

# Estrutura de Dados II

Prof. Me. Pietro M. de Oliveira

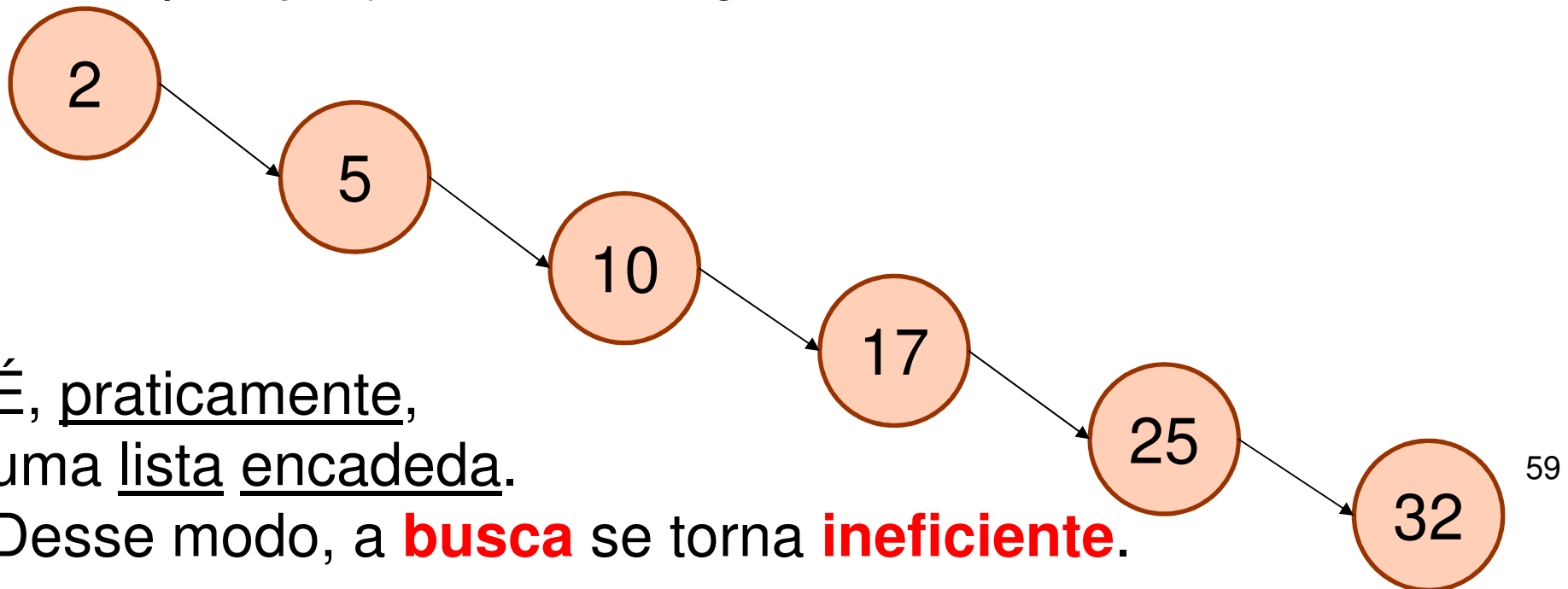
# Árvores AVL

Balanceamento de árvores  
binárias

Considere o seguinte **conjunto de dados**:

2	5	10	17	25	32
---	---	----	----	----	----

Inserindo os dados ordenadamente (da primeira até a última posição), temos a seguinte **Árvore Binária**:

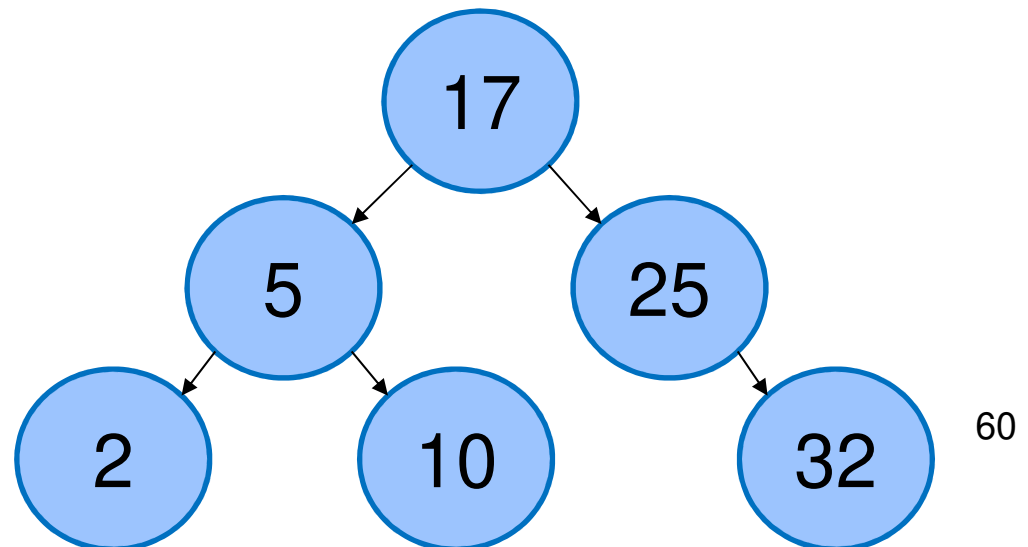


Como podemos resolver essa situação?

- Controlando a ordem na qual os elementos são inseridos?
- Modificando a regra para inserção de novos elementos?

Balanceando a árvore!!!

2	5	10	17	25	32
---	---	----	----	----	----



## Algoritmo de **Adelson-Velskii e Landis** (1962)

- Fator de balanceamento ( $F_b$ ) baseado na altura das subárvores do nó em questão:

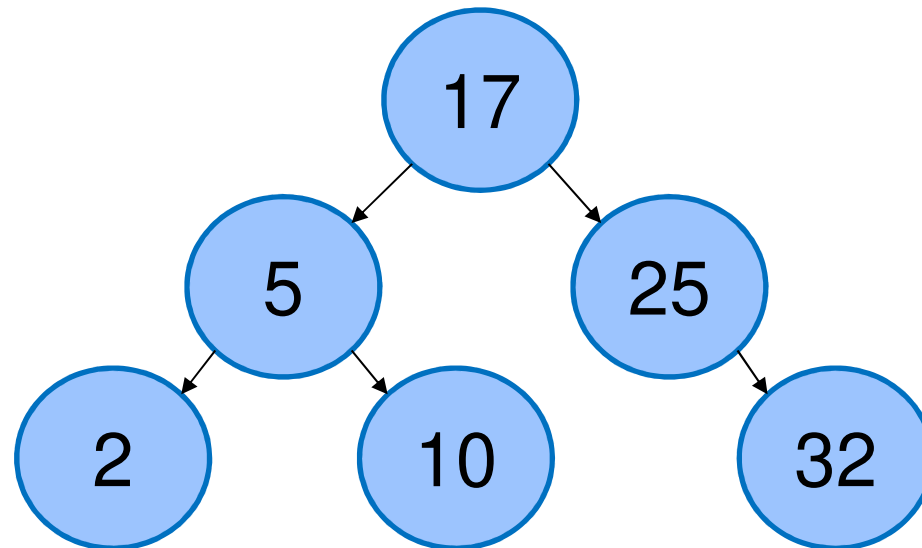
$$F_b = H_e - H_d$$

- **Importante:**

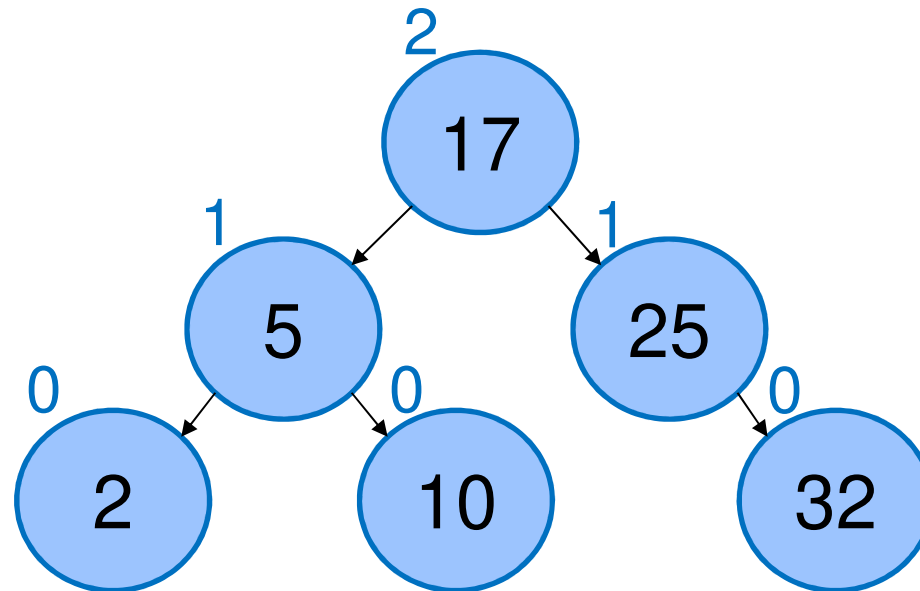
- **Altura ou profundidade**: números de nós visitados, partindo da raiz até o nó folha mais distante
- A altura de um nó folha é igual a 0 (zero)
- A altura de um nó inexistente é igual a -1 (menos hum)

## Regras de uma Árvore AVL

- Nenhuma subárvore deve ter fator de balanceamento maior ou igual a 2, em valor absoluto
- **Fb** da raiz **diferente** de -1, 0 ou 1: **balancear!**

