Тема 31. Ейлерові та гамільтонові цикли

31.1. Ейлерів цикл

У першій темі цього розділу (тема 24) ми розглядали приклади задач на графах. І серед них – задачу про кенігсберзькі мости. Нами згадувалось ім'я Ейлера – видатного математика, який показав, що ця задача не має розв'язків. Задачу про кенігсберзькі мости можна сформулювати наступним чином в термінах теорії графів: чи існує в мультиграфі G цикл, який містить усі ребра цього мультиграфу? Нагадаємо, що в циклі ребра не повторюються, а вершини можуть повторюватись.

Означення 31.1. **Ейлеровим циклом** у зв'язаному графі G називають цикл, який містить усі ребра графу. **Ейлеровим шляхом** – ланцюг, що містить усі ребра графу.

На рис. 31.1 зображені три графи. Грай G_1 має ейлерів цикл, наприклад, a, e, d, c, e, b, a; граф G_3 не має ейлеревого циклу, але має ейлерів маршрут: a, d, c, e, b, c, a, b; граф G_2 не має ані ейлерового циклу, ані ейлерового ланцюгу.

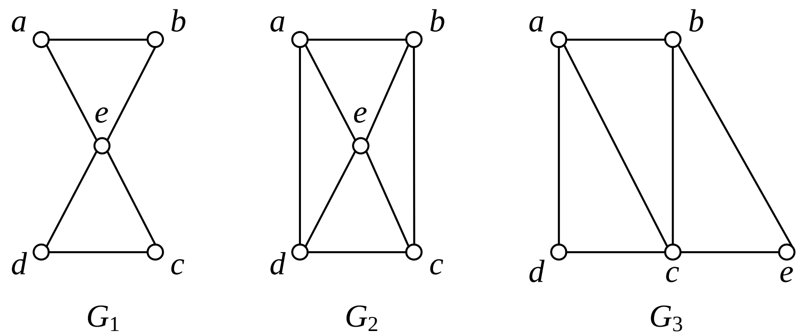
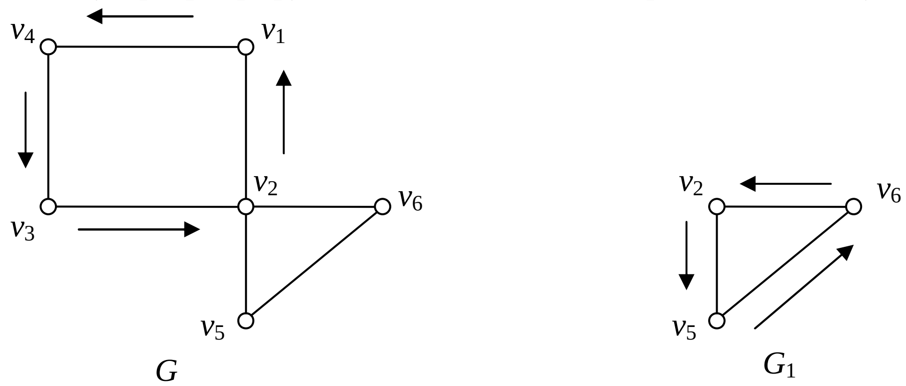


Рис. 31.1.

Існує простий критерій (необхідна та достатня умова) для виявлення того, чи має граф ейлерів цикл.

Теорема 31.1. Зв'язаний граф або мультиграф G має ейлерів цикл тоді й тільки тоді, коли степені всіх його вершин парні.

Доведення. (Необхідність). Нехай у графі G існує ейлерів цикл. Тоді він проходить через кожну вершину графу та входить до неї по одному ребру, а виходить по іншому. Це означає, що кожна вершина інцидентна парній кількості ребер ейлерового циклу. Оскільки такий цикл містить усі ребра графу G, то звідси випливає парність степенів усіх його вершин.



$P_1 = v_1, v_4, v_3, v_2, v_1$ $\qquad$ $P_2 = v_2, v_5, v_6, v_2$

Рис. 31.2.

(Достатність). Припустимо тепер, що всі вершини графу G мають парний степінь. Почнемо маршрут P_1 із довільної вершини v_1 і продовжимо його, наскільки це можливо, вибираючи щоразу нове ребро. Позаяк степені всіх вершин парні, то, увійшовши в будь-яку вершину, відмінну від v_1, ми завжди маємо можливість вийти з неї через іще не пройдене ребро. Тому шлях P_1 завершиться у вершині v_1, тобто P_1 обов'язково виявиться циклом. Якщо з'ясується, що маршрут P_1 містить усі ребра графу G, то це ейлерів цикл. У протилежному випадку вилучимо з G всі ребра циклу P_1 і всі вершини, інцидентні лише вилученим ребрам. Отримаємо якийсь зв'язаний граф G_1. Оскільки P_1 та G мають вершини лише парних степенів, то, очевидно, і граф G_1, матиме цю властивість. Окрім того, позаяк граф G зв'язаний, то графи P_1 і G_1 мають принаймні одну спільну вершину v_2. Тепер із вершини v_2 побудуємо цикл P_2 в графі G_1 аналогічно до того, як ми будували цикл P_1 у графі G. Цикл P_2 вставимо в цикл P_1 на місце вершини v_2. Одержимо цикл P_3. Описані побудови показано на рис. 31.2.

