por Cristovão Colombo treze séculos mais tarde nos seus cálculos de navegação. Calcule o erro e o erro relativo que ele cometia nos seus cálculos, tomando como referência o valor de π do exercício anterior.

10. Dado $\tilde{x} = 2{,}5$ com um erro de $\Delta\tilde{x} = 0{,}01$ calcule o erro máximo e estime o valor de $f(\tilde{x})$ sabendo que $f(x) = x^3$.

11. Dado $\tilde{x} = 2$ com um erro de $\Delta\tilde{x} = 0{,}001$ calcule o erro máximo e estime o valor de $f(\tilde{x})$ sabendo que $f(x) = \sqrt{x}$.

12. Dado $\tilde{x} = \pi$ e $\tilde{y} = 2{,}5$ com erros respectivamente, $\Delta\tilde{x} = 0{,}001$ e $\Delta\tilde{y} = 0{,}1$ calcule o erro máximo e estime o valor de $f(\tilde{x}, \tilde{y})$, sabendo que $f(x, y) = \frac{\cos(x)}{y}$.

Algumas Respostas

1. -
2.
   a) $(1100100)_2$
   b) $(11101,01)_2$
   c) $(101010,110001010001111\ldots)_2$
   d) $(11,11)_2$
3.
   a) $(28,5)_{10}$
   b) $(0,15625)_{10}$
   c) $(1,71875)_{10}$
   d) $(0,99999\ldots)_{10}$
   e) $(-3.40625)_{10}$
4. -
5. -
6. -
7. A maior raiz em módulo calcula-se a partir da fórmula resolvente sendo que para a outra raiz emprega-se a fórmula alternativa $x_1 \times x_2 = c \div a$. $x_1 = 5000000$ e $x_2 = 0,0000002$.
8.
   a) 1.73205080756888
   b) 3.14159265358979
9. $7,40131\times10^{-5}$ e $2,35591\times10^{-5}$ respectivamente.
10. $15,6 \pm 0,2$
11. $1,4142 \pm 0,0004$
12. $0,40 \pm 0,02$

```
5 CLS:PRINT “Programa para Tracar Curvas”
6 INPUT “Introduza a funcao”; F$
10 CLS:INPUT “Xmin”; XI, ”Xmax”; XS
15 CLS:INPUT “Ymin”; YI, “Ymax”; YS
16 LOCATE 17,1:PRINT “Xi = “; XI;
17 LOCATE 17,2:PRINT “Xs = “; XS;
18 LOCATE 17,4:PRINT “Yi = “; YI;
19 LOCATE 17,5:PRINT “Ys = “; YS;
20 FOR I=0 TO 15
25 X=XI+I*(XS-XI)/15:Y=VALF(F$)
30 J=ROUND(6*(1-(Y-YI)/(YS-YI)),-1)
35 IF J<0 THEN 50
40 IF J>6 THEN 50
45 LOCATE I,J:PRINT “*”;
50 NEXT I
55 IF YS*YI>0 THEN 80
60 J=ROUND(6*(1+YI/(YS-YI)),-1)
65 FOR I=0 TO 15
70 LOCATE I,J:PRINT “-“;
75 NEXT I
80 IF XS*XI>0 THEN 105
85 I=ROUND(15*XI/(XI-XS),-1)
90 FOR J=0 TO 6
95 LOCATE I,J:PRINT “!”;
100 NEXT J
105 END
```

Análise Numérica

Série de Exercícios sobre o Capítulo 2

Raízes de Equações

1. Determine as raízes reais de:
   $$f(x) = -0.9x^2 + 1.70x + 2.5$$
   a) Graficamente.
   b) Pelo método das bissecções sucessivas determine a maior raiz, partindo do intervalo $[2.8, 3.0]$ com erro inferior a 5%.
   c) Repita a alínea b) aplicando o método da falsa posição.

2. Calcule a raiz da função:
   $$f(x) = e^{-x} - x^2$$
   a) Pelo método de Newton-Raphson (x_i = 1) com erro inferior a 0.1%.
   b) Pelo método da secante (x_i = 1 e x_{i+1} = 0.8) com erro inferior a 0.1%.
   c) Pelo método da iteração simples.