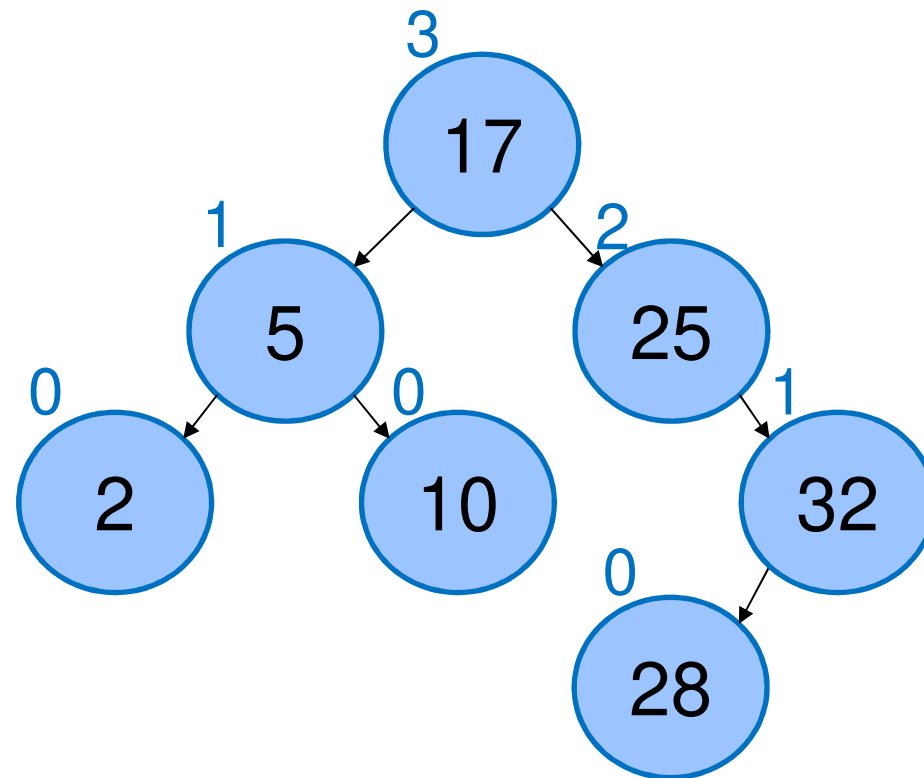


Esta árvore está desbalanceada?



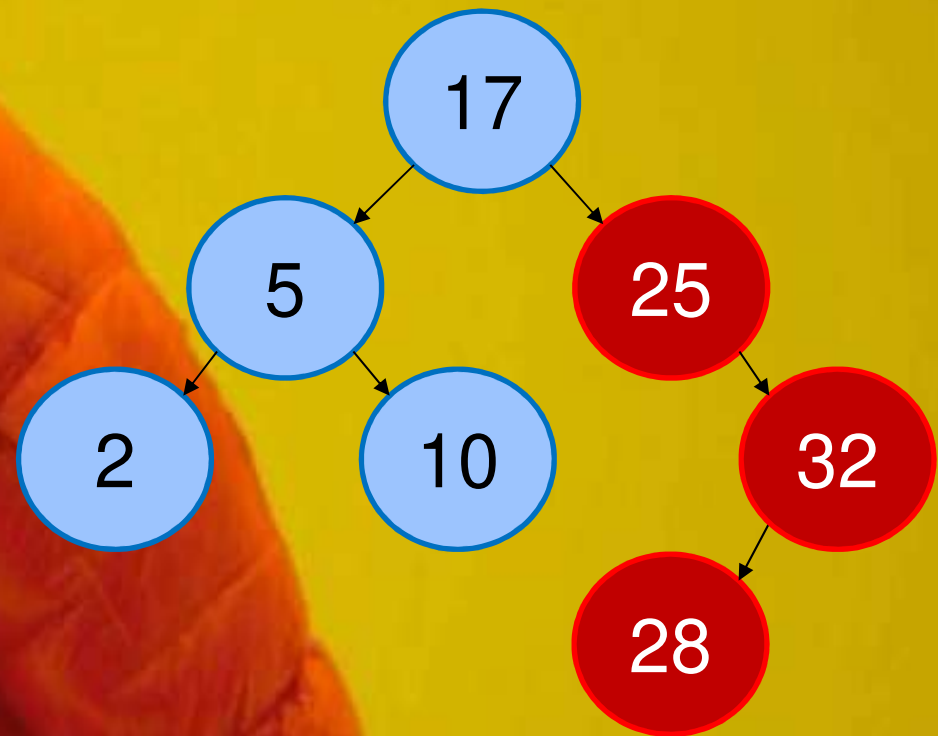
**CONVENÇÃO IMPORTANTE:** considerar que um “nó ausente” tem altura igual a -1

Agora considere a inserção do elemento **28** ...



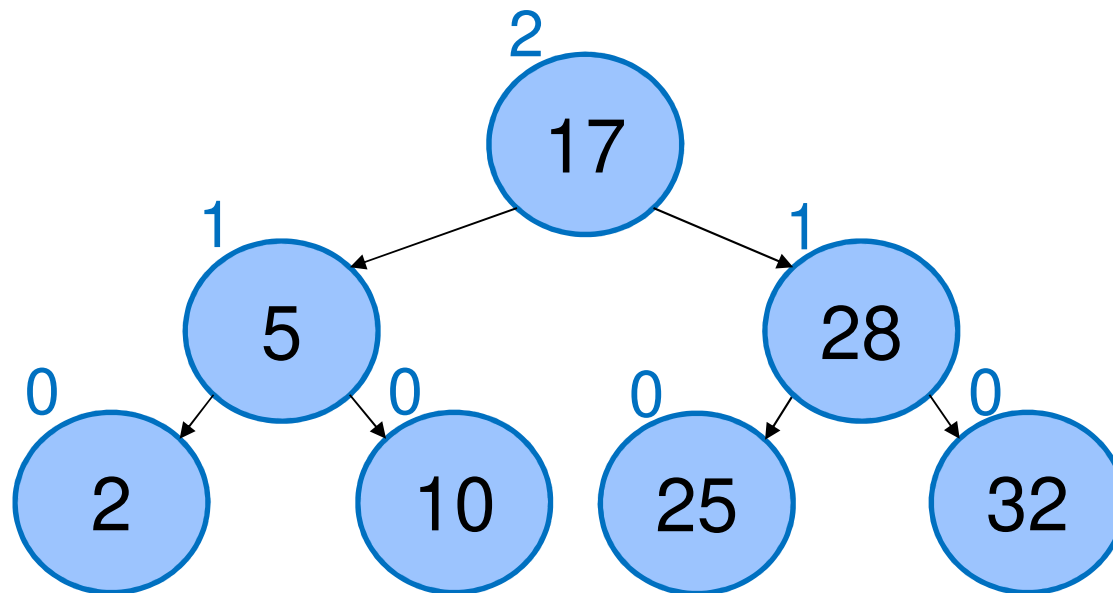


# Árvores AVL

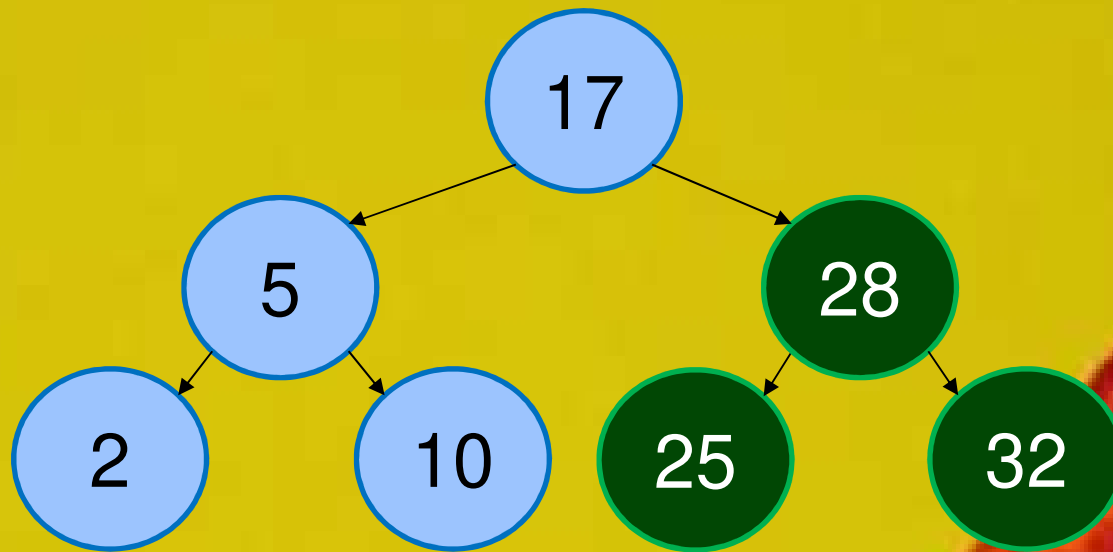


Fonte: revolt.tv (Drake Meme)

Balanceando...