Цикл $P_3 = v_1, v_4, v_3, P_2, v_1 = v_1, v_4, v_3, v_2, v_5, v_6, v_2, v_1$ ейлерів. Якби він виявився не ейлеровим, то потрібно продовжувати аналогічні побудови та отримати ще більший цикл. Цей процес закінчиться побудовою ейлерового циклу. Зазначимо, що доведення достатності має конструктивний характер: подано алгоритм побудови ейлерового циклу. ►

Існує й інший алгоритм побудови ейлерового циклу, який дає змогу побудувати цей цикл одразу. Це алгоритм Флері.

<u>Алгоритм Флері побудови ейлерового циклу</u>

Робота алгоритму полягає в нумерації ребер у процесі побудови ейлерового циклу.

1. Починаємо з довільної вершини u та присвоюємо довільному ребру (u, v) номер 1. Викреслюємо ребро (u, v) та переходимо у вершину v.
2. Нехай v – вершина, у яку ми перейшли на попередньому кроці, k – останній присвоєний номер. Вибираємо довільне ребро, інцидентне вершині v, причому міст вибираємо лише тоді, коли немає інших можливостей. Присвоюємо вибраному ребру номер $(k + 1)$, викреслюємо його та збільшуємо лічильник k на 1.
3. Якщо всі ребра графу викреслено та пронумеровано – ці номери задають послідовність ребер в ейлеревому циклі. Інакше перейти на крок 2.

Повертаючись до задачі про кенігсберзькі мости, виявляємо, що мультиграф, зображений на рис. 31.3, має всі вершини непарного степеня. Отже, цей мультиграф не має ейлерового циклу, тому неможливо пройти кожний міст по одному разу та повернутись у початкову точку.

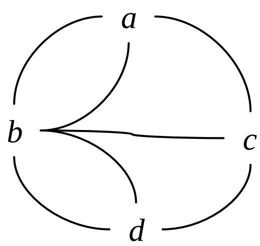


Рис. 31.3.

<u>Теорема 31.2.</u> Зв'язаний мультиграф має ейлерів маршрут, але не має ейлерового циклу тоді й лише тоді, коли він має точно дві вершини непарного степеня.

Зазначимо, що будь-який ейлерів шлях починається в одній із цих двох вершин непарного степеня, а закінчується в іншій. Оскільки мультиграф для кенігсберзьких мостів має чотири вершини з непарними степенями, можна дійти висновку про неможливість пройти кожний міст по одному разу, навіть, якщо не потрібно повертатись у початкову точку.

<u>Означення 31.2.</u> Граф, який має ейлерів цикл називають **ейлеровим графом**.

Треба відмітити той факт, що ейлерових графів майже не існує.

<u>Означення 31.3.</u> **Ейлеровим циклом** у слабко зв'язаному орієнтованому графі або мультиграфі називають орієнтований цикл, який містить усі дуги графу.

<u>Теорема 31.3.</u> Орієнтований слабко зв'язаний граф або мультиграф має ейлерів цикл тоді й тільки тоді, коли напівстепінь входу кожної вершини дорівнює її напівстепеню виходу.

31.2. Гамільтонів цикл

Означення 31.4. Якщо граф має простий цикл, який містить усі вершини графу (по одному разу), то такий цикл називається **гамільтоновим циклом**, а граф називається **гамільтоновим**. **Гамільтонів маршрут –** це маршрут, який містить усі вершини графа по одному разу.

Зазначимо, що гамільтонові цикл та маршрут, взагалі кажучи, не містять усіх ребер графу.

Термін «гамільтонів» у цих означеннях походить від імені відомого ірландського математика У. Гамільтона, який 1867 р. запропонував гру «Навколосвітня подорож». Кожній із двадцяти вершин додекаедра (правильного дванадцятигранника, грані якого – п’ятикутники) приписано назву одного з великих міст світу. Потрібно, розпочавши з довільного міста, відвідати решту 19 міст точно один раз і повернутись у початкове місто. Перехід дозволено ребрами додекаедра. Ту саму задачу можна зобразити й на площині (рис. 31.4). Вона зводиться до відшукання в графі гамільтонового циклу. Один із можливих розв’язків показано потовщеними лініями.