3. O método da iteração simples possui uma convergência lenta, contudo, esta pode ser acelerada se aplicarmos um processo desenvolvido por Aitken. De facto, para um passo de iteração k suficientemente grande, temos, graças ao teorema de Lagrange (Teorema do valor médio), que:
   $$s - x_{k+1} \cong g'(s)(s - x_k) \qquad \text{e}$$
   $$s - x_{k+2} \cong g'(s)(s - x_{k+1})$$

onde s é a solução procurada. Dividindo uma equação pela outra e isolando s, obtemos:
$$s \cong x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$$

A partir da fórmula podemos desenvolver um algoritmo alternativo, onde cada novo valor será obtido do precedente a partir da expressão:
$$x_{n+1} = x_n - \frac{(g(x_n) - x_n)^2}{g(g(x_n)) - 2g(x_n) + x_n}$$

Aplique este novo algoritmo no exercício anterior e verifique se a convergência é mais rápida. O algoritmo proposto é conhecido por método de Steffensen.

4. O cálculo de $\sqrt{q}$ frequentemente é implementado nos computadores/calculadoras pela sucessão:
   $$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{q}{x_{n-1}}\right) \quad \text{com} \quad x_0 = \frac{q}{2}$$
   a) Partindo do método de Newton, deduza a sucessão proposta.
   b) Calcule a $\sqrt{2}$ pela sucessão proposta.

5. Mostre que o Método da Secante pode ser obtido a partir do Método de Newton aproximando a derivada f'(x) por diferenças divididas de primeira ordem.

6. Compare os métodos estudados para a determinação de raízes de equações (método das bissecções sucessivas, da falsa posição, iterativo simples, de Newton-Raphson e da secante) em termos de robustez, velocidade de convergência e condições de aplicabilidade.

Algumas Respostas

1. Raiz do intervalo [2,8 , 3] é 2.860105
2. Raiz igual a -0.7034764
3. -
4. -
5. -
6. -

Análise Numérica

Série de Exercícios sobre o Capítulo 3

Sistemas de Equações

1. Considera o seguinte sistema de equações lineares algébricas:

$$\begin{cases} 4x+5y-6z=28 \\ 2x \quad -7z=29 \\ -5x-5y \quad =8 \end{cases}$$

   a) Resolva-o utilizando a **eliminação de Gauss** aplicando pivotagem parcial.
   b) Resolva-o pelo método de **Gauss-Jordan**.
   c) Determine a inversa da matriz dos coeficientes do sistema de equações.

2. Considera o seguinte sistema de equações lineares algébricas:

$$\begin{cases} x-2y+12z=-86 \\ x-6y+2z=-28 \\ 4x-2y-z=40 \end{cases}$$

   a) Verifique se o sistema obedece à condição suficiente de convergência do método de Gauss-Seidel . Justifique.
   b) Resolva-o pelo método de Gauss-Seidel com erro inferior a 5%.
   c) A partir de três iterações sucessivas do método de Gauss-Seidel ($\mathbf{x}^k$, $\mathbf{x}^{k+1}$ e $\mathbf{x}^{k+2}$) podemos aplicar a aceleração de Aitken dada pela fórmula

$$x_i^{k+3} = x_i^k - \frac{\left(x_i^{k+1} - x_i^k\right)^2}{x_i^{k+2} - 2x_i^{k+1} + x_i^k}$$

   para obter um resultado mais próximo da solução. Utilize a aceleração proposta no sistema do exercício.

3. Considere o seguinte sistema de equações lineares algébricas:

$$\begin{cases} 7x+2y-5z=-18 \\ x+5y-3z=-40 \\ 2x-\ y-9z=-26 \end{cases}$$

   a) Utilizando a **eliminação de Gauss**, decomponha a matriz dos coeficientes do sistema na forma **LU**. Multiplique as matrizes L e U para verificação do resultado.
   b) Partindo da decomposição obtida na alínea anterior (**Doolittle**) obtenha a decomposição de **Crout** e resolva o sistema tendo por base essa decomposição.

4. Considere o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\begin{cases} y=-x^2+x+0.5 \\ y+5xy=x^3 \end{cases}$$

   a) Determine a solução deste sistema pelo método de Newton-Raphson partindo dos valores iniciais x = y = 1.2.
   b) Determine a solução deste sistema pelo método da Iteração Simples partindo dos valores iniciais x = y = 1.2.