# Árvores AVL



Fonte: telegraph.co.uk (Drake Meme)

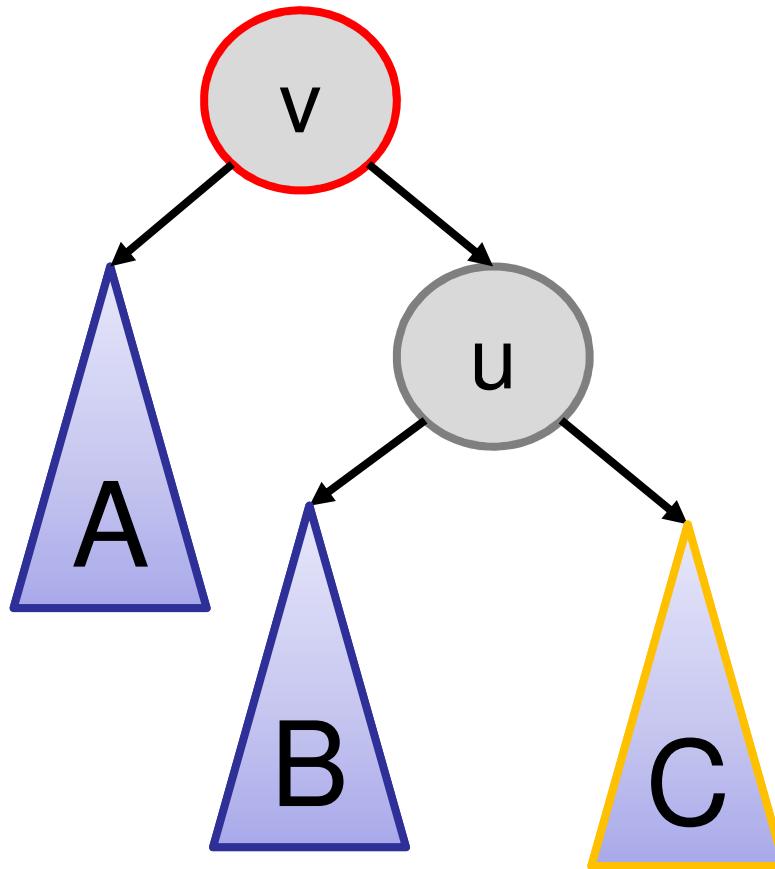
# Rotação Simples à Esquerda

Balanceamento quebrado por inserção à direita do filho direito

# Árvores AVL

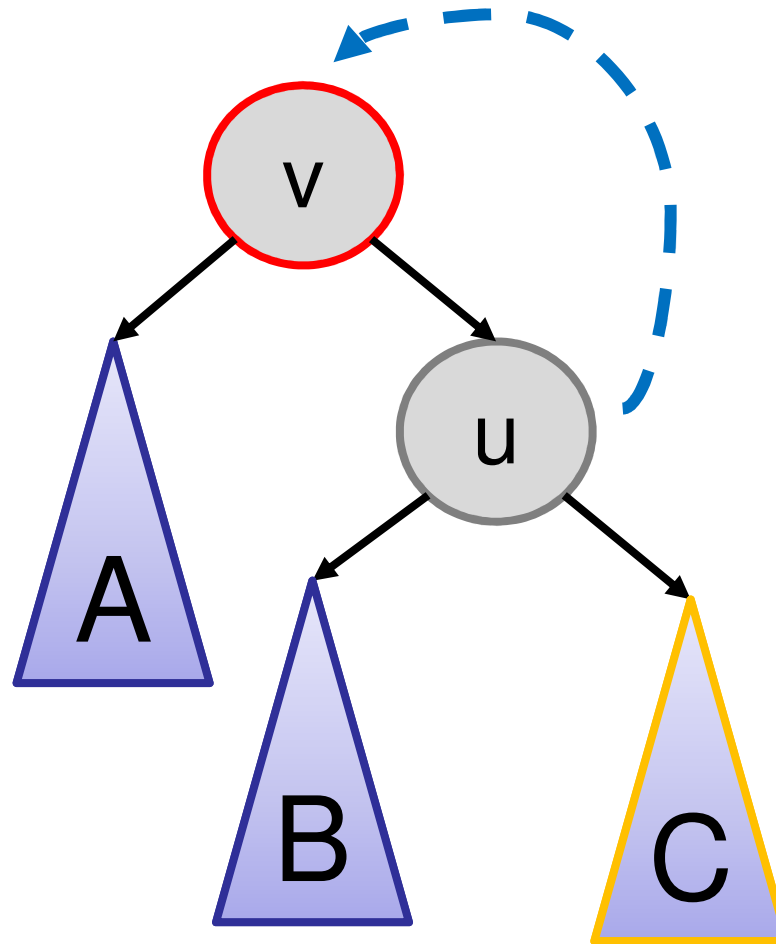
## Rotação Simples à Esquerda

- Inserção feita em **C**
- **C** é **subárvore direita** do filho direito (nó **u**) do nó **v**, **desbalanceado**



### Solução:

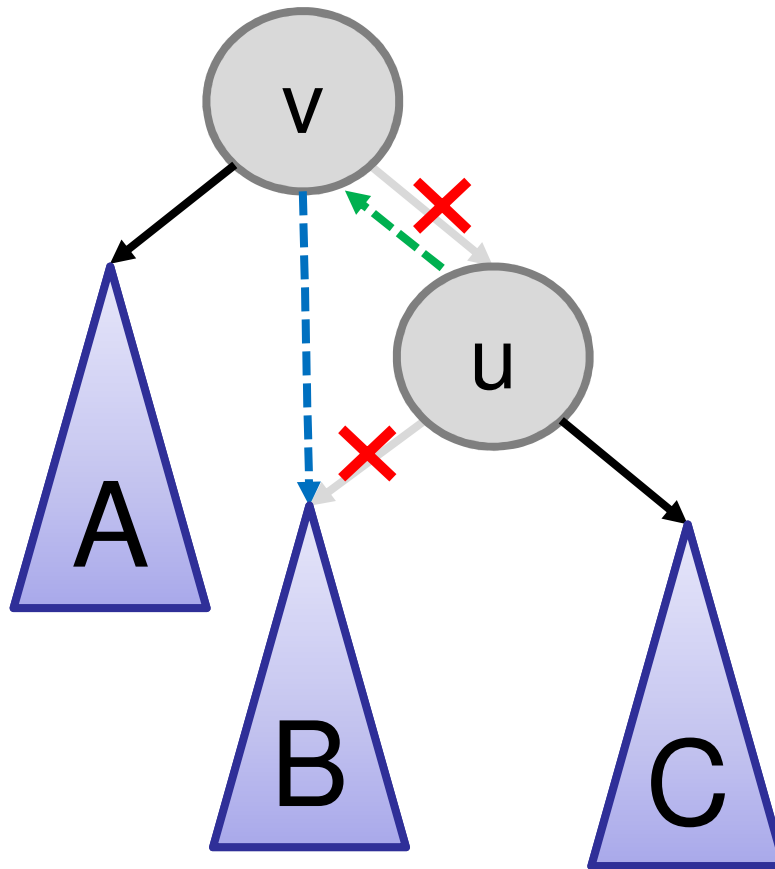
- Rotação de **u** à esquerda



# Árvores AVL

## Rotação Simples à Esquerda

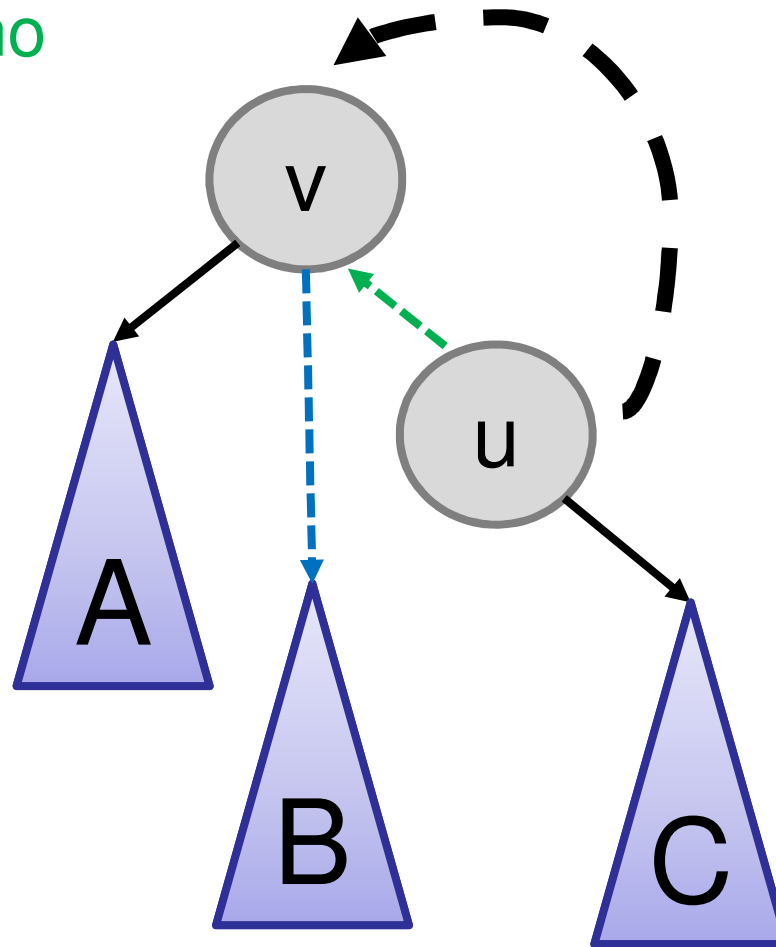
1. **v** passa a ser filho à esquerda de **u**
2. **B** passa a ser subárvore à direita de **v**



# Árvores AVL

## Rotação Simples à Esquerda

1. **v** passa a ser filho à esquerda de **u**
2. **B** passa a ser subárvore à direita de **v**