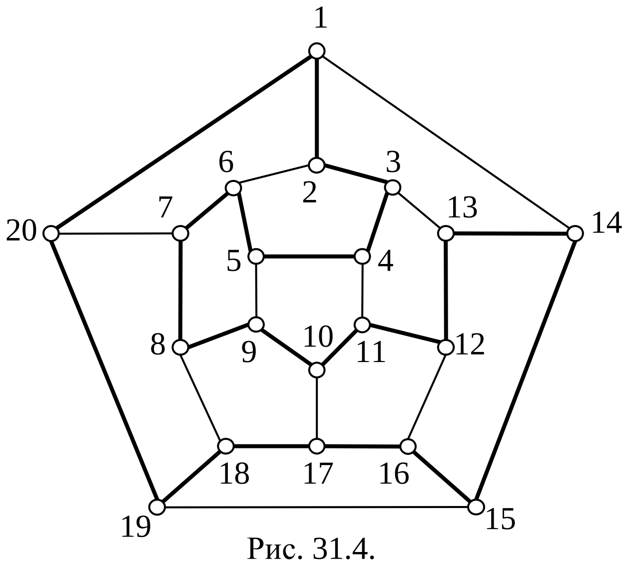


Рис. 31.4.

Не всі зв’язані графи мають гамільтонів цикл хоча б тому, що такий граф має бути двозв’язним (тобто граф, який має точки з’єднання, не може мати гамільтонового циклу). Незважаючи на зовнішню подібність формулювань задач про існування ейлерового та гамільтонового циклів, ці задачі принципово різні. Використовуючи результати попереднього підрозділу, легко виявити, чи має граф ейлерів цикл, і, якщо має, то побудувати його.

Ситуація для гамільтонового циклу істотно інша. Відповісти на питання, чи має граф гамільтонів цикл, зазвичай, дуже важко. Вивчення достатніх умов наявності в графі гамільтонового циклу – один із важливих напрямків у теорії графів. Інтуїтивно зрозуміло, що граф із багатьма ребрами, достатньо рівномірно розподіленими, з великою ймовірністю має гамільтонів цикл. Доведемо одну з теорем такого типу.

Теорема 31.4 (Дірак). Якщо для кожної вершини v зв’язаного простого графа з $n \geq 3$ вершинами виконується нерівність $d(v) \geq n/2$, то цей граф має гамільтонів цикл.

Доведення. Додамо до графу G k нових вершин і з’єднаємо ребром кожну з них із кожною вершиною з G. Отриманий граф з $n + k$ вершинами позначимо як G'. Уважатимемо, що k – найменша кількість вершин, потрібних для того, щоб у графі G з’явився гамільтонів цикл. Доведемо, що припущення $k\geq 1$ призводить до суперечності.

Нехай v, p, w,…, v – гамільтонів цикл у графі G', де v і w – вершини з G, а p – одна з нових вершин. Тоді вершина w несуміжна з v, інакше ми могли б не використовувати вершину p, що суперечить мінімальності числа k. Більше того, вершина w', суміжна з вершиною w, не може в гамільтоновому циклі безпосередньо йти за вершиною v', суміжною з

v. Справді, якщо є гамільтонів цикл $v, p, w, \ldots, v', w', \ldots, v$, то ми можемо замінити його на $v, v', \ldots, w, w', \ldots, v$, повернувши частину циклу між w та v'. Це знову суперечить мінімальності числа k.

Отже, кількість вершин графу G', не суміжних з w, не менша від кількості вершин, суміжних з v (тобто дорівнює принаймні $n/2 + k$). Натомість очевидно, що кількість вершин графу G', суміжних з w, також дорівнює принаймні $n/2 + k$. Але жодна з вершин графу G' не може бути водночас суміжною та несуміжною з вершиною w, тому загальна кількість вершин графу G' дорівнює щонайменше $n + 2k$. Але це суперечить тому, що кількість вершин графу G' дорівнює $n + k$. ►

Теорема 31.5 (Оре). Нехай n – кількість вершин в графі. Якщо для будь-якої пари несуміжних вершин u та v виконано нерівність $d(u) + d(v) \geq n$, то граф називається графом Оре. Граф Оре – гамільтонів.

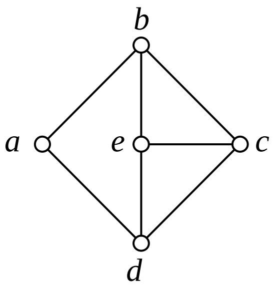
Наступна теорема Бонді-Хватала узагальнює Дірака та Оре. Визначимо замикання графу. Нехай у графа G n вершин. Тоді замикання $C(G)$ однозначно будується за G додаванням для всіх несуміжних вершин u та v, у яких виконується $d(u) + d(v) \geq n$, нового ребра (u, v).

Теорема 31.6 (Бонді-Хватала). Граф гамільтонів тоді й тільки тоді, коли його замикання – гамільтонів граф.