5. Indique qual o método mais adequado para encontrar a solução de um sistema de grandes dimensões (mais de 100 equações e incógnitas). Justifique.

6. Indique vantagens e desvantagens da eliminação de Gauss em relação ao método de Gauss-Jordan.

7. Explique por que razão os métodos de decomposição LU são os mais populares para resolver sistemas de equações lineares algébricas.

Algumas Respostas

1. a) $\begin{bmatrix} -5 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{19}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ \frac{161}{5} \\ \frac{101}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow & x = -\frac{78}{19} \\ \Rightarrow & y = \frac{238}{95} \\ \Rightarrow & z = -\frac{101}{19} \end{matrix}$ c) $\begin{bmatrix} -\frac{7}{19} & \frac{6}{19} & -\frac{7}{19} \\ \frac{7}{19} & -\frac{6}{19} & \frac{16}{95} \\ -\frac{2}{19} & -\frac{1}{19} & -\frac{2}{19} \end{bmatrix}$

2. a) A diagonal principal não é dominante, logo, não obedece a condição de suficiente do método de Gauss-Seidel. b) x = 10,11 , y = 3,898 , z = -7,359

3. a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & 1 & 0 \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 0 & \frac{33}{7} & -\frac{16}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{25}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 \\ -40 \\ -26 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 0 & \frac{33}{7} & -\frac{16}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{25}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 \\ -\frac{262}{7} \\ -\frac{100}{3} \end{bmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow & x = 2 \\ \Rightarrow & y = -6 \\ \Rightarrow & z = 4 \end{matrix}$

4. Solução exacta é x = 1,207106781 e y = 0,25

```
3    CLEAR:CLS:PRINT "Gauss com pivoteamento parcial";
5    INPUT "n (ordem do sistema) ";N
10   N=N-1:DIM A(N,N+1),X(N),S(N),O(N)
20   FOR I=0 TO N
25   FOR J=0 TO N+1
30   IF J<N+1 THEN PRINT "a(";I+1;",";J+1;") ="; ELSE PRINT "b(";I+1;") =";
35   INPUT A(I,J):NEXT J,I
40   FOR I=0 TO N
45   O(I)=I:S(I)=ABS(A(I,0))
50   FOR J=1 TO N
55   IF ABS(A(I,J))>S(I) THEN S(I)=ABS(A(I,J))
60   NEXT J,I
65   FOR K=0 TO N-1
70   PV=K:MA=ABS(A(O(K),K)/S(O(K)))
75   FOR II=K+1 TO N
80   VA=ABS(A(O(II),K)/S(O(II)))
85   IF VA>MA THEN MA=VA:PV=II
90   NEXT II
95   AX=O(PV):O(PV)=O(K):O(K)=AX
100  FOR I=K+1 TO N
105  A(O(I),K)=A(O(I),K)/A(O(K),K)
110  FOR J=K+1 TO N+1
115  A(O(I),J)=A(O(I),J)-A(O(I),K)*A(O(K),J)
120  NEXT J,I
122  NEXT K
125  X(N)=A(O(N),N+1)/A(O(N),N)
130  FOR I=N-1 TO 0 STEP -1
135  SO=0
140  FOR J=I+1 TO N
145  SO=SO+A(O(I),J)*X(J)
150  NEXT J
155  X(I)=(A(O(I),N+1)-SO)/A(O(I),I)
160  NEXT I
165  CLS:PR=1:DE=1
170  FOR I=0 TO N
175  PRINT "X(";I+1;") =";X(I):DE=A(O(I),I)*DE:PR=S(I)*PR
180  NEXT I
185  PRINT "Det. Em Mod.";ABS(DE)
190  PRINT "Det. Normalizado";ABS(DE/PR);
```

Análise Numérica

Série de Exercícios sobre o Capítulo 4

Ajuste de Curvas

1. Considera a seguinte tabela:

x	1	3	5	7	10	12
f(x)	4	2	6	5	8	7

Utilize a regressão dos mínimos quadrados para ajustar uma recta ao conjunto de pontos indicado. Calcule o coeficiente de correlação.