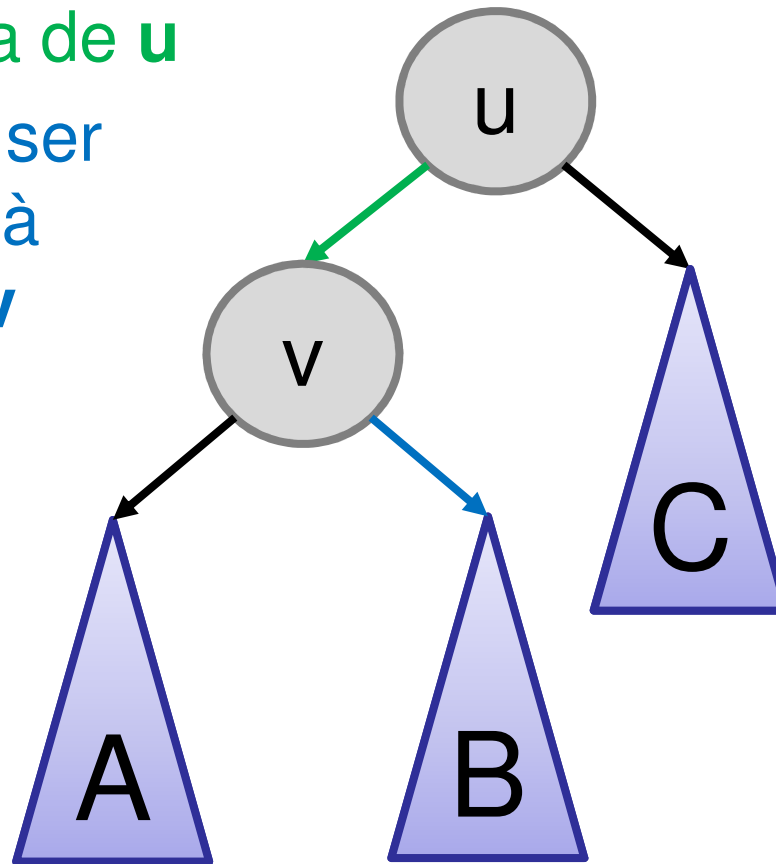




# Árvores AVL

## Rotação Simples à Esquerda

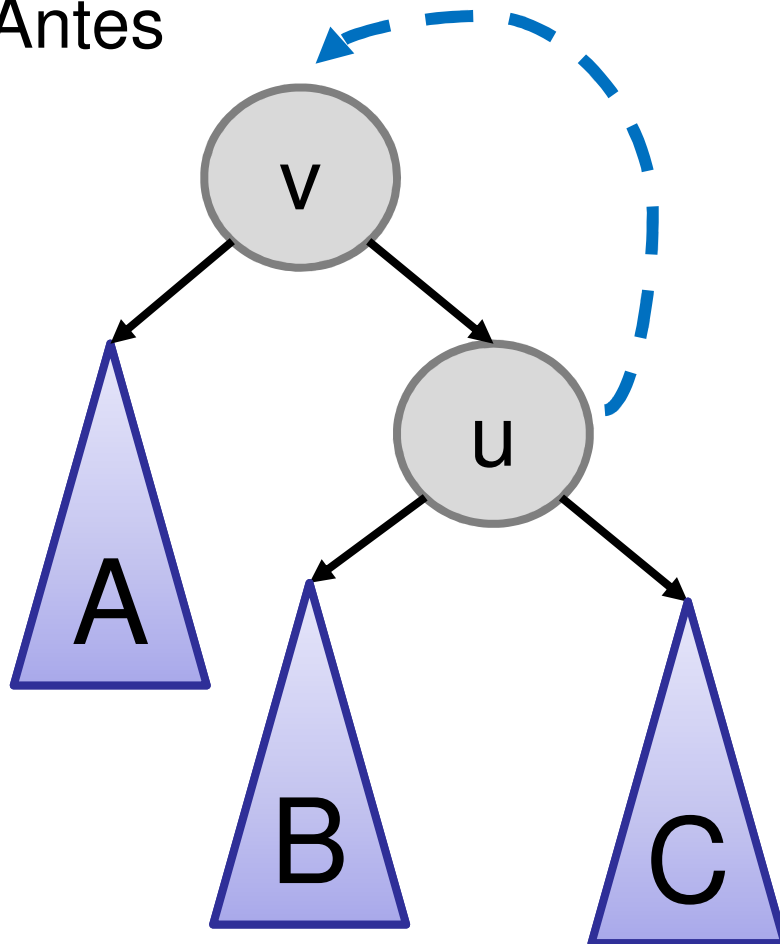
1. **v** passa a ser filho à esquerda de **u**
2. **B** passa a ser subárvore à direita de **v**



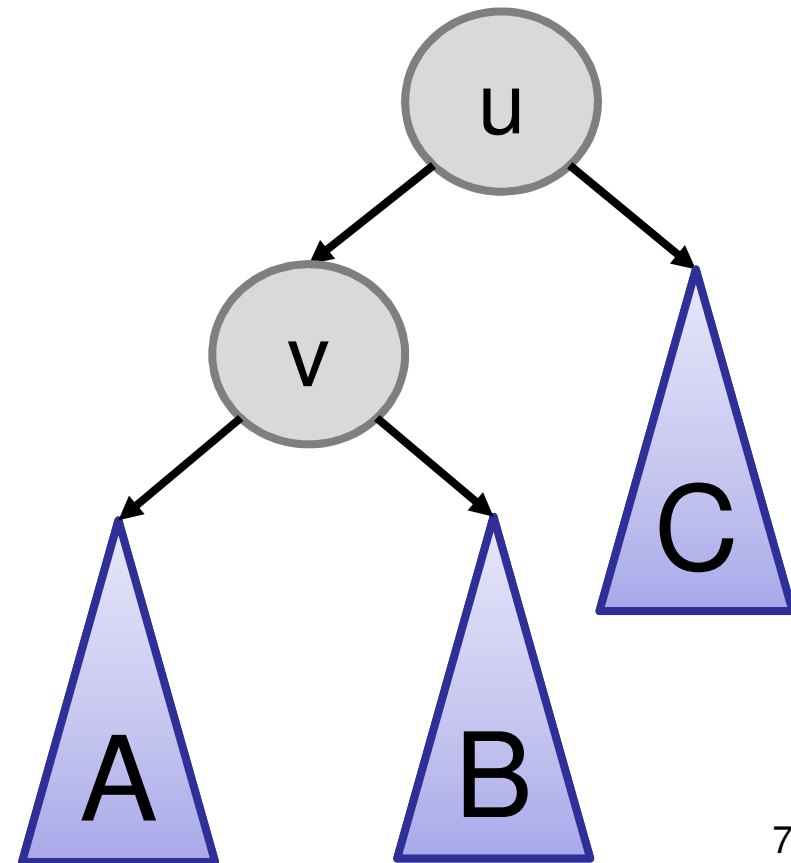
# Árvores AVL

## Rotação Simples à Esquerda

Antes



Depois



# Exemplo

Rotação simples à esquerda

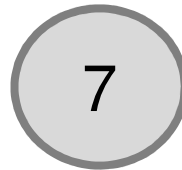
# Rotação Simples à Esquerda

## Exemplo

Montar a árvore para:

7	15	2	23	10	19
---	----	---	----	----	----

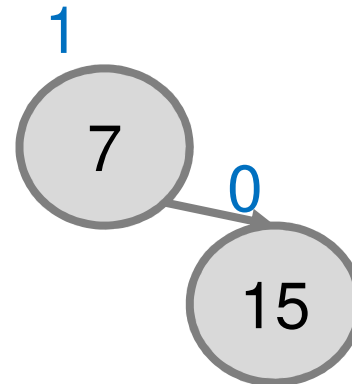
0



# Rotação Simples à Esquerda

## Exemplo

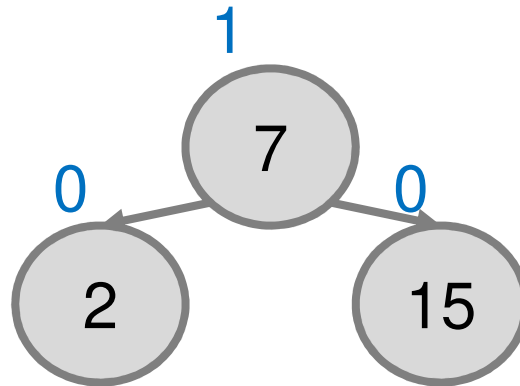
Montar a árvore para: **7** **15** **2** **23** **10** **19**



# Rotação Simples à Esquerda

## Exemplo

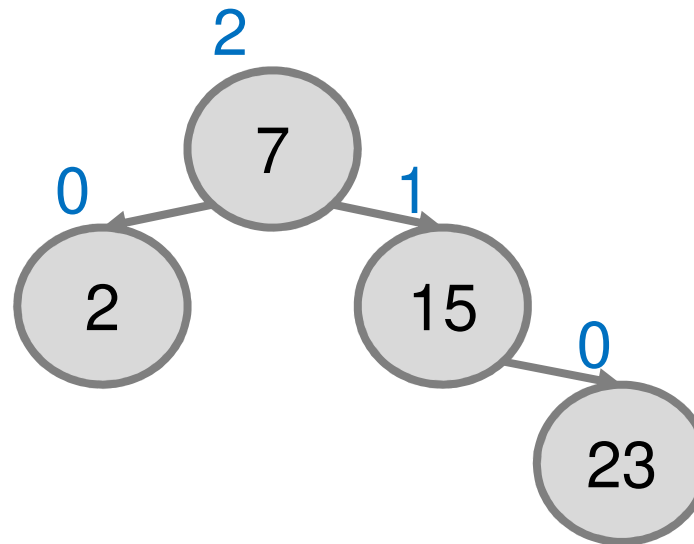
Montar a árvore para: **7** **15** **2** **23** **10** **19**



# Rotação Simples à Esquerda

## Exemplo

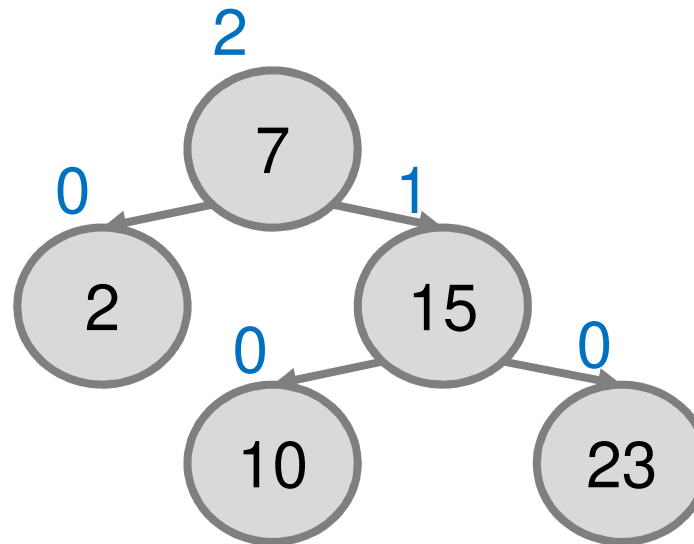
Montar a árvore para: **7** **15** **2** **23** **10** **19**



# Rotação Simples à Esquerda

## Exemplo

Montar a árvore para: **7** **15** **2** **23** **10** **19**

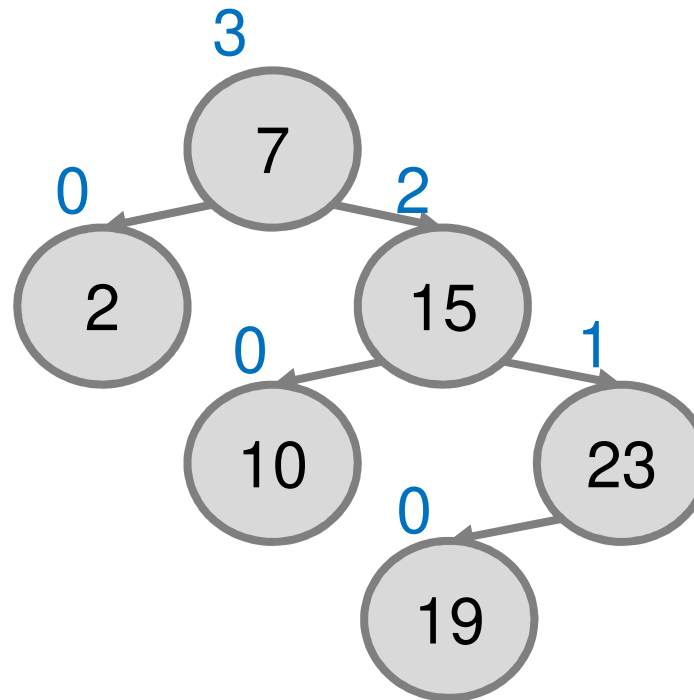




# Rotação Simples à Esquerda

## Exemplo

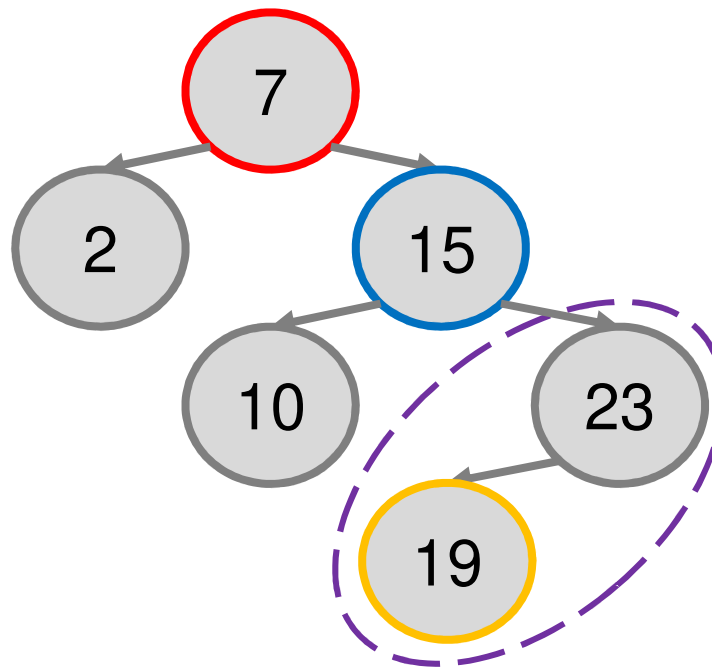
Montar a árvore para: **7 15 2 23 10 19**



# Rotação Simples à Esquerda

## Exemplo

Repare que a inserção do nó **19** desbalanceou a árvore com raiz em **7**



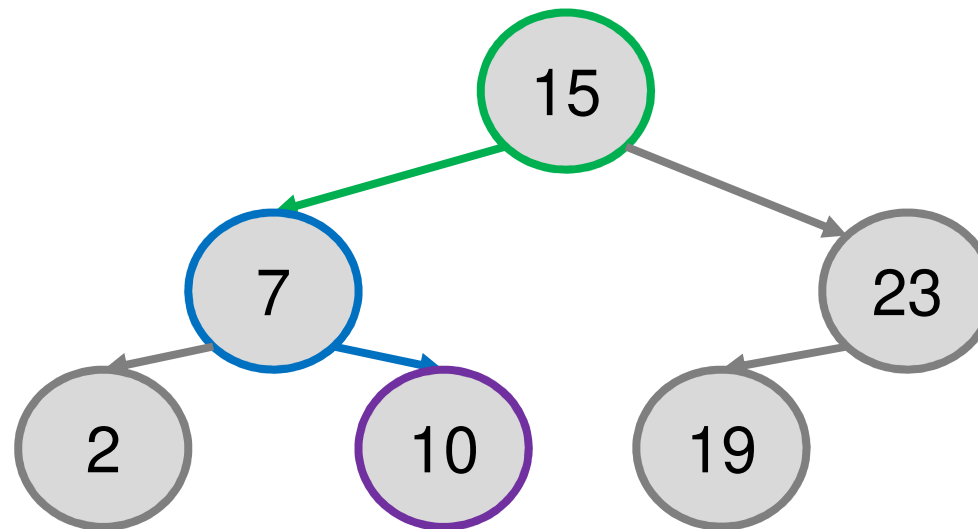
Inserção na **subárvore direita** do **filho à direita** de **7**

**Solução:** rotacionar o nó **15** à esquerda

# Rotação Simples à Esquerda

## Exemplo

Solução: rotação à direita aplicada sobre o nó 15

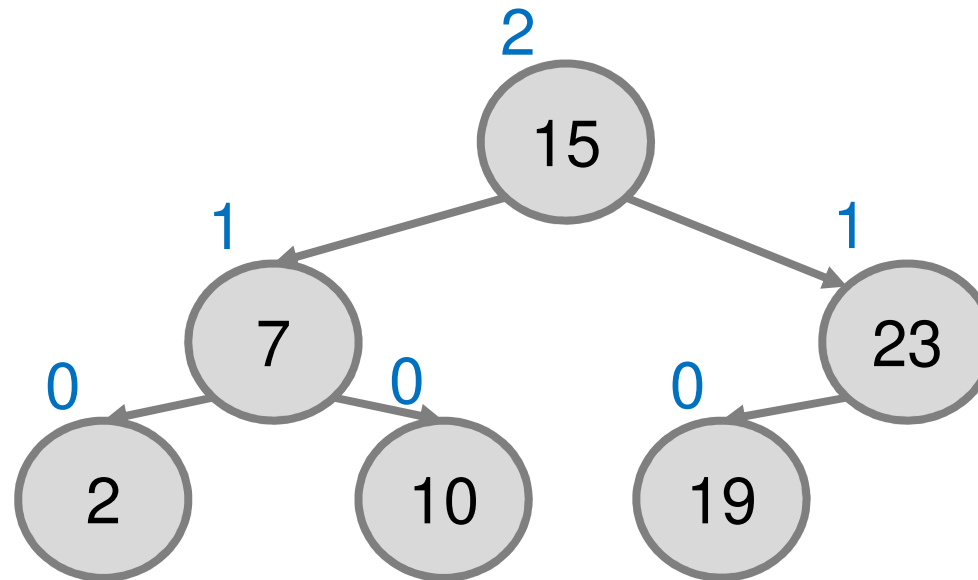


1. Nó **15** passa a ser raiz
2. Nó **7** passa a ser o **filho à esquerda do nó 15**
3. Nó **7** “adota” a **subárvore com raiz em 10**

