Евклидова мера N-мерного вектора.

1. Сложность последовательной реализации.

N-мерный вектор представляется в виде массива из N элементов. На каждом шаге алгоритма возводим в квадрат i-тый элемент массива и складываем с суммой квадратов предыдущих элементов. Всего N шагов. Когда все квадраты элементов сложены, извлекаем корень из этой суммы.

Сложность: $\boldsymbol{O}(\boldsymbol{N})$

2. Схема распараллеливания.

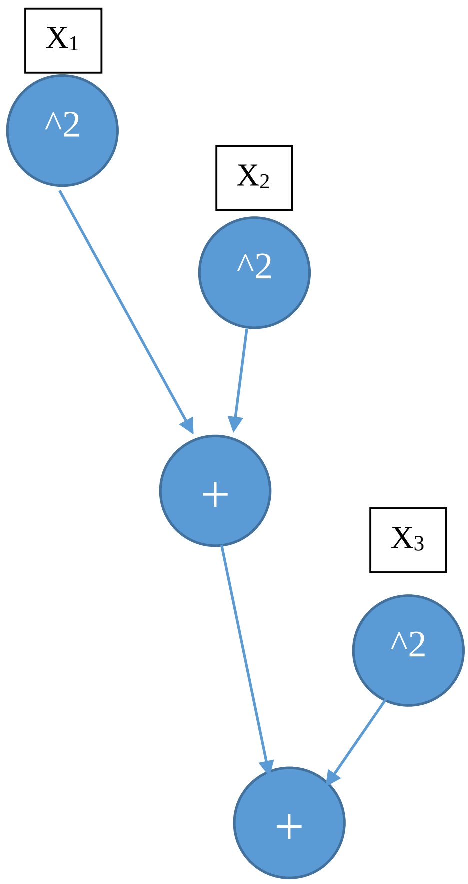
На первом этапе вычислений все элементы подразделяются на $^{N}/_{log_2(N)}$ групп, в каждой из которых содержится $log_2(N)$ элементов; далее для каждой группы вычисляется сумма квадратов значений при помощи последовательного алгоритма. Первый этап содержит $2log_2(N) - 1$ операций. На втором этапе для полученных $log_2(N)$ сумм применяется обычная каскадная схема. Далее вычисляется квадратный корень из полученной суммы. Второй этап содержит $log_2\left({}^{N}/_{log_2(N)}\right) + 1$ операций. Сложность первого этапа: $O(2log_2(N))$. Сложность второго этапа: $log_2\left({}^{N}/_{log_2(N)}\right)$.

При N ≤ 6 сложность алгоритма: $\boldsymbol{O(2log_2(N))}$.

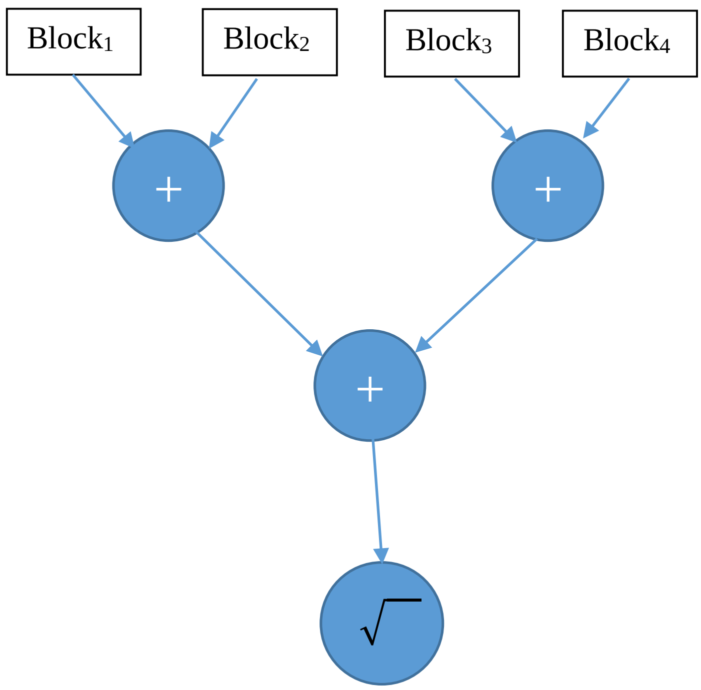
При N ≥ 7 сложность алгоритма: $\boldsymbol{O\left(log_2\left(\frac{N}{log_2(N)}\right)\right)}$.

3. Граф «операции-операнды».

Первый этап.



Второй этап.



4. Оценка ускорения и эффективности.

Для выполнения всего алгоритма требуется $N/_{log_2(N)}$ процессоров.

При p = 1 используем оценку времени последовательного алгоритма:

$$\boldsymbol{T_1(N) = 2N}$$

При p ≥ N используем каскадную схему суммирования, тогда оценка времени будет:

$$\boldsymbol{T_\infty(N) = log_2\left(\sqrt{2}N\right)}$$

При p = $N/_{log_2(N)}$:

$$\boldsymbol{T_p(N) = 3log_2(N) -\ log_2(log_2(N)) = log_2(\frac{N^3}{log_2(N)})}$$

Ускорение:

$$\boldsymbol{S_p(N) = \frac{T_1(N)}{T_p(N)} = \frac{2N}{log_2\left(\frac{N^3}{log_2(N)}\right)}}$$

Эффективность:

$$\boldsymbol{E_p(N) = \frac{T_1(N)}{p * T_p(N)} = \frac{2log_2(N)}{log_2\left(\frac{N^3}{log_2(N)}\right)} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{2}{3}}$$

При больших N доля чисто последовательных операций стремится к нулю. Тогда максимальное ускорение по закону Амдала равно:

$$\boldsymbol{S_p(N)} = \frac{1}{0 + \frac{\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{log_2(N)}}} = \frac{\boldsymbol{log_2(N)}}{\boldsymbol{N}}$$