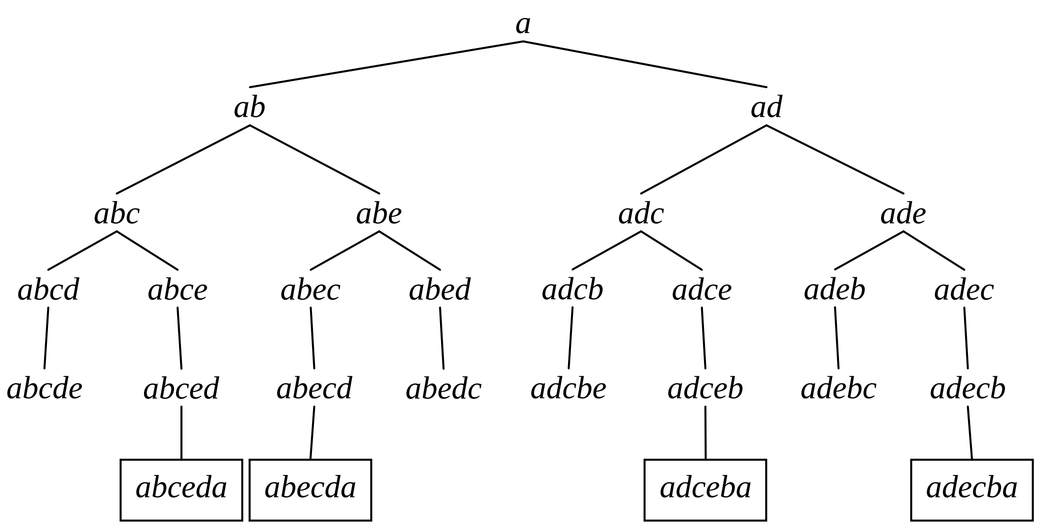
Як знайти гамільтонів цикл або переконатись, що його немає? Очевидний алгоритм, який можна застосувати, – це повний перебір усіх можливостей, тобто $n!$ перестановок усіх вершин графу та відповідних перевірок.

Існує алгоритм побудови гамільтонового циклу в графі (якщо він існує) на основі бектрекінгу. Він полягає в наступному. Починаємо з довільної вершини. Будуємо шлях без повторення вершин, доки це можливо. Якщо вдалося пройти всі вершини, то перевіряємо, чи існує ребро, що з'єднує останню та початкову вершини цього шляху. Якщо описаний процес у певний момент неможливо продовжити, то повертаємося на одну вершину назад і намагаємося продовжити побудову шляху (без повторення вершин) іншим способом.

Цей алгоритм значно зменшує кількість ітерацій в порівнянні з повним перебором. Наведемо приклад його використання для графу з п'ятьма вершинами (рис. 31.5, *а*). До того ж знайдемо всі можливі гамільтонові цикли для цього графу. Побудоване дерево зображене на рис. 31.5, *б*. В ньому обведені ті листки, які відповідають знайденим гамільтоновим циклам. Для цього нам знадобилось розглянути тільки 23 послідовності довжиною від 1 до 5 замість побудови 5! = 125 послідовностей довжиною 5.



а



б

Рис. 31.5

31.3. Задача комівояжера

Розглянемо наступну задачу, відому як **задача комівояжера**. Маємо p міст, відстані між якими відомі. Комівояжер повинен відвідати всі p міст по одному разу, повернувшись в те, з якого почав. Потрібно знайти такий маршрут руху, при якому сумарна пройдена відстань буде мінімальною.

Очевидно, що задача комівояжера – це задача пошуку найкоротшого гамільтонового циклу в повному зваженому графі. Можна припустити наступну просту схему розв'язку задачі комівояжера: згенерувати усі $p!$ можливих перестановок вершин повного графа, підрахувати для кожної перестановки довжину маршруту і обрати з них найкоротший. Очевидно, таке обчислення потребує не менше $O(p!)$ кроків.

Як відомо, $p!$ – швидко зростаюча функція. Таким чином, розв'язок задачі комівояжера описаним методом повного перебору виявляється практично неможливим навіть для порівняно невеликих p. Більш того, відомо, що задача комівояжера належить до числа так званих NP-повних задач.

Коротко, суть проблеми NP-повноти зводиться до наступного. В різних областях дискретної математики, комбінаторики, логіки тощо відомо багато задач, які належать до числа найбільш фундаментальних, для яких, не дивлячись на всі зусилля, не вдалося знайти алгоритмів розв'язку, які мають поліноміальну складність. Більш того, якщо б вдалося відшукати ефективний алгоритм розв'язку хоча б однієї з цих задач, то з цього миттєво випливало існування ефективних алгоритмів для всієї решти задач цього класу. На цьому заснована загальноприйнята думка, що таких алгоритмів не існує.