# Rotação Simples à Esquerda

## Exemplo

*Árvore AVL balanceada!*



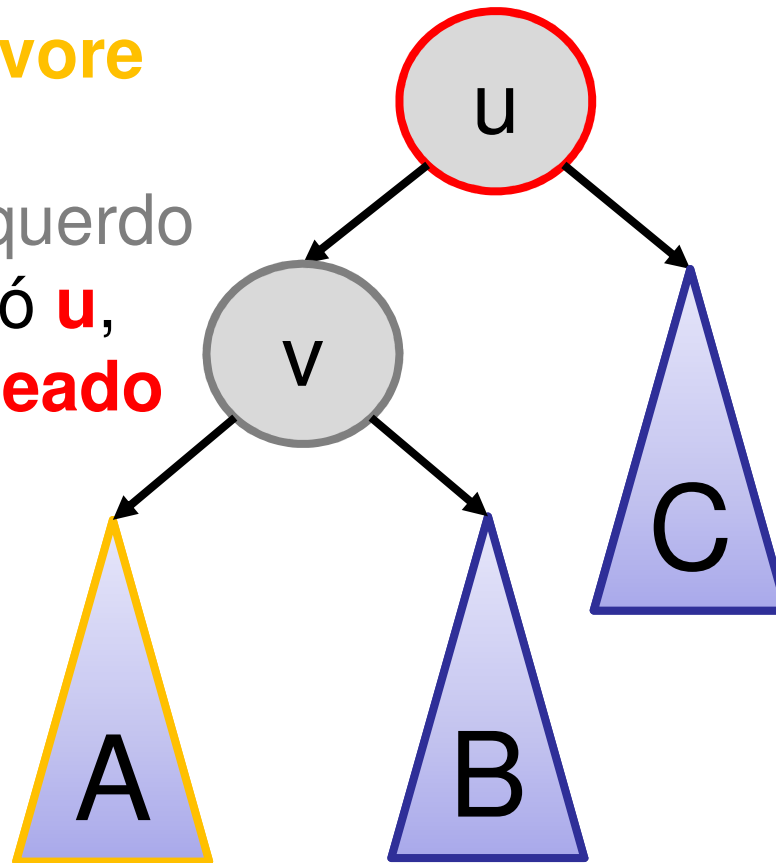
# Rotação Simples à Direita

Balanceamento quebrado por  
inserção à esquerda do filho  
esquerdo

# Árvores AVL

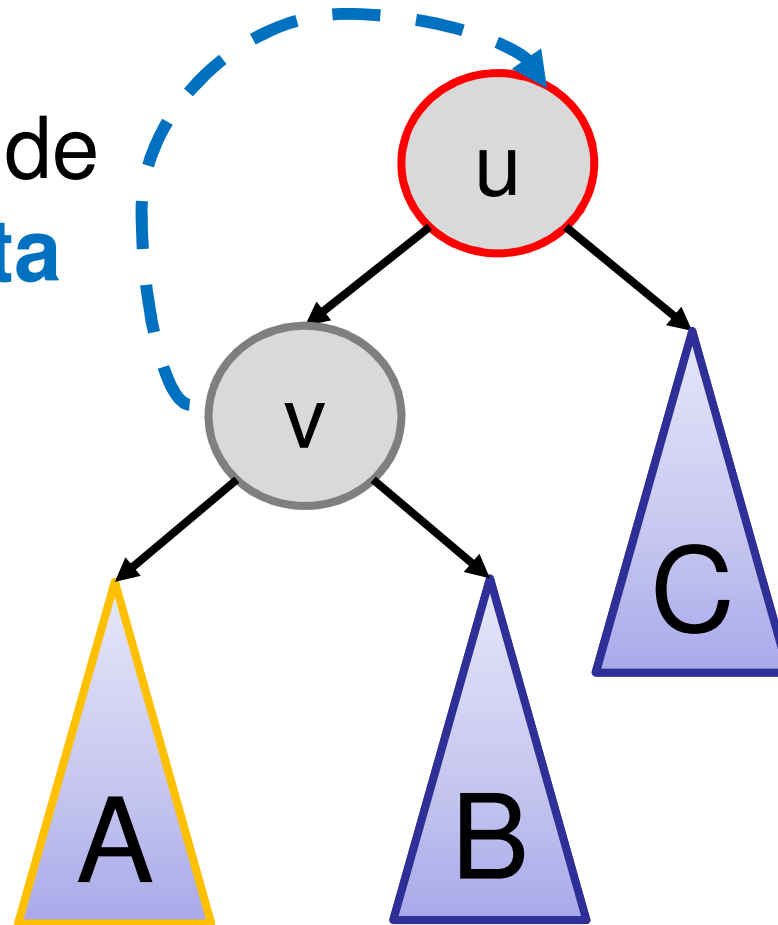
## Rotação Simples à Direita

- Inserção feita em **A**
- **A** é **subárvore esquerda** do filho esquerdo (nó **v**) do nó **u**, **desbalanceado**



### Solução:

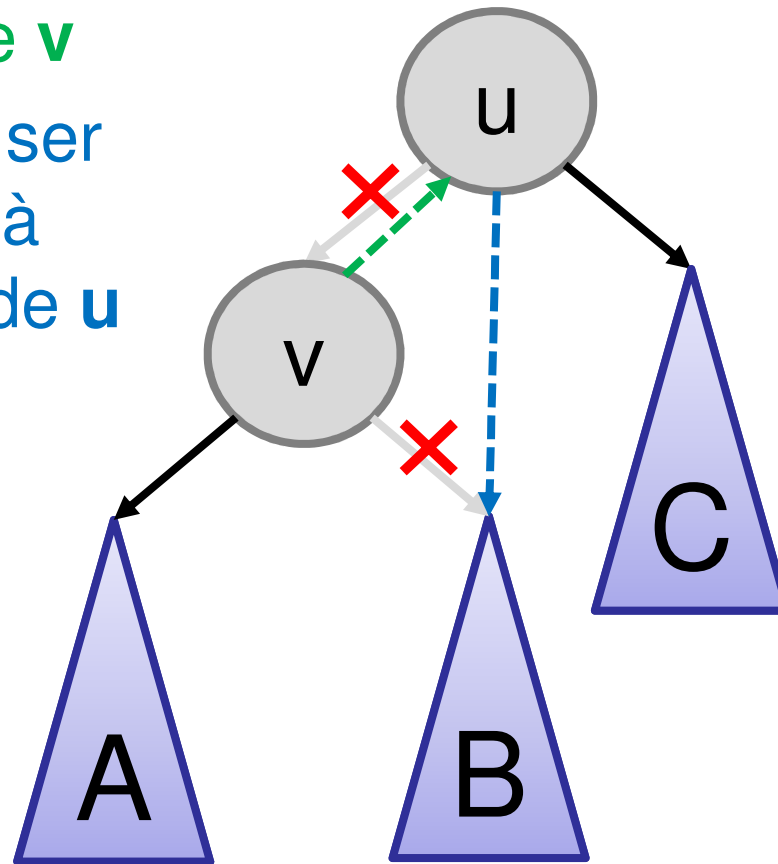
- Rotação de **v** à direita



# Árvores AVL

## Rotação Simples à Direita

1. **u** passa a ser filho à direita de **v**
2. **B** passa a ser subárvore à esquerda de **u**

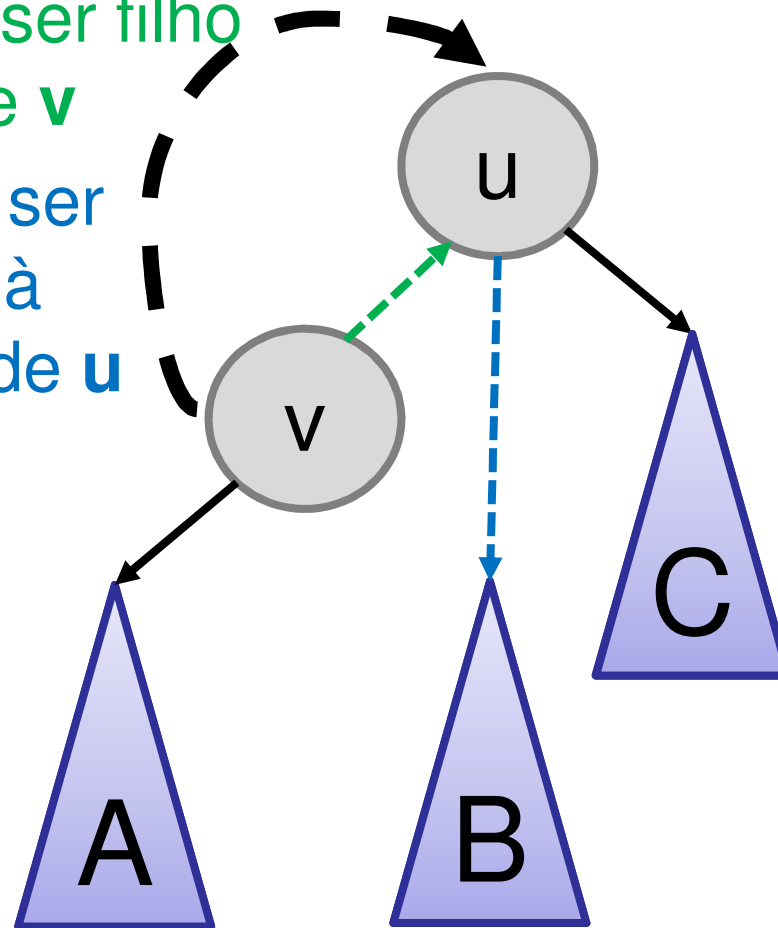




# Árvores AVL

## Rotação Simples à Direita

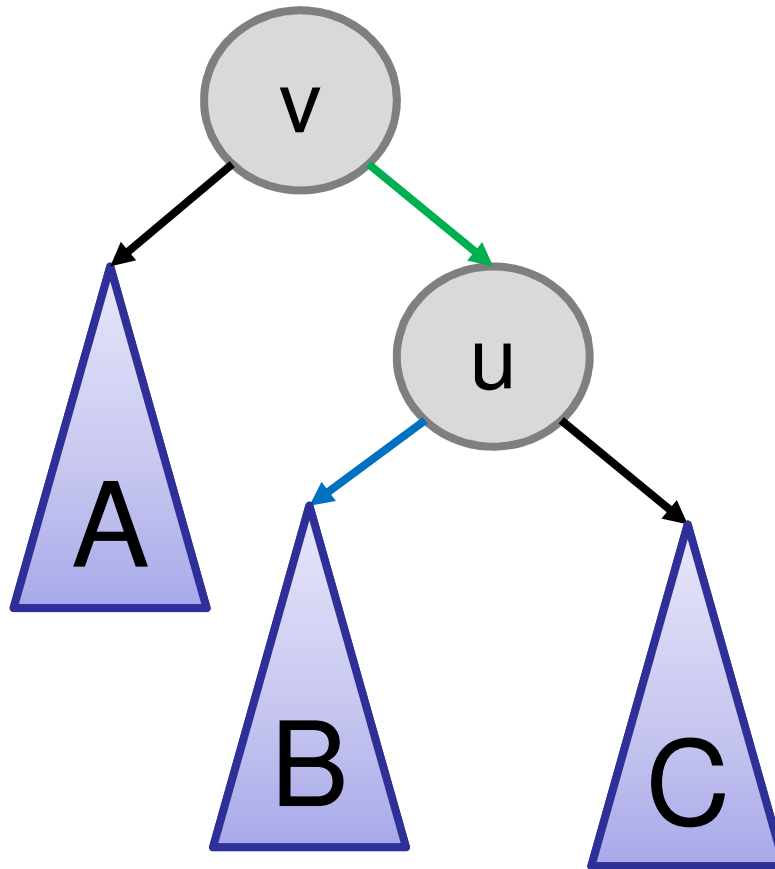
1. **u** passa a ser filho à direita de **v**
2. **B** passa a ser subárvore à esquerda de **u**



# Árvores AVL

## Rotação Simples à Direita

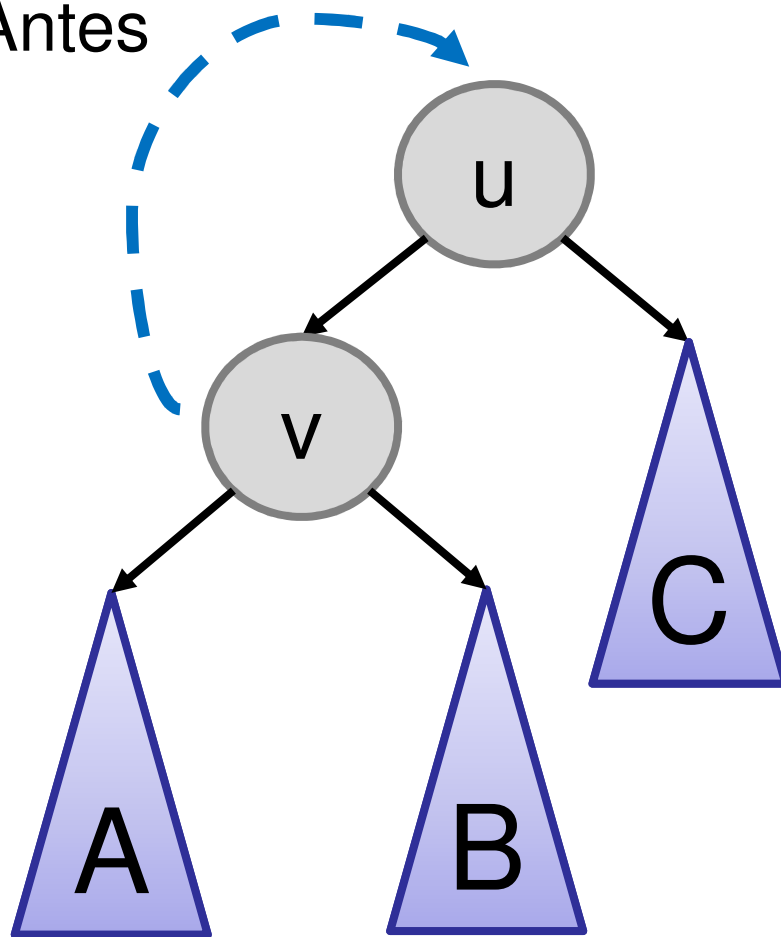
1. **u** passa a ser filho à direita de **v**
2. **B** passa a ser subárvore à esquerda de **u**



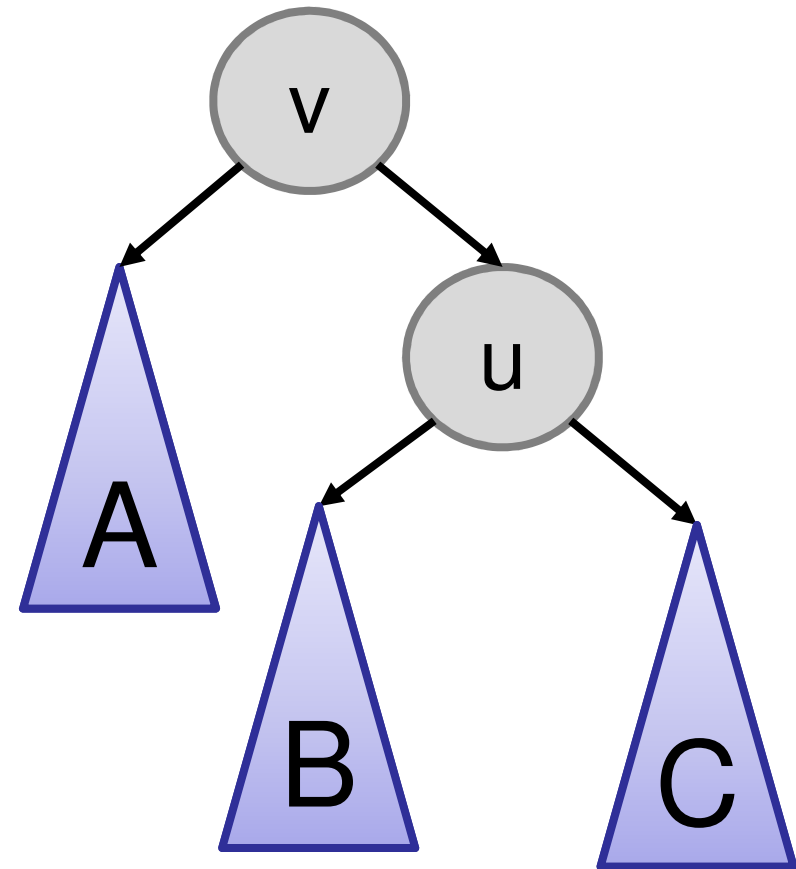
# Árvores AVL

## Rotação Simples à Direita

Antes



Depois



# Exemplo

Rotação simples à direita

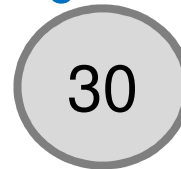
# Rotação Simples à Direita

## Exemplo

Montar a árvore para:

**30** 15 45 7 23 2

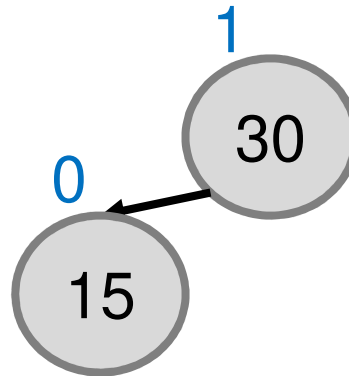
0



# Rotação Simples à Direita

## Exemplo

Montar a árvore para: **30** **15** 45 7 23 2

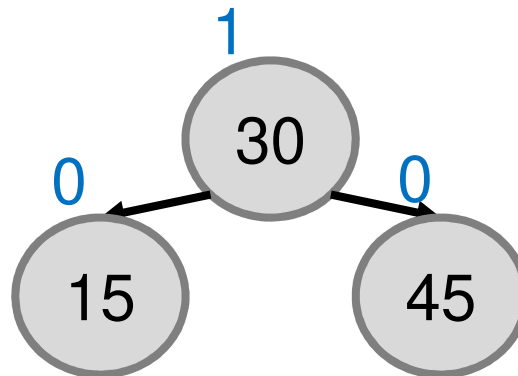


# Rotação Simples à Direita

## Exemplo

Montar a árvore para: 

30	15	45	7	23	2
----	----	----	---	----	---

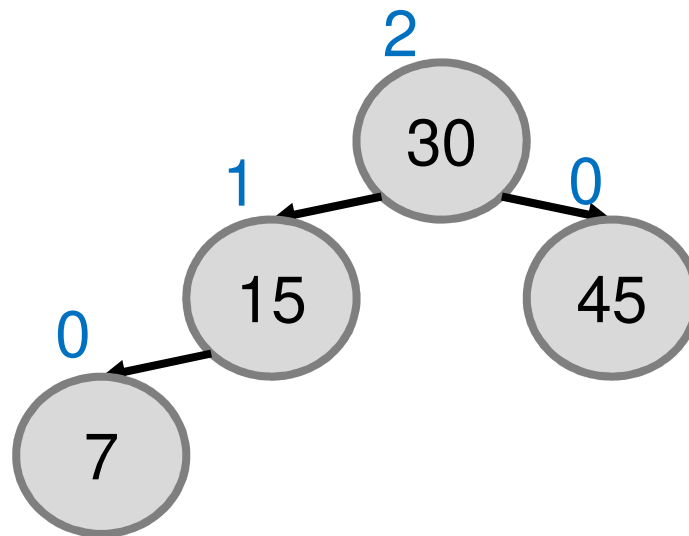


# Rotação Simples à Direita

## Exemplo

Montar a árvore para: 

30	15	45	7	23	2
----	----	----	---	----	---

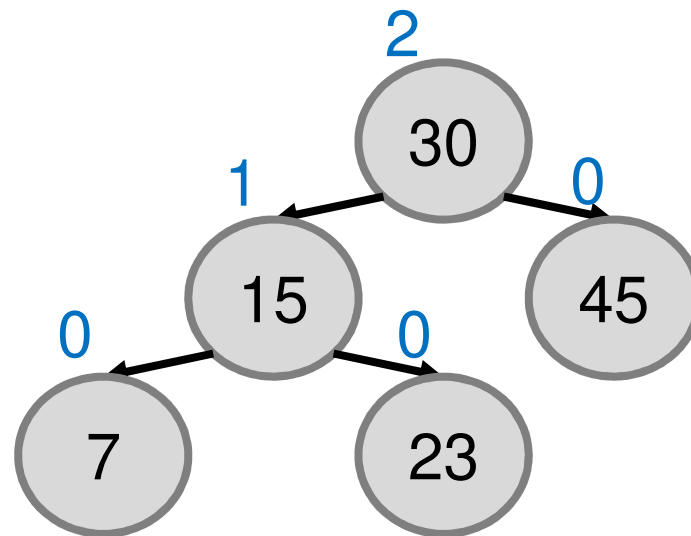




# Rotação Simples à Direita

## Exemplo

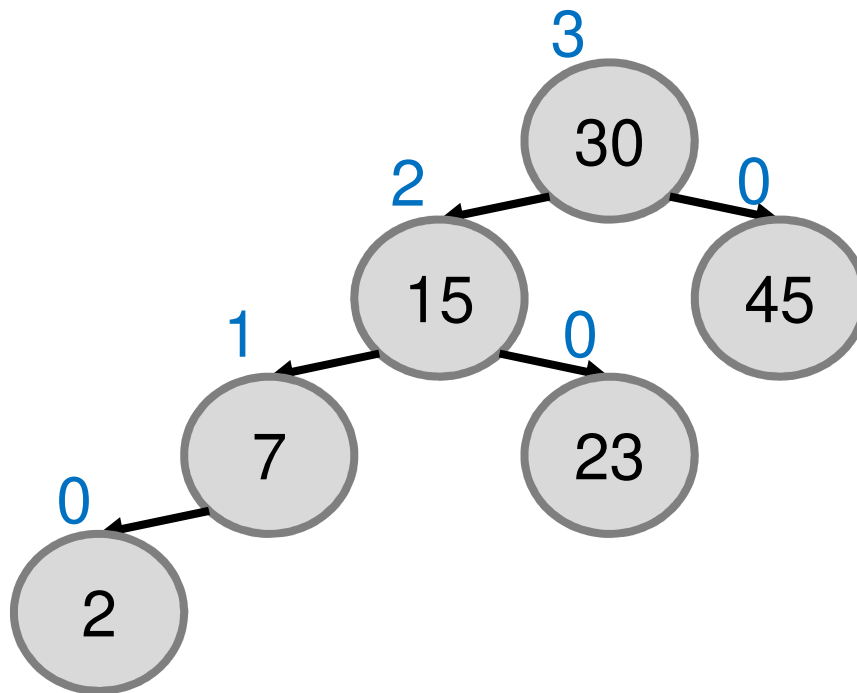
Montar a árvore para: **30** **15** **45** **7** **23** **2**



# Rotação Simples à Direita

## Exemplo

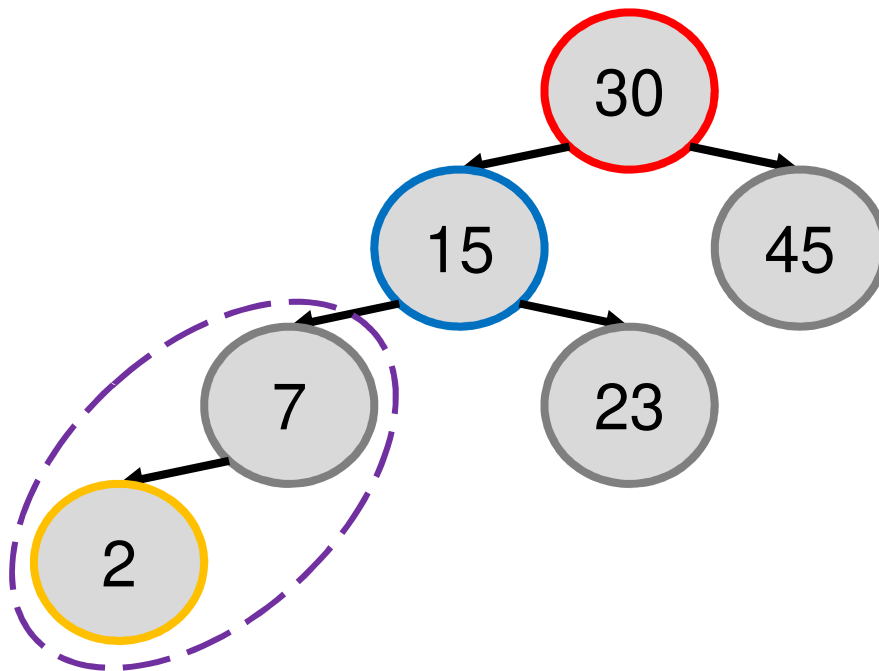
Montar a árvore para: **30** **15** **45** **7** **23** **2**



# Rotação Simples à Direita

## Exemplo

Repare que a inserção do nó **2** desbalanceou a árvore com raiz em **30**

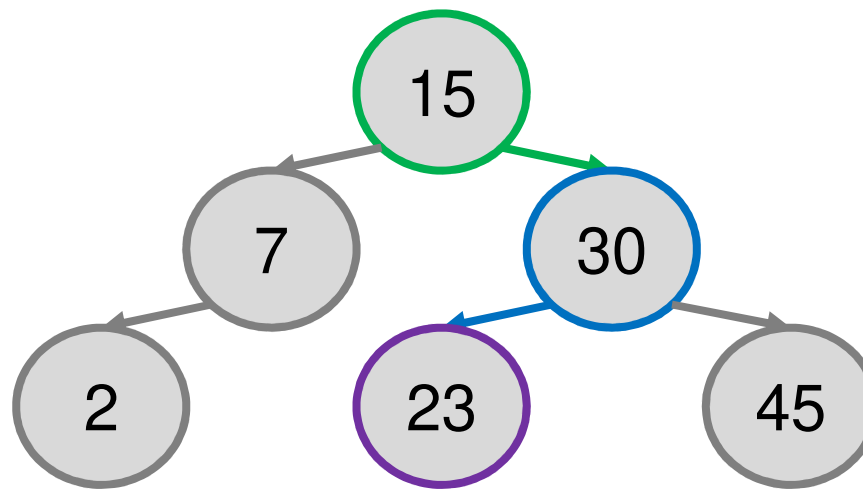


Inserção na **subárvore esquerda** do **filho à esquerda** de **30** 99  
**Solução:** rotacionar o nó **15** à direita

# Rotação Simples à Direita

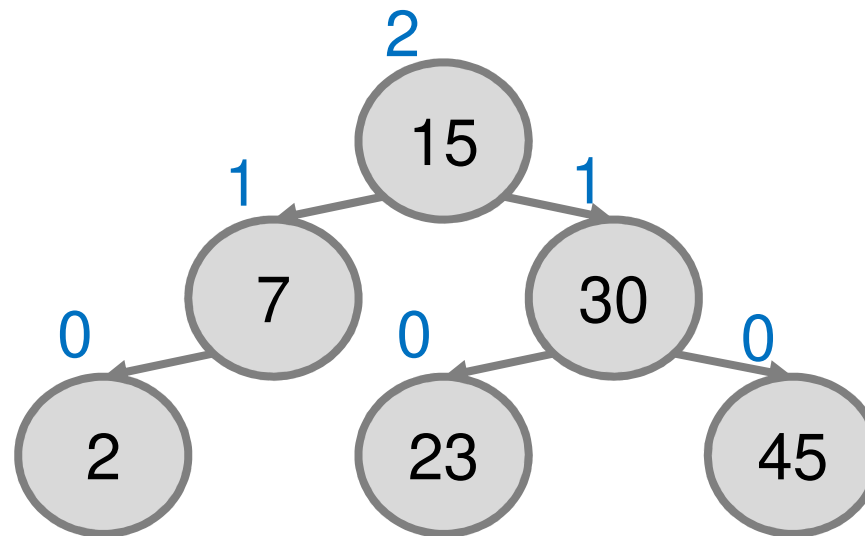
## Exemplo

Solução: rotação à direita aplicada sobre o nó 15



1. Nó **15** passa a ser raiz
2. Nó **30** passa a ser o **filho à direita do nó 15**
3. Nó **30** “adota” a **subárvore com raiz em 23**

*Árvore AVL balanceada!*



# Estrutura de Dados II

Prof. Me. Pietro M. de Oliveira