

In [1]:

```
1 import numpy as np
```

started 08:13:42 2020-05-15, finished in 90ms

Задача 1

Совместное распределение (X, Y, Z) задается таблицей:

	$Y = 0$ $Z = 0$	$Y = 1$ $Z = 0$	$Y = 0$ $Z = 1$	$Y = 1$ $Z = 1$
$X = 0$	0.405	0.045	0.125	0.125
$X = 1$	0.045	0.005	0.125	0.125

Зададим трехмерную матрицу вероятностей

In [2]:

```
1 ▾ probs = np.array([
2     [[0.405, 0.045], [0.125, 0.125]],
3     [[0.045, 0.005], [0.125, 0.125]]
4     ])
```

started 08:16:36 2020-05-15, finished in 12ms

На самом деле получилось распределение вектора (X, Z, Y)

In [3]:

```
1 probs
```

started 08:16:41 2020-05-15, finished in 28ms

Out[3]:

```
array([[0.405, 0.045],
       [0.125, 0.125]],

      [[0.045, 0.005],
       [0.125, 0.125]])
```

Вероятности при $Z = 0$

In [6]:

```
1 probs[:, 0, :]
```

started 08:19:07 2020-05-15, finished in 9ms

Out[6]:

```
array([[0.405, 0.045],
       [0.045, 0.005]])
```

1. Безусловная независимость

Распределение (X, Y)

In [5]:

1	<code>probs.sum(axis=1)</code>
started 08:18:21 2020-05-15, finished in 5ms	

Out[5]:

```
array([[0.53, 0.17],
       [0.17, 0.13]])
```

Распределение X

In [7]:

1	<code>probs.sum(axis=(1, 2))</code>
started 08:20:35 2020-05-15, finished in 7ms	

Out[7]:

```
array([0.7, 0.3])
```

Распределение Y

In [8]:

1	<code>probs.sum(axis=(0, 1))</code>
started 08:20:46 2020-05-15, finished in 10ms	

Out[8]:

```
array([0.7, 0.3])
```

Теперь видно, что $P(X = 0, Y = 0) = 0.53 \neq 0.7 \cdot 0.7 = P(X = 0)P(Y = 0)$. Таким образом, случайные величины X и Y **зависимы**.

2. Условная независимость

Покажем, что $P(X = x, Y = y \mid Z = z) = P(X = x \mid Z = z) P(Y = y \mid Z = z)$ для всех x, y, z .

Вспомним формулы

- $P(X = x, Y = y \mid Z = z) = \frac{P(X=x, Y=y, Z=z)}{P(Z=z)}$
- $P(X = x \mid Z = z) = \frac{P(X=x, Z=z)}{P(Z=z)}$

Посчитаем распределения векторов (X, Z) и (Y, Z)

In [9]:

```
1 probs_XZ = probs.sum(axis=2)
2 probs_XZ
```

started 08:32:19 2020-05-15, finished in 4ms

Out[9]:

```
array([[0.45, 0.25],
       [0.05, 0.25]])
```

In [10]:

```
1 probs_YZ = probs.sum(axis=0).T
2 probs_YZ
```

started 08:34:21 2020-05-15, finished in 11ms

Out[10]:

```
array([[0.45, 0.25],
       [0.05, 0.25]])
```

А также распределение Z

In [11]:

```
1 probs_Z = probs.sum(axis=(0, 2))
2 probs_Z
```

started 08:40:24 2020-05-15, finished in 12ms

Out[11]:

```
array([0.5, 0.5])
```

Проверим равенство для всех x, y, z

In [14]:

```
1 ▾ for x in [0, 1]:
2 ▾     for y in [0, 1]:
3 ▾         for z in [0, 1]:
4             print('P(X={}, Y={} | Z={}) = '.format(x, y, z), end='')
5             print(probs[x, z, y] / probs_Z[z])
6             print('P(X={} | Z={}) * P(Y={} | Z={}) = '.format(x, z, y, z), end='')
7             print(probs_XZ[x, z] / probs_Z[z] * probs_YZ[y, z] / probs_Z[z])
8             print()
```

started 08:42:43 2020-05-15, finished in 13ms

$P(X=0, Y=0 \mid Z=0) = 0.81$
 $P(X=0 \mid Z=0) * P(Y=0 \mid Z=0) = 0.81$

$P(X=0, Y=0 \mid Z=1) = 0.25$
 $P(X=0 \mid Z=1) * P(Y=0 \mid Z=1) = 0.25$

$P(X=0, Y=1 \mid Z=0) = 0.09$
 $P(X=0 \mid Z=0) * P(Y=1 \mid Z=0) = 0.09$

$P(X=0, Y=1 \mid Z=1) = 0.25$
 $P(X=0 \mid Z=1) * P(Y=1 \mid Z=1) = 0.25$

$P(X=1, Y=0 \mid Z=0) = 0.09$
 $P(X=1 \mid Z=0) * P(Y=0 \mid Z=0) = 0.09$

$P(X=1, Y=0 \mid Z=1) = 0.25$
 $P(X=1 \mid Z=1) * P(Y=0 \mid Z=1) = 0.25$

$P(X=1, Y=1 \mid Z=0) = 0.01$
 $P(X=1 \mid Z=0) * P(Y=1 \mid Z=0) = 0.009999999999999998$

$P(X=1, Y=1 \mid Z=1) = 0.25$
 $P(X=1 \mid Z=1) * P(Y=1 \mid Z=1) = 0.25$

Все совпадает с точностью до компьютерной погрешности. Таким образом, случайные величины X и Y **условно независимы** по Z .