2. Considera a seguinte tabela:

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0
f(x)	1	2.119	2.910	3.945	5.720

   a) Encontre o polinómio de Newton de ordem 4 que interpola o conjunto de pontos apresentado .
   b) Resolva novamente a alínea a) mas aplicando a fórmula de Lagrange.
   c) Encontre as Splines cúbicas que interpolam os pontos apresentados.
   d) Estime o valor de f(1,6) utilizando os polinómios determinados nas alíneas a) e c).

3. Compare as três técnicas estudadas para interpolar um conjunto de pontos indicando vantagens e desvantagens de cada uma delas.

4. Em algumas situações práticas somos confrontados com a necessidade de ajustar um polinómio por determinados pontos (x_i, y_i) sujeito a uma inclinação imposta y'_i, caso em que se diz que a interpolação é de Hermite. O polinómio interpolador de Hermite pode ser obtido a partir da formulação de Newton. Para tal os pares ordenados (x_0, y_0), (x_1, y_1), … , (x_n, y_n) serão substituídos pelo conjunto (x_0, y_0), (x'_0, y_0), (x_1, y_1), (x'_1, y_1), … , (x_n, y_n) onde se faz tender x'_i para x_i, de tal modo que a primeira diferença dividida será obtida por:

$$Y[x_k, x_k] = \lim_{x'_k \to x_k} Y[x_k, x'_k]$$

$$= \lim_{x'_k \to x_k} \frac{Y[x'_k] - Y[x_k]}{x'_k - x_k} = y'_k$$

Aplique o que foi exposto com o objectivo de obter o polinómio de Newton para o seguinte conjunto de pontos.

x	0	1	2
f(x)	-4	-3	0
f’(x)	-	2	4

5. Fazendo uso de um polinómio do terceiro grau que interpola o seguinte conjunto de pares ordenados:

x	0	1	2	3
y	2	3	0	11

Calcule o valor que x assumirá quando y = 0,875.

Algumas Respostas

1. Sendo y = a +bx temos: a= 2,698, b = 0,416 e coeficiente de correlação = 0,805
2. a) $b_0 = 1$, $b_1 = 2,238$, $b_2 = -0,6559997$, $b_3 = 0,762666$, $b_4 = -5,066615\times10^{-2}$
   c) $f''_1 = -2,209713$, $f''_2 = 0,966855$, $f''_3 = 4,198286$
   d) por Newton temos 4,226266 e por Spline temos 4,24962
3. -
4. $y = x^2-4$
5. 1,5 e 2,276

Análise Numérica

Série de Exercícios sobre o Capítulo 5

Integração Numérica

1. Considera o seguinte integral definido:

$$\int_0^{\pi} (8 + 5\mathrm{sen}(x))dx$$

   a) Calcule o seu valor analiticamente.
   b) Calcule o seu valor pela **Regra do Ponto Médio** com (p=2 e p=4). Calcule o erro relativo percentual.
   c) Calcule o seu valor pela **Regra do Trapézio** com (p=2 e p=4). Calcule o erro relativo percentual.
   d) Calcule o seu valor pela **Regra de Simpson** com (p=2 e p=4). Calcule o erro relativo percentual.
   e) Sabendo que os resultados da aplicação da Regra do Trapézio são os apresentados na tabela ao lado, aplique a fórmula correctora de Romberg de forma a obter uma melhor aproximação para o valor do integral. Apresente também uma estimação para o erro.

Partes	Trapézio
2	32.98672
4	34.61334
8	35.0039
16	35.10059

2. Considera o seguinte integral definido:

$$\int_0^{2} xe^{2x}dx$$

   a) Calcule o seu valor analiticamente.
   b) Calcule o seu valor pela **Regra do Ponto Médio** com (p=2 e p=4). Calcule o erro relativo percentual.
   c) Calcule o seu valor pela **Regra do Trapézio** com (p=2 e p=4). Calcule o erro relativo percentual.
   d) Calcule o seu valor pela **Regra de Simpson** com (p=2 e p=4). Calcule o erro relativo percentual.
   e) Sabendo que os resultados da aplicação da regra do trapézio são os apresentados na tabela que se segue, aplique a fórmula correctora de Romberg de forma a obter uma melhor aproximação para o valor do integral. Apresente também uma estimação para o erro.

Partes	Trapézio
2	61.98721
4	46.73733
8	42.60706
16	41.55225

3. O comprimento L de uma curva dada por y = f(x) no intervalo [a, b] é calculada por:

$$\int_a^{b} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Calcule o comprimento da curva $y = e^x$ entre as abcissas x=0 e x=1 usando a regra de Simpson com 2 e 4 subintervalos.

Algumas Respostas

1. a) $8\pi + 10$
2. a) $(3e^4 + 1)/4$

Análise Numérica

Série de Exercícios sobre o Capítulo 6

Derivação Numérica

1. Considere a função:

$$f(x) = xe^x$$

   a) Calcule a sua derivada no ponto x=2 analiticamente.
   b) Considere o passo de derivação h=0.25 e calcule numericamente a derivada no ponto x=2. Utilize para tal as formulas descentradas à esquerda e à direita ($O(h^2)$) e a fórmula centrada ($O(h^4)$).
   c) Estime o valor da derivada no ponto x=2 à custa da fórmula centrada ($O(h^2)$) com passos de derivação h_1=0.5, h_2=0.25 e h_3=0.125 . Combine estes resultados à custa da fórmula correctora de Romberg.

2. Considere a função:

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0
f(x)	1	2.119	2.910	3.945	5.720

Considerando o passo de derivação h=0.5 calcule numericamente a derivada no ponto x=1. Utilize para tal as fórmulas descentradas à esquerda e à direita ($O(h^2)$) e a fórmula centrada ($O(h^4)$).

3. Considere a função:

$$f(x) = \ln(x)$$

   a) Calcule a sua derivada no ponto x=2 analiticamente.
   b) Considere o passo de derivação h=0.25 e calcula numericamente a derivada no ponto x=2. Utilize para tal as formulas descentradas à esquerda e à direita ($O(h^2)$) e a fórmula centrada ($O(h^4)$).
   c) Estime o valor da derivada no ponto x=2 à custa da fórmula centrada ($O(h^2)$) com passos de derivação h_1=0.5, h_2=0.25 e h_3=0.125 . Combina estes resultados à custa da fórmula correctora de Romberg.

Algumas Respostas

2. Descentrada a Direita 1,33; Descentrada a Esquerda 1,254; Centrada 1,648

Análise Numérica

Série de Exercícios sobre o Capítulo 7

Integração de Equações Diferenciais

1. Considere a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = yx^2 - y, \quad y(0) = 1$$

   a) Resolva-a analiticamente e faça um esboço da solução.
   b) Aplique o método de Euler com h=0.5 e h=0.25 no intervalo $[0,2]$.
   c) Aplique o método de Euler-modificado com h=0.5 e h=0.25 no intervalo $[0,2]$.
   d) Aplique o método de Runge-Kutta de 2ª Ordem com h=0.25.
   e) Aplique o método de Runge-Kutta de 4ª Ordem com h=0.25.
   f) Compare a precisão dos diferentes métodos fazendo um esboço conjunto com a solução analítica.

2. Considere a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = y\cos(t), \quad y(0) = 1$$

   a) Resolva-a analiticamente e faça um esboço da solução.
   b) Aplique o método de Euler com h=0.5 e h=0.25 no intervalo $[0,2]$.
   c) Aplique o método de Euler-modificado com h=0.5 e h=0.25 no intervalo $[0,2]$.
   d) Aplique o método de Runge-Kutta de 2ª Ordem com h=0.25.
   e) Aplique o método de Runge-Kutta de 4ª Ordem com h=0.25.
   f) Compare a precisão dos diferentes métodos fazendo um esboço conjunto com a solução analítica.

3. Considere a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2t - \frac{dy}{dt}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$$

   a) Resolva-a analiticamente e faça um esboço da solução.
   b) Aplique o método de Euler com h=0.5 e h=0.25 no intervalo $[0,2]$.
   c) Aplique o método de Euler-modificado com h=0.5 e h=0.25 no intervalo $[0,2]$.
   d) Aplique o método de Runge-Kutta de 2ª Ordem com h=0.25.
   e) Aplique o método de Runge-Kutta de 4ª Ordem com h=0.25.
   f) Compare a precisão dos diferentes métodos fazendo um esboço conjunto com a solução analítica.

Algumas Respostas

Integração de Equações Diferenciais

1. a) $y = e^{\left(\frac{x^3}{3} - x\right)}$
2. a) $y = e^{\mathrm{sen}(t)}$
3. a) $y = (t-1)